Ebene und sphärische Trigonometrie

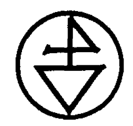
mit Anwendungen auf Kartographie, Geodäsie und Astronomie

VON

DR.-ING. RUDOLF SIGL

O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE MÜNCHEN

Mit 239 Abbildungen



HERBERT WICHMANN VERLAG KARLSRUHE

1977

Vorwort

Die Trigonometrie ist nicht nur eine der ältesten, sondern auch eine der wichtigsten Disziplinen der Mathematik. Lange Zeit verstand man darunter die Lehre von den Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks, also eine Dreiecksmessung im engeren Sinn. Heute ist der Begriff der Trigonometrie weit umfassender: Man rechnet der Trigonometrie außerdem alle funktionalen Zusammenhänge von Winkeln, Strecken und Flächen zu, und das führt zur Berechnung ebener und räumlicher Gebilde im mathematischen Sinne. Zur Trigonometrie gehören also auch die Kreis- und Hyperbelfunktionen, ihre Reihenentwicklungen und ihre Zwischenfunktionen, dann die Integrale trigonometrischer Funktionen, FOURIER-Reihen und vieles andere.

Trotzdem ist die Trigonometrie mehr und mehr zu einer Hilfsdisziplin für nahezu alle mathematischen Disziplinen, außerdem für nahezu alle Anwendungsgebiete der Mathematik geworden; denn die Grundtatsachen der Trigonometrie gelten als elementar und werden bereits im Schulunterricht behandelt. Die darüber hinaus notwendigen Ergänzungen, insbesondere die sphärische Trigonometrie und deren Anwendungen in Geodäsie, Astronomie usw., kommen dagegen weder in den Hochschulvorlesungen über Mathematik noch in den zahlreichen Lehrbüchern genügend zu ihrem Recht, was sich in den einschlägigen Fachvorlesungen störend bemerkbar macht.

Hinzu kommt, daß weder die neuere, außerordentlich umfangreiche deutschsprachige mathematische noch die geodätische Fachliteratur genügend gestufte Trigonometrie-Lehrbücher aufweist: Seit der Fertigstellung der 5. Auflage von E. v. HAMMERS Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie im Jahre 1923 wurde bei uns kein Versuch mehr unternommen, die Trigonometrie und ihre Anwendungen in Geodäsie und Astronomie geschlossen und möglichst vollständig darzustellen. Das vorliegende Buch hat eine solche geschlossene Darstellung zum Ziel.

Der erwähnten Fülle des Stoffes entsprechend ist dennoch eine gewisse Themenauswahl und Beschränkung geboten. So beschäftigt sich der Teil I, die ebene Trigonometrie, mit den grundlegenden Eigenschaften der Kreisfunktionen und deren Auftreten und Anwendungen in Geometrie und Algebra. Ausführlich dargestellt sind die Aufgabe der Dreiecksberechnung, die Trigonometrie des Vierecks und die Lösung goniometrischer Gleichungen. Dagegen sind die Zusammenhänge zwischen

Inhalt

Einführung

Teil I: Ebene Trigonometrie

Kapitel 1: Das rechtwinklige Dreieck

Kapitel 2: Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

Kapitel 3: Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

Kapitel 4: Berechnung der trigonometrischen Funktionen

Kapitel 5: Das schiefwinklige Dreieck

Kapitel 6: Weitere Beziehungen und Sätze für das schiefwinklige Dreieck

Kapitel 7: Trigonometrie des Vierecks

Kapitel 8: Ergänzungen zu den trigonometrischen Funktionen, weitere algebraische und geometrische Anwendungen

Teil II: Sphärische Trigonometrie

Kapitel 9: Vorbereitungen aus der sphärischen Geometrie

Kapitel 10: Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie

Kapitel 11: Die logarithmierbaren Formeln des sphärischen Dreiecks

Kapitel 12: Lösung der Grundaufgaben für das sphärische Dreieck

Kapitel 13: Das rechtwinklige und das rechtseitige Dreieck

Kapitel 14: Weitere Beziehungen und Sätze für das allgemeine sphärische Dreieck

Kapitel 15: Stereometrische Anwendungen, weitere sphärische Aufgaben

Teil III: Trigonometrische Lösung von Aufgaben der mathematischen Geographie, Geodäsie und sphärischen Astronomie

Kapitel 16: Grundaufgaben der mathematischen Geographie

Kapitel 17: Einige kartographische Netzentwürfe

Kapitel 18: Geodätische Aufgaben

Kapitel 19: Grundbegriffe der sphärischen Astronomie

gegebenen —, *sind die Verhältnisse zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks transzendent;* während die klassische Geometrie mit algebraischen Funktionen operiert, arbeitet die Trigonometrie mit *transzendenten Funktionen*, den *trigonometrischen Funktionen.*

2. Bedeutung und Einordnung der Trigonometrie

Innerhalb der Mathematik läßt sich die Trigonometrie je nach Aufbau, Definition und Auffassung auf mehrere Arten einreihen. So kann sie als eine Erweiterung der Planimetrie und Stereometrie betrachtet werden, weil durch sie überall beliebige Winkel in die Berechnungen eingeführt werden können. Weiter spielen die trigonometrischen Funktionen als elementare transzendente Funktionen in der Analysis eine bedeutende Rolle.

Wichtig ist die Trigonometrie für alle Gebiete der angewandten Mathematik, so auch für die *Geodäsie*, insbesondere die *sphärische Astronomie:* In beiden Disziplinen werden beobachtete Winkel in die Berechnungen eingeführt. — Für Gebiete relativ kleiner Ausdehnung kann die Erdoberfläche als Ebene angesehen werden; in der *niederen Geodäsie* oder *Vermessungskunde*, die sich mit der Lage- und Höhenaufnahme kleiner Gebiete beschäftigt, können also die Methoden der ebenen Trigonometrie verwendet werden. Aber schon für Dreiecke mit zwanzig oder mehr Kilometer Länge ist der Einfluß der Erdkrümmung zu berücksichtigen. Die *Landesvermessung* und *Erdmessung* bedarf also einer Geometrie auf der Kugel, und diese bedient sich zur rechnerischen Lösung von Aufgaben, z. B. bei der Berechnung eines Kugeldreieckes, der sphärischen Trigonometrie. Ein großer Teil der *sphärischen Astronomie* — im besonderen die *mathematische Geographie und die geodätische Astronomie* — ist fast nichts anderes als sphärische Trigonometrie[4].

Nicht zuletzt sind die *Geometrie der Kugel* und die *sphärische Trigonometrie* auch von rein mathematischem Interesse: Handelt es sich doch um die Geometrie auf einer speziellen krummen Fläche, also um eine *nicht-ebene Geometrie.*

[4] Auch verschiedene Aufgaben der Mineralogie erfordern die Beziehungen der sphärischen Trigonometrie.

Vorwort

Die Trigonometrie ist nicht nur eine der ältesten, sondern auch eine der wichtigsten Disziplinen der Mathematik. Lange Zeit verstand man darunter die Lehre von den Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks, also eine Dreiecksmessung im engeren Sinn. Heute ist der Begriff der Trigonometrie weit umfassender: Man rechnet der Trigonometrie außerdem alle funktionalen Zusammenhänge von Winkeln, Strecken und Flächen zu, und das führt zur Berechnung ebener und räumlicher Gebilde im mathematischen Sinne. Zur Trigonometrie gehören also auch die Kreis- und Hyperbelfunktionen, ihre Reihenentwicklungen und ihre Zwischenfunktionen, dann die Integrale trigonometrischer Funktionen, FOURIER-Reihen und vieles andere.

Trotzdem ist die Trigonometrie mehr und mehr zu einer Hilfsdisziplin für nahezu alle mathematischen Disziplinen, außerdem für nahezu alle Anwendungsgebiete der Mathematik geworden; denn die Grundtatsachen der Trigonometrie gelten als elementar und werden bereits im Schulunterricht behandelt. Die darüber hinaus notwendigen Ergänzungen, insbesondere die sphärische Trigonometrie und deren Anwendungen in Geodäsie, Astronomie usw., kommen dagegen weder in den Hochschulvorlesungen über Mathematik noch in den zahlreichen Lehrbüchern genügend zu ihrem Recht, was sich in den einschlägigen Fachvorlesungen störend bemerkbar macht.

Hinzu kommt, daß weder die neuere, außerordentlich umfangreiche deutschsprachige mathematische noch die geodätische Fachliteratur genügend gestufte Trigonometrie-Lehrbücher aufweist: Seit der Fertigstellung der 5. Auflage von E. v. HAMMERS Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie im Jahre 1923 wurde bei uns kein Versuch mehr unternommen, die Trigonometrie und ihre Anwendungen in Geodäsie und Astronomie geschlossen und möglichst vollständig darzustellen. Das vorliegende Buch hat eine solche geschlossene Darstellung zum Ziel.

Der erwähnten Fülle des Stoffes entsprechend ist dennoch eine gewisse Themenauswahl und Beschränkung geboten. So beschäftigt sich der Teil I, die ebene Trigonometrie, mit den grundlegenden Eigenschaften der Kreisfunktionen und deren Auftreten und Anwendungen in Geometrie und Algebra. Ausführlich dargestellt sind die Aufgabe der Dreiecksberechnung, die Trigonometrie des Vierecks und die Lösung goniometrischer Gleichungen. Dagegen sind die Zusammenhänge zwischen

Exponential-, Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie die unendlichen Reihen dieser Funktionen nur umrissen. Der Teil II, die sphärische Trigonometrie, enthält die wichtigsten Gesetze der Kugeldreiecke und deren Anwendung auf Dreiecks- und Körperberechnungen. Im Teil III schließlich wurde versucht, durch Aufgaben und Beispiele aus der mathematischen Geographie, der Geodäsie, der Kartenentwurfslehre und der sphärischen Astronomie die mannigfaltigen Anwendungsmöglichkeiten der Trigonometrie aufzuzeigen. In gleicher Weise wie die Theorie — mit Recht sagt H. DÖRRIE[1], daß Trigonometrie keine trockene Zusammenstellung von Formeln bedeutet, daß sie vielmehr einen Zweig der mathematischen Wissenschaften bildet, welcher an Fülle der Ideen, an Farbenpracht und ästhetischer Wirkung den reinen Geometrien in nichts nachsteht — sollte in diesem Buche die praktisch-rechnerische Seite der Trigonometrie behandelt werden. Obgleich die logarithmische Rechnung in der Praxis durch moderne Tischrechengeräte und programmgesteuerte Rechenanlagen an Bedeutung verloren hat, sind an vielen Stellen Hinweise auf die logarithmisch-trigonometrische Rechnung aufgenommen.

Dieses Buch ist aus Niederschriften und Notizen für eine Vorlesung über Trigonometrie entstanden, die ich seit vier Jahren regelmäßig an der Technischen Hochschule München abhalte. Dabei ist in erster Linie an die Studierenden der Geodäsie gedacht, bei denen die Trigonometrie, die für die Behandlung der sphärischen Astronomie, Geodäsie und Kartographie unerläßlich ist, im Unterricht der höheren Schule zu kurz gekommen war.

Als Leser des Buches denke ich mir aber nicht nur Geodäsie-Studenten der unteren, sondern auch der höheren Semester, insbesondere aber die zukünftigen Lehrer der Mathematik, die diesen im üblichen Studiengang wenig berücksichtigten Stoff später im Schulunterricht zu vertreten haben. Insbesondere die Anwendungen der Trigonometrie dürften nicht nur Geodäten und Mathematiker, sondern auch Naturwissenschaftler, z. B. die Geographen, interessieren. Auch den Studierenden an Ingenieur-Akademien dürfte das Buch gute Dienste leisten.

Endlich geht mein stiller Wunsch noch weiter: Ich bin der Meinung, daß das Verständnis der sich am Himmel ständig wiederholenden Vorgänge und die Kenntnis der Verfahren der astronomischen Orts- und Zeitbestimmung sowie der mathematischen und geodätischen Grundlagen unserer Kartenwerke zur allgemeinen Bildung gehören. Die Ableitungen sind daher im allgemeinen so elementar gehalten, daß sich das Buch auch zum Selbststudium eignen sollte.

---

[1] Vgl. H. DÖRRIE: Ebene und sphärische Trigonometrie. Oldenbourg Verlag, München 1950.

Herr Dipl.-Math. Dr. rer. nat. G. Kirschmer hat das Manuskript gelesen und mich mit vielen Ratschlägen unterstützt. Das gleiche gilt von Herrn Dipl.-Ing. C. Reigber. Die Reinzeichnungen der Abbildungen zu den Teilen II und III besorgte Herr cand.-geod. A. Grün, die Reinschrift des Manuskriptes Frau A. Popp. Bei der mühevollen Arbeit des Korrekturlesens haben mir Herr Dr. G. Kirschmer und von meinen Mitarbeitern insbesondere die Herren Dr. rer. nat. M. Schneider und Dipl.-Ing. C. Reigber geholfen. Ihnen allen spreche ich meinen herzlichen Dank aus für ihre Hilfe, ebenso dem Verlag, der meine Wünsche bei der Herausgabe des Buches bereitwillig erfüllte.

München, August 1966 Der Verfasser

Hinweise für den Leser

Die Abschnitte des Buches, das drei Teile umfaßt, sind fortlaufend von 1 bis 113 numeriert. Hinweise auf Abschnitte erfolgen durch Zahlen in eckigen Klammern, z. B. [48].

Formeln sind abschnittsweise numeriert und durch Doppelzahlen in Rundklammern gekennzeichnet. (38.4) bedeutet die vierte Formel in Abschnitt 38. Ebenso wie die Formeln sind die Abbildungen abschnittsweise numeriert und mit Doppelzahlen bezeichnet, z. B. Abb. 52.1.

In Kleindruck gesetzte Textstellen stellen Ergänzungen und Vertiefungen für den interessierten Leser dar, die überschlagen werden können, ohne daß das Verständnis des Folgenden beeinträchtigt wird.

Einführung

1. Aufgabe und Wesen der Trigonometrie

Deutlich erkennbar wird das Wesen der Trigonometrie an dem folgenden Zusammenhang: Nach den *Kongruenzsätzen der Planimetrie* ist ein ebenes Dreieck nach Gestalt und Größe durch seine drei Seiten vollständig und eindeutig bestimmt. Die übrigen *Stücke des Dreiecks*, die Winkel, Höhen, Winkel- und Seitenhalbierenden, ferner sein Inhalt und die Um-, In- und Ankreisradien können also alle als Funktionen der Seiten aufgefaßt werden. Die Berechnung der Winkel, Höhen oder der Fläche aus den Seiten erfordert also, erst den zugehörigen funktionalen Zusammenhang aufzudecken, sodann nach der gefundenen Vorschrift aus den gegebenen Größen oder Argumenten den gesuchten Funktionswert zu ermitteln[2]. Bei solchen *geometrisch definierten Funktionen* bietet sich zunächst eine konstruktiv-zeichnerische, also *graphische Lösung* an: Aus den gegebenen Argumenten — im Sinne der Planimetrie die zur Bestimmung einer Figur notwendigen und hinreichenden Stücke, z. B. die drei Seiten eines ebenen Dreiecks — konstruiert man diese Figur durch Zeichnung und entnimmt mit einem Maßstab die gesuchten Funktionswerte, das heißt die Größen der durch die gegebenen Stücke mitbestimmten Elemente (also Winkel, Höhen etc.). Selbst bei großmaßstäblichen Zeichnungen wird aber diese graphische Lösung wegen der in der Natur der Zeichenmittel liegenden Ungenauigkeit nur genäherte Resultate liefern, die zwar oftmals für praktische Bedürfnisse, aber nie für höhere Genauigkeitsansprüche genügen. Es besteht also das Bedürfnis, auch für geometrisch definierte Funktionen die zu vorgegebenen Argumenten gehörenden Funktionswerte durch Rechnung zu bestimmen, und zwar mit jeder gewünschten Genauigkeit. Die vollständige Lösung dieses Problems ist nun die eigentliche Aufgabe der Trigonometrie. Zwar ist auch der Planimetrie und Stereometrie die Rechnung nach exakten formelmäßigen Zusam-

---

[2] Hängt der Wert einer Größe u von den Werten anderer Größen x, y, z ab, so nennt man u eine *Funktion* der Argumente x, y, z und schreibt dafür $u = f(x, y, z)$.

menhängen nicht fremd; für die *Stücke eines ebenen Dreiecks* gelten z. B. die bekannten Formeln

$$F = \sqrt{s s_a s_b s_c} = \frac{abc}{4r} = \varrho s = \varrho_a s_a = \varrho_b s_b = \varrho_c s_c$$

$$= \frac{a h_a}{2} = \frac{b h_b}{2} = \frac{c h_c}{2} \tag{1.1}$$

und

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp c b_c, \quad b^2 = c^2 + a^2 \mp a c_a, \quad c^2 = a^2 + b^2 \mp b a_b, \tag{1.2}$$

wobei

F	die Fläche
a, b, c	die Seiten,
h_a, h_b, h_c	die zugehörigen Höhen,
$r, \varrho, \varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$	die Radien für Um-, In- und Ankreise, (1.3)
s, s_a, s_b, s_c	die Abkürzungen für die Größen,

$$s = \frac{a+b+c}{2}, \quad s_a = s-a, \quad s_b = s-b, \quad s_c = s-c,$$

und schließlich b_c die Projektion von b auf c, c_a die von c auf a usf. bedeuten.

Abgesehen von der Eigenschaft der festen Summe $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ der Winkel im ebenen Dreieck, wonach jeder Dreieckswinkel als Funktion der beiden anderen ausgedrückt werden kann, nämlich als das Supplement ihrer Summe, etwa $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, bieten die Formeln der Geometrie im allgemeinen keinen Ansatz zur Bestimmung der Dreieckswinkel α, β, γ. Ausgenommen sind spezielle Dreiecke, wie z. B. das gleichseitige oder rechtwinklige. Ist $a = b = c$, so ist $\alpha = \beta = \gamma$, das heißt, im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich 60°.

Wird $a^2+b^2 = c^2$, so liegt ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$ vor; über die beiden spitzen Winkel α und β ist aber, außer daß $\alpha+\beta = 90°$ ist, keine weitergehende Aussage möglich. Hier setzt die Trigonometrie ein.

Das eigentliche W e s e n d e r T r i g o n o m e t r i e endlich wird erst deutlich durch ihre Z u o r d n u n g z u r G e o m e t r i e. Während die in (1.1) und (1.2) dargestellten Beziehungen *algebraische Gleichungen* sind — die gesuchten Stücke sind algebraische Funktionen[3] der

---

[3] *Algebraische Funktionen* sind die Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Wurzeln gegebener Argumente und alle Verknüpfungen solcher Operationen.

gegebenen —, *sind die Verhältnisse zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks transzendent;* während die klassische Geometrie mit algebraischen Funktionen operiert, arbeitet die Trigonometrie mit *transzendenten Funktionen*, den *trigonometrischen Funktionen.*

2. Bedeutung und Einordnung der Trigonometrie

Innerhalb der Mathematik läßt sich die Trigonometrie je nach Aufbau, Definition und Auffassung auf mehrere Arten einreihen. So kann sie als eine Erweiterung der Planimetrie und Stereometrie betrachtet werden, weil durch sie überall beliebige Winkel in die Berechnungen eingeführt werden können. Weiter spielen die trigonometrischen Funktionen als elementare transzendente Funktionen in der Analysis eine bedeutende Rolle.

Wichtig ist die Trigonometrie für alle Gebiete der angewandten Mathematik, so auch für die *Geodäsie*, insbesondere die *sphärische Astronomie:* In beiden Disziplinen werden beobachtete Winkel in die Berechnungen eingeführt. — Für Gebiete relativ kleiner Ausdehnung kann die Erdoberfläche als Ebene angesehen werden; in der *niederen Geodäsie* oder *Vermessungskunde*, die sich mit der Lage- und Höhenaufnahme kleiner Gebiete beschäftigt, können also die Methoden der ebenen Trigonometrie verwendet werden. Aber schon für Dreiecke mit zwanzig oder mehr Kilometer Länge ist der Einfluß der Erdkrümmung zu berücksichtigen. Die *Landesvermessung* und *Erdmessung* bedarf also einer Geometrie auf der Kugel, und diese bedient sich zur rechnerischen Lösung von Aufgaben, z. B. bei der Berechnung eines Kugeldreieckes, der sphärischen Trigonometrie. Ein großer Teil der *sphärischen Astronomie* — im besonderen die *mathematische Geographie und die geodätische Astronomie* — ist fast nichts anderes als sphärische Trigonometrie[4].

Nicht zuletzt sind die *Geometrie der Kugel* und die *sphärische Trigonometrie* auch von rein mathematischem Interesse: Handelt es sich doch um die Geometrie auf einer speziellen krummen Fläche, also um eine *nicht-ebene Geometrie.*

[4] Auch verschiedene Aufgaben der Mineralogie erfordern die Beziehungen der sphärischen Trigonometrie.

3. Einige historische Bemerkungen[5]

Ursprung und Herkunft der Trigonometrie sind weitgehend unbekannt. Vermutungen weisen nach Babylonien, dem ältesten Kulturland des Orients. Sicher ist, daß die Babylonier die heute noch übliche *Sexagesimalteilung des Kreises* einführten.

Kennzeichnend für die Trigonometrie des Altertums war, daß sie ausschließlich als Hilfsmittel der praktischen Astronomie gefördert und benützt wurde. — Selbst bei den Griechen war die Trigonometrie nur Grundlage und Hilfsmittel der Astronomie, während die Geometrie als reine Wissenschaft besondere Förderung erfuhr. Zwar hat HIPPARCH (um 150 v. Chr.) die erste *trigonometrische Funktionstafel* (Sehnentafel) erstellt und MENELAOS (um 100 n. Chr.) erstmals eine gewissermaßen selbständige sphärische Trigonometrie begründet; das fundamentale astronomische Werk des PTOLEMÄUS (85–165 n. Chr.), später von den Arabern als Almagest bezeichnet, zeigt aber, daß die trigonometrischen Lehrsätze dieser Zeit völlig im Dienste der Astronomie standen: So kannte man zwar die Berechnung recht- und schiefwinkliger sphärischer Dreiecke, dagegen war die Auflösung ebener Dreiecke nur angedeutet.

Für die Astronomie war die Lehre des PTOLEMÄUS für mehr als 1200 Jahre die unerschütterliche Grundlage. Dagegen hat die Trigonometrie in dieser Epoche erstaunliche Fortschritte aufzuweisen: An die Stelle der *Sehnenfunktion* trat der *Sinus*, eine indische Erfindung. Bei den arabischen Mathematikern, die nach dem Niedergang der griechischen und römischen Kulturen die Pflege der griechischen Wissenschaften übernahmen, taucht gegen Ende des 9. Jahrhunderts erstmals der *Seitenkosinussatz* der sphärischen Trigonometrie — freilich in umständlicher Form — auf, und zu Anfang des 10. Jahrhunderts werden erstmals *Tangens-Funktionstafeln* berechnet und benützt. Das Verdienst, die Trigonometrie als einigermaßen vollständiges Lehrgebäude neben die klassische Geometrie gestellt zu haben, kommt für den Orient dem Perser NASSÎV EDDIN TÛSI (1201–1274) zu.

Im christlichen Abendland besorgte der Franke REGIOMONTANUS (JOHANNES MÜLLER, 1436–1476) als erster eine Sammlung der damals bekannten trigonometrischen Sätze und bearbeitete, angeregt durch seinen

[5] Für eine eingehende Information ist auf die einschlägige Literatur zu verweisen. Vgl. z. B. E. HAMMER: Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, 5. Aufl., J. B. Metzler'sche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1923; die geschichtliche Skizze auf S. 4 f. enthält wertvolle Quellenangaben und viele Literaturhinweise. — Neben den zahlreich vorhandenen Werken zur Geschichte der Mathematik ist besonders auf A. v. BRAUNMÜHL: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, erster Teil Leipzig 1900, zweiter Teil Leipzig 1903, hinzuweisen.

Lehrer Georg von Peurbach (oder Purbach, 1423–1461) ein Lehrbuch der Trigonometrie, das erstmals eine vollständige Behandlung des ebenen Dreiecks enthielt[6]. Weiter hatte Regiomontanus, aufbauend auf der Sinustafel von Peurbach, eine Sinustafel mit einem Intervall von 1 Minute berechnet[7].

Lagen die exakten Wissenschaften im Abendland Jahrhunderte hindurch völlig darnieder, so war durch das Werk Regiomontanus', das etwa ein halbes Jahrhundert nach seinem Tode gedruckt werden konnte, eine neue Epoche eingeleitet worden.

Das 16. Jahrhundert ist für die Trigonometrie durch die Berechnung trigonometrischer Tafeln gekennzeichnet: 1596 erschien das Werk „Opus Palatinum de triangulis", das für den ersten Quadranten alle trigonometrischen Funktionen von 10″ zu 10″, für den ersten Grad von 1″ zu 1″ enthält, und zwar für einen Kreishalbmesser von 10 000 000 000 Einheiten. Die dafür aufgewendete Rechenarbeit, begonnen von dem Kopernikus-Schüler G. Joachim Rhaeticus (1514–1576), beendet von dessen Schüler Valentinus Otho (1550–1605), ist heute kaum noch vorstellbar: Standen doch weder *Reihenentwicklungen noch Logarithmen oder Interpolationsverfahren* zur Verfügung[8]. Noch genauer ist der von Bartholomaeus Pitiscus (1561–1613) berechnete „Thesaurus mathematicus", der für die ersten sechs Grade 25-stellige Funktionswerte enthält[9]. Rhaeticus und Pitiscus haben auch sehr übersichtliche Darstellungen der Trigonometrie gegeben[10].

Eine entscheidende Aufwärtsentwicklung nahm die Trigonometrie um die Wende zum 17. Jahrhundert. So benützte Thomas Fink (1561–1656) in seiner 1583 erschienenen „Geometria rotundi" erstmals die Namen *Tangens* und *Sekans* und gab die heute als Nepersche Analogien bekannten Formeln des ebenen Dreieckes an. Weiter sind der Franzose Fr. Vieta (1540–1603) und der Holländer Simon Stevin (1548–1620) zu erwähnen, deren Arbeiten wesentlich zur Vereinfachung der trigono-

---

[6] Die erste Übersetzung einer Abschrift des Almagest aus dem Arabischen ins Lateinische besorgte der Italiener Gherardo (1114-1187); Peurbach hat das griechische Original des Ptolemäischen Werkes kommentiert.

[7] Die Tafel war für einen Kreishalbmesser von $R = 600\,000$ Einheiten berechnet, entspricht also in der Genauigkeit etwa einer fünfstelligen Tafel der numerischen Werte.

[8] Die unendlichen Reihen der Kreisfunktionen und die elektronischen Rechenautomaten gestatten heute, Tafeln der Kreisfunktionen und ihrer Logarithmen mit beliebiger Genauigkeit vollautomatisch zu berechnen.

[9] Der Thesaurus mathematicus erschien 1897, von Jordan herausgegeben, in Neuauflage (7stellig mit 10-Sekunden-Tafelintervallen).

[10] Rhaeticus hat 1542 auch eine Bearbeitung der Trigonometrie von Kopernikus (1473-1543) herausgegeben. – Die insgesamt 15 Bücher umfassende Trigonometrie mit Anwendungen auf Geodäsie, Höhenmessung, Geographie, Gnomonik und Astronomie ist im Jahre 1600 in Augsburg erschienen.

metrischen Rechnung beitrugen. Einen entscheidenden Fortschritt brachte die Erfindung der Logarithmen durch den Schotten NEPER (Lord JOHN NAPIER OF MERCHISTON, 1550–1617) und unabhängig davon durch den Schweizer JOOST BÜRGI (1552–1632). 1614 erschien in England die erste Tafel der Zahlenlogarithmen. Der Engländer H. BRIGGS (1556–1630) verbesserte die Logarithmen durch Einführung der Grundzahl 10, und schon kurze Zeit später führte EDM. GUNTER (1581–1626) in seinem Canon Triangulorium erstmals auch die *Logarithmen der trigonometrischen Funktionen* an. Was die Einführung der Logarithmen für das trigonometrische Rechnen der damaligen Zeit bedeutete, läßt sich heute kaum noch ermessen[11].

Als Begründer der modernen Trigonometrie gilt mit Recht der Schweizer LEONHARD EULER (1707–1783). Er hat nicht nur die schwerfällige trigonometrische Schreibweise des 17. Jahrhunderts grundlegend verbessert, sondern auch die *Goniometrie* auf eine völlig neue Grundlage gestellt, wodurch der trigonometrische Formelapparat wesentlich vereinfacht werden konnte. Hervorzuheben sind EULERs Beiträge zur sphärischen Trigonometrie[12] [13].

War die Trigonometrie durch EULER auch völlig umgestaltet worden, so blieb doch noch vieles weiterzuführen und zu vollenden. An weiteren Beiträgen des 18. Jahrhunderts sind besonders zu nennen: Die Arbeiten zur Trigonometrie des Vierecks von J. H. LAMBERT (1728–1777), die Sätze von A. J. LEXELL (1740–1784), die Formeln und Sätze von S. A. J. L'HUILIER (1750–1840), J. L. LAGRANGE (1736–1813), J. B. J. DELAMBRE (1749–1822), um nur die wichtigsten zu nennen.

Die Trigonometrie des 19. Jahrhunderts ist durch die Arbeiten von C. F. GAUSS (1777–1855), F. W. BESSEL (1784–1846) und A. F. MÖBIUS (1790–1868) gekennzeichnet. GAUSS hat die Beziehungen zwischen Trigonometrie und Algebra aufgezeigt, den EULERschen Begriff des sphärischen Dreiecks erweitert und darüber hinaus ebenso wie BESSEL die trigonometrische Rechnungsweise entscheidend beeinflußt. Der tiefere Grund für die Verfeinerung der Rechentechnik lag darin, daß neben die *Astronomie* eine zweite messende Wis-

[11] Merkwürdig, aber sicher nicht zufällig, ist das zeitliche Zusammentreffen der Erfindung der Logarithmen und der Einführung der Triangulierung durch W. SNELLIUS (1581-1626).

[12] Die beiden fundamentalen Abhandlungen zur sphärischen Trigonometrie, Principes de la Trigonométrie Sphérique (1753) und Trigonometria sphaerica universa (1779), hat E. HAMMER in Bd. 73 der Sammlung: Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften (Leipzig 1896) herausgegeben.

[13] Nicht unerwähnt dürfen in diesem Zusammenhang Männer wie GREGORY (1638-1675), LEIBNIZ (1646-1716), NEWTON (1643-1727), BERNOULLI (1667-1748) und MOIVRE (1667-1754) bleiben, auf deren Arbeiten EULER zum Teil aufbaute.

senschaft, die *Geodäsie*, getreten war, die ebenso wie die Astronomie an möglichst genauen Rechenverfahren interessiert war. — Die von GAUSS eingeleitete *Erweiterung des* EULER*schen Dreiecksbegriffes* ist später von MÖBIUS und im Sinne der modernen *Gruppentheorie* von EDUARD STUDY (1862–1930) fortgeführt worden.

Das 20. Jahrhundert hat zur sphärischen Trigonometrie nur wenig beigetragen. Vielmehr sind Ansätze zu erkennen, „die für das Gedächtnis gerade nicht besonders angenehmen Formeln der sphärischen Trigonometrie" zu streichen und statt dessen, insbesondere für die Anwendung in der Astronomie, die *analytische Geometrie* oder die *Vektoralgebra* zu Hilfe zu nehmen.[14] Z. B. hat J. LENSE vorgeschlagen, für astronomische Zwecke die Formeln direkt mit Hilfe der analytischen Geometrie aufzustellen, weil die Anwendung der für EULERsche Dreiecke gültigen Grundformeln in der Astronomie, wo auch Winkel und Seiten über 180° auftreten, noch einiger Ergänzungen bedürfe. P. KUSTAANHEIMO verwendet für die Lösung von Aufgaben der sphärischen Astronomie *skalare und vektorielle Produkte von Einheitsvektoren* zu ausgezeichneten Punkten der Himmelskugel. Der Vorteil dieser Methode liegt nach KUSTAANHEIMO darin begründet, daß man dabei im Gegensatz zur „klassischen Methode" auch schiefwinklige kartesische Koordinaten verwenden kann.

[14] J. LENSE: Die sphärische Trigonometrie in der sphärischen Astronomie. Astronomische Nachrichten Bd. *271*, H. 3.
P. KUSTAANHEIMO: On Vector Methods in Spherical Astronomy, Societas Scientiarium Fennica, Commentationes Physico-Mathematicae XXIV, 4, 1959 und XXIV, 7, 1960 (Helsinki).

Also wird $s_n = R$ chord α_n, woraus durch Vergleich mit (5.4) folgt

$$\text{chord}\, \alpha_n = 2 \sin \frac{\alpha_n}{2}\,; \tag{5.5b}$$

die *Funktion chord* kann also durch den Sinus ausgedrückt werden. Allgemein gilt

$$\text{chord}\, \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2}\,. \tag{5.6a}$$

Halbiert man in einer chord-Tafel[19] die Argumente und Funktionswerte, so erhält man eine Sinus-Tafel:

$$\frac{\text{chord}\, \gamma}{2} = \sin \frac{\gamma}{2}\,. \tag{5.6b}$$

Schließlich ist noch der Umfang u_n des dem Kreis vom Radius R eingeschriebenen regulären n-Eckes anzugeben:

$$u_n = n s_n = 2nR \sin \frac{\alpha_n}{2}\,. \tag{5.7a}$$

Für die Seite S_n bzw. den Umfang U_n des dem Kreis vom Radius R umbeschriebenen n-Eckes folgt aus Abb. 5.3 noch

$$S_n = 2R \tan \frac{\alpha_n}{2}\,, \qquad U_n = 2nR \tan \frac{\alpha_n}{2}\,, \tag{5.7b}$$

woraus sich für den Einheitskreis mit $R = 1$ die Formeln

$$u_n = 2n \sin \frac{360^\circ}{2n}\,, \qquad U_n = 2n \tan \frac{360^\circ}{2n} \tag{5.7c}$$

ergeben.

6. Beziehungen der Winkelfunktionen untereinander

Durch die Verhältnisse a/c und b/c dreier Größen a, b, c sind nach den allgemeinen Divisionssätzen weitere Verhältnisse bestimmt, nämlich

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}}\,, \quad \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}}\,, \quad \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}\,, \quad \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\frac{a}{b}}\,.$$

[19] Die *Funktion chord* ist die älteste bekannte trigonometrische Funktion; bereits die alexandrinischen Mathematiker des Altertums besaßen chord-Tafeln.

Teil I: Ebene Trigonometrie

Kapitel 1: Das rechtwinklige Dreieck

4. Die trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel

Die Seitenverhältnisse a/b, a/c, b/c usf. des bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC sind Funktionen des spitzen Winkels β und allein durch dessen Größe vollständig bestimmt (Abb. 4.1).

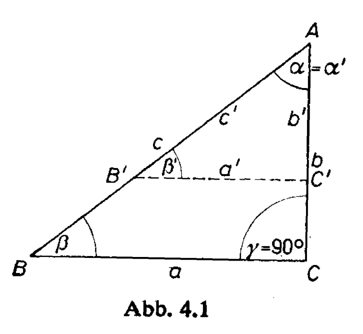


Abb. 4.1

In dem zweiten, bei C' rechtwinkligen Dreieck $AB'C'$ ist nämlich $\alpha' = \alpha$, also auch $\beta' = \beta$, nämlich gleich dem Komplement $90°-\alpha$ von α, d. h., die beiden Dreiecke sind einander ähnlich, so daß gilt $a/b = a'/b'$, $a/c = a'/c'$, $b/c = b'/c'$ usw. *Diese Seitenverhältnisse nennt man die trigonometrischen oder goniometrischen Funktionen des Winkels* α. Der Übersicht halber ordnet man sie in drei Gruppen, je nachdem die Gegenkathete a, die Ankathete b des Winkels α oder die Hypotenuse c im Zähler steht:

a) *Sinus und Tangens*

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}},$$

b) *Kosinus und Kotangens*

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}, \qquad (4.1)$$

c) *Sekans und Kosekans*

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkathete}}.$$

Außer diesen sechs Funktionen — Sekans und Kosekans werden seltener benützt — findet man mitunter noch

$$\begin{aligned} &\text{sin versus}\,\alpha &&= \text{vers}\,\alpha &&= 1-\cos\alpha, \\ &\text{cos versus}\,\alpha &&= \text{covers}\,\alpha &&= 1-\sin\alpha, \\ &\text{sec externus}\,\alpha &&= \text{exsec}\,\alpha &&= \sec\alpha - 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Für den zweiten spitzen Winkel β des Dreiecks ABC ist a die Ankathete und b die Gegenkathete; also gilt nach (4.1)

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{b}{c} = \cos\alpha, & \tan\beta &= \frac{b}{a} = \cot\alpha, \\ \cos\beta &= \frac{a}{c} = \sin\alpha, & \cot\beta &= \frac{a}{b} = \tan\alpha, \\ \sec\beta &= \frac{c}{a} = \operatorname{cosec}\alpha, & \operatorname{cosec}\beta &= \frac{c}{b} = \sec\alpha. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Aus dem Vergleich von (4.1) und (4.3) folgen die *Komplementsätze*, weil ja $\beta = 90°-\alpha$ das Komplement von α ist:

$$\begin{aligned} \sin(90°-\alpha) &= \cos\alpha, & \tan(90°-\alpha) &= \cot\alpha, \\ \cos(90°-\alpha) &= \sin\alpha, & \cot(90°-\alpha) &= \tan\alpha, \\ \sec(90°-\alpha) &= \operatorname{cosec}\alpha, & \operatorname{cosec}(90°-\alpha) &= \sec\alpha. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Der Kosinus eines spitzen Winkels ist also gleich dem Sinus seines Komplements, der Kotangens gleich dem Tangens des Komplements usw. Damit lassen sich auch die Namen Kosinus, Kotangens und Kosekans erklären[15]: Sie sind die Abkürzungen für *complementi sinus*, *complementi tangens* und *complementi secans*.

Aus (4.3) und (4.4) lassen sich *weitere Beziehungen für die trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel* ablesen, so

$$\begin{aligned} \tan\alpha\cot\alpha &= 1, & \tan\alpha &= \frac{1}{\cot\alpha}, & \cot\alpha &= \frac{1}{\tan\alpha}, \\ \sin\alpha\operatorname{cosec}\alpha &= 1, & \sin\alpha &= \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}, & \operatorname{cosec}\alpha &= \frac{1}{\sin\alpha}, \\ \cos\alpha\sec\alpha &= 1, & \cos\alpha &= \frac{1}{\sec\alpha}, & \sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Eine weitere interessante Beziehung entsteht, wenn man aus den Definitionen (4.1) Quadrate bildet[16], zum Beispiel $\sin^2\alpha = a^2/c^2$, $\cos^2\alpha = b^2/c^2$; ihre Summe gibt $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = (a^2+b^2) : c^2$. Nun ist aber nach dem *Lehrsatz des* PYTHAGORAS $a^2+b^2 = c^2$, also wird

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1. \tag{4.6}$$

---

[15] Hinsichtlich der Namen Sinus, Tangens vgl. S. 38.

[16] Für $\sin\alpha\cdot\sin\alpha = (\sin\alpha)^2$ schreibt man $\sin^2\alpha$; entsprechend ist mit den anderen Funktionen zu verfahren.

Auf ähnliche Art lassen sich noch weitere Beziehungen aufstellen. Diese hier ist aber die wichtigste, denn sie tritt in der Trigonometrie selbst und in allen ihren Anwendungen immer wieder auf.

5. Berechnung rechtwinkliger Dreiecke, erste Anwendungen

Sind für einen der spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks die trigonometrischen Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens gegeben, so sind alle Seitenverhältnisse bekannt, und das Dreieck kann aufgelöst werden. Hier wird zunächst der Hinweis genügen, daß die trigonometrischen Funktionen und deren Logarithmen mit genügender Genauigkeit berechnet und in Tafeln niedergelegt wurden. Auf Besonderheiten bei der Berechnung trigonometrischer Tafeln ist in [19] zurückzukommen[17].

Ein *ebenes Dreieck* ist durch drei Stücke bestimmt, die aber nicht beliebig vorgegeben werden können, weil sie den *Kongruenzsätzen* entsprechen müssen. Da im rechtwinkligen Dreieck ein Winkel, der rechte, festgelegt ist, können nur noch zwei Stücke vorgegeben werden, und zwar in folgender Anordnung (vgl. Abb. 4.1):

1. Eine Kathete und der Gegenwinkel,
2. eine Kathete und der Anwinkel,
3. die Hypotenuse und ein Anwinkel,
4. die beiden Katheten,
5. die Hypotenuse und eine Kathete.

Von den Winkeln kann nur einer, α oder β, frei vorgegeben werden, weil wegen $\alpha+\beta = 90°$ der zweite festliegt. Die vollständigen Lösungen für alle fünf Aufgaben, das heißt die Formeln für die Berechnung der fehlenden Stücke, sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt.

Für die *praktische Rechnung* ist stets ein Schema zu empfehlen, das für Aufgabe 1 bei *logarithmischer Rechnung* etwa lauten könnte

$$\begin{array}{ll|l} a = \ldots\ldots & \lg a & \ldots \\ \alpha = \ldots\ldots & \lg\cot\alpha & \ldots \\ \hline \multicolumn{2}{l|}{\lg b = \lg a + \lg\cot\alpha} & \ldots \\ \multicolumn{2}{l}{\underline{b = \ldots}} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \lg a & \ldots \\ \text{cpl.}\lg\sin\alpha & \ldots \\ \hline \lg c = \lg a + \text{cpl.}\lg\sin\alpha & \\ \underline{c = \ldots} & \end{array}$$

---

[17] Zunächst ist die sichere Anwendung und Handhabung der trigonometrischen Tafeln wichtiger als die Kenntnis ihrer Herstellung. Einzelheiten hinsichtlich Einrichtung und Benützung können den meist ausführlich gehaltenen Gebrauchsanleitungen der Tafeln entnommen werden. Vgl. die auf S. 83/84 aufgeführten Tafelwerke.

Tabelle 5.1

Aufgabe	gegeben	gesucht	Lösungsformel [vgl. (4.1) und (4.3)]
1	a, α	b, c	$b = a \cot\alpha;\quad c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$
	b, β	a, c	$a = b \cot\beta;\quad c = \dfrac{b}{\sin\beta}$
2	b, α	a, c	$a = b \tan\alpha;\quad c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$
	a, β	b, c	$b = a \tan\beta;\quad c = \dfrac{a}{\cos\beta}$
3	c, α	a, b	$a = c \sin\alpha;\quad b = c \cos\alpha$
	c, β	a, b	$a = c \cos\beta;\quad b = c \sin\beta$
4	a, b	α, c	$\tan\alpha = \dfrac{a}{b},\quad c = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\cos\alpha}$
5	c, a	α, b	$\sin\alpha = \dfrac{a}{c},\quad b = a \cot\alpha$
	c, b	α, a	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c},\quad a = c \sin\alpha$

wobei cpl. $\lg \sin\alpha = \lg \dfrac{1}{\sin\alpha}$, also die *dekadische Ergänzung* von $\lg \sin\alpha$ darstellt. Bei Aufgabe 4 ist die Hypotenuse aus Gründen der bequemeren und schärferen Rechnung stets aus der größeren Kathete zu bestimmen (LALAND*sche Regel*). Sind, wie in den Aufgaben 4 und 5, zwei Seiten gegeben, so kann die dritte auch nach dem Satz von PYTHAGORAS berechnet werden, wenn eine ausreichend genaue Tabelle der Quadratzahlen verfügbar ist. Bei logarithmischer Rechnung sind jedoch die Formeln in Tabelle 5.1 vorzuziehen.

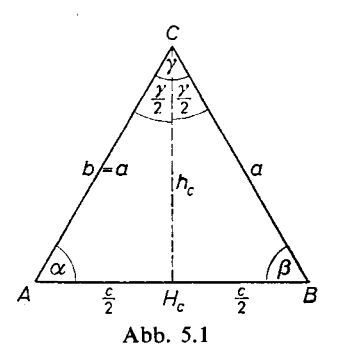


Abb. 5.1

Hierzu einige Beispiele und Anwendungen:

1. Das *gleichschenklige Dreieck ABC* (Abb. 5.1) wird durch die Höhe h_c in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke ACH_c, BCH_c, je mit dem rechten Winkel bei H_c, zerlegt; in den beiden rechtwinkligen Dreiecken gilt $\sin(\gamma/2) = \cos\alpha = c/2a$ oder

$$c = 2a \sin\frac{\gamma}{2}. \tag{5.1}$$

2. Die *Beziehungen am Rechteck ORPQ* (Abb. 5.2) liefern die *Grundformeln der ebenen Koordinatenberechnung aus Winkeln und Strecken,* die z. B. in der Vermessungskunde, insbesondere bei der Berechnung von Dreiecksnetzen und Polygonzügen, von Bedeutung sind. Die Diagonale $\overline{OP} = s$ zerlegt das Viereck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Wählt man die Ecke O als Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems derart, daß $\overline{OR}$ die Abszissenachse, $\overline{OQ}$ die Ordinatenachse wird, so können R und Q als die Projektionen von P auf die beiden Achsen, $\overline{OR} = \overline{QP} = x$ und $\overline{OQ} = \overline{RP} = y$ als die rechtwinkligen Koordinaten[18] von P aufgefaßt werden. Bildet die Diagonale $\overline{OP}$ mit der x-Achse den Winkel φ, so gilt offenbar

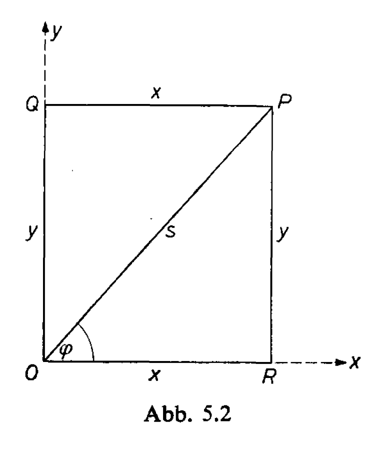


Abb. 5.2

$$x = s\cos\varphi, \quad y = s\sin\varphi,$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x}, \quad s = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{5.2}$$

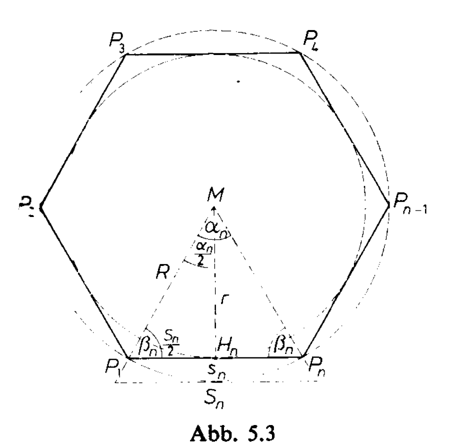


Abb. 5.3

3. Mit den Formeln für die rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecke lassen sich auch die *regelmäßigen Vielecke* berechnen, worunter man ebene n-Ecke mit lauter gleich langen Seiten und gleichen Winkeln zwischen den Seiten versteht. Ist $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ ein solches regelmäßiges n-Eck mit den Seiten s_n

[18] Größen, die der Lagebestimmung dienen, werden nach René Descartes (1596–1650) als *kartesische Koordinaten* bezeichnet; x ist die Abszisse, y die Ordinate. – In Geodäsie und Geophysik werden die rechtwinkligen Koordinaten vielfach so benützt, daß die x-Achse nach Norden, die y-Achse nach Osten zeigt.

(Abb. 5.3), so bilden P_1, P_n und der Mittelpunkt M für Um- und Inkreis ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel α_n bei M gegeben ist durch

$$\alpha_n = \frac{360^\circ}{n} = 2\frac{180^\circ}{n}. \tag{5.3a}$$

Nun ist $\alpha_n + \beta_n + \beta_n = 180^\circ$, also gilt für die äußeren Winkel $2\beta_n = 180^\circ - \frac{2}{n}180^\circ = \frac{n-2}{n}180^\circ$, und folglich ist

$$\beta_n = \frac{n-2}{2n}180^\circ. \tag{5.3b}$$

Den *Umkreisradius* R erhält man aus $\triangle P_1MH_n$, wenn man

$$\frac{\frac{s_n}{2}}{R} = \sin\frac{\alpha_n}{2} = \sin\frac{180^\circ}{n} \quad \text{ansetzt, zu} \quad R = \frac{s_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}. \tag{5.3c}$$

Ganz ähnlich ergibt sich der *Inkreisradius* r wegen

$$\frac{\frac{s_n}{2}}{r} = \tan\frac{\alpha_n}{2} = \tan\frac{180^\circ}{n} \quad \text{zu} \quad r = \frac{s_n}{2}\cot\frac{180^\circ}{n}. \tag{5.3d}$$

Aus der Fläche des Dreiecks P_1P_nM

$$F = \frac{s_n r}{2} = \frac{s_n^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{n}$$

folgt die Fläche des n-Eckes zu:

$$F = n\frac{s_n^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{n}. \tag{5.3e}$$

Ist umgekehrt der Radius R des Umkreises gegeben, so errechnet sich die Seite s_n aus

$$\frac{\frac{s_n}{2}}{R} = \sin\frac{\alpha_n}{2} \quad \text{zu} \quad s_n = 2R\sin\frac{\alpha_n}{2}. \tag{5.4}$$

Diese Seite s_n ist also, abgesehen vom Umkreisradius R, nur eine Funktion des Zentriwinkels α_n. — Das Verhältnis s_n/R nennt man die *Chorde* des Winkels α_n und schreibt

$$\operatorname{chord}\alpha_n = \frac{s_n}{R}. \tag{5.5a}$$

Also wird $s_n = R$ chord α_n, woraus durch Vergleich mit (5.4) folgt

$$\text{chord}\,\alpha_n = 2\sin\frac{\alpha_n}{2}\,; \qquad (5.5\text{b})$$

die *Funktion chord* kann also durch den Sinus ausgedrückt werden. Allgemein gilt

$$\text{chord}\,\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\,. \qquad (5.6\text{a})$$

Halbiert man in einer chord-Tafel[19] die Argumente und Funktionswerte, so erhält man eine Sinus-Tafel:

$$\frac{\text{chord}\,\gamma}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}\,. \qquad (5.6\text{b})$$

Schließlich ist noch der Umfang u_n des dem Kreis vom Radius R eingeschriebenen regulären n-Eckes anzugeben:

$$u_n = ns_n = 2nR\sin\frac{\alpha_n}{2}\,. \qquad (5.7\text{a})$$

Für die Seite S_n bzw. den Umfang U_n des dem Kreis vom Radius R umbeschriebenen n-Eckes folgt aus Abb. 5.3 noch

$$S_n = 2R\tan\frac{\alpha_n}{2}, \qquad U_n = 2nR\tan\frac{\alpha_n}{2}, \qquad (5.7\text{b})$$

woraus sich für den Einheitskreis mit $R = 1$ die Formeln

$$u_n = 2n\sin\frac{360^\circ}{2n}, \qquad U_n = 2n\tan\frac{360^\circ}{2n} \qquad (5.7\text{c})$$

ergeben.

6. Beziehungen der Winkelfunktionen untereinander

Durch die Verhältnisse a/c und b/c dreier Größen a, b, c sind nach den allgemeinen Divisionssätzen weitere Verhältnisse bestimmt, nämlich

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}}, \quad \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}}, \quad \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\frac{a}{b}}\,.$$

[19] Die *Funktion chord* ist die älteste bekannte trigonometrische Funktion; bereits die alexandrinischen Mathematiker des Altertums besaßen chord-Tafeln.

Identifiziert man a, b, c mit den Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so liefern diese Seitenverhältnisse nach (4.1)

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}\alpha &= \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \\ \tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Da ein rechtwinkliges Dreieck durch ein Seitenverhältnis der Form nach festgelegt ist, muß sich jede der sechs in (4.1) definierten Funktionen durch jede andere allein ausdrücken lassen. Aus der fundamentalen Beziehung (4.6), $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$, folgt zunächst

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha &= 1-\cos^2\alpha = (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha), \\ \cos^2\alpha &= 1-\sin^2\alpha = (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha), \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}, \tag{6.3}$$

und mit (6.1) noch

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}. \tag{6.4}$$

Diese Beziehungen leisten bei der Umformung trigonometrischer Ausdrücke gute Dienste; sie können in einfacher Weise gewonnen werden, wenn in einem rechtwinkligen Dreieck eine geeignete Seite gleich der Einheit gesetzt wird; z. B liest man aus Abb. 6.1 ab:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}},$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}, \quad \sec\alpha = \sqrt{1+\tan^2\alpha} \tag{6.5}$$

$$\text{und } \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}.$$

$\sqrt{1+\tan^2\alpha}$, $\tan\alpha$, α, 1

Abb. 6.1

Wenn man diesen Weg systematisch weiterverfolgt[20], so gelangt man zu den Beziehungen in Tabelle 6.1, die keiner weiteren Erläuterung bedarf.

---

[20] Ist t die gegebene Funktion, so bezeichnet man in einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten mit t bzw. der Einheit derart, daß daraus die Identität $t = t/1$ abgelesen wird.

Tabelle 6.1

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$	$\frac{1}{\cot\alpha}$	$\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\cot\alpha$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	$\cot\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}$
$\sec\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\sqrt{1+\tan^2\alpha}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha}$	$\sec\alpha$	$\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$	$\sqrt{1+\cot^2\alpha}$	$\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\operatorname{cosec}\alpha$

7. Funktionswerte für spezielle Winkel

Die *Funktionswerte einiger häufig vorkommender Winkel*, nämlich der Winkel 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, lassen sich bei Beachtung der Komplementsätze aus einfachen geometrischen Figuren ablesen. Für die Winkel 30°, 45° und 60° folgen aus dem rechtwinklig-gleichschenkligen und dem

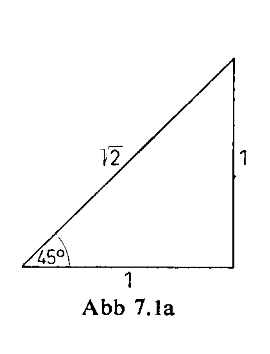


Abb 7.1a

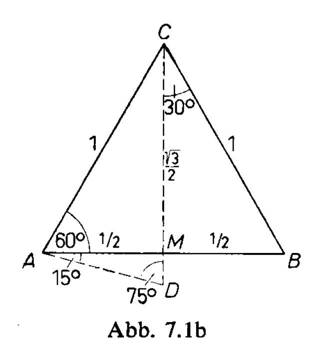


Abb. 7.1b

gleichseitigen Dreieck (Abb. 7.1a, b) die Funktionswerte:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \tan 45° = \cot 45° = 1,$$

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30° = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \cot 30° = \tan 60° = \sqrt{3}.$$

Wird das gleichseitige Dreieck in Abb. 7.1b so ergänzt, daß die Verlängerung $\overline{CM}$ bis D gleich $\overline{CA}$, also $\overline{CD} = 1$ wird, so ist $\triangle ADC$ gleichschenklig: also gilt $\sphericalangle\, CAD = \sphericalangle\, ADC = 75°$, $\sphericalangle\, MAD = 15°$, und mit $\overline{MD} = 1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\overline{AD} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ erhält man somit die Funktionswerte

$$\sin 15° = \cos 75° = \frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$\cos 15° = \sin 75° = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$\tan 15° = \cot 75° = \frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3},$$

$$\cot 15° = \tan 75° = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}.$$

Mit den Funktionswerten für 0° und 90°, die unmittelbar aus Abb. 4.1 folgen, nämlich

$$\sin 0° = \cos 90° = 0, \quad \cos 0° = \sin 90° = 1,$$

$$\tan 0° = \cot 90° = 0, \quad \cot 0° = \tan 90° \to \infty,$$

ergibt sich somit folgende Übersicht:

Tabelle 7.1

	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$	0
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	0

Auch für die Winkel 18° und 72°, also für ein Fünftel und vier Fünftel des rechten Winkels, lassen sich die Funktionswerte aus geometrischen Beziehungen ableiten. Teilt man den Halbmesser des Einheitskreises nach dem *goldenen Schnitt*, so wird der größere Abschnitt $x = (\sqrt{5}-1)/2$ die Seite des eingeschriebenen Zehneckes, die als Sehne dem Zentriwinkel 36° (Abb.7.2) entspricht. Das rechtwinklige $\triangle AMC$ mit den Winkeln $ACM = 18°$ und $CAM = 72°$ und den Katheten $\overline{AM} = x/2 = (\sqrt{5}-1)/4$ und $\overline{MC} = (\sqrt{10+2\sqrt{5}})/4$ liefert nach leichten Reduktionen

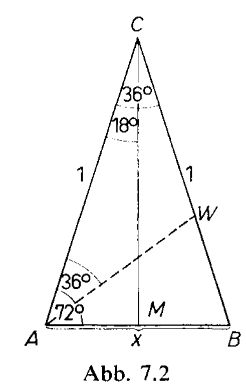


Abb. 7.2

$$\sin 18° = \cos 72° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1),$$

$$\cos 18° = \sin 72° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$\tan 18° = \cot 72° = \frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}},$$

$$\cot 18° = \tan 72° = \sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Mit Hilfe der Halbierenden $\overline{AW}$ von $\sphericalangle CAB$ lassen sich auch die Funktionen der Winkel 36° und 54° ableiten,

$$\sin 36° = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \cos 54°, \quad \sin 54° = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \cos 36°, \quad \text{usf.,}$$

die der Leser zur Übung selbst berechnen möge.

Kapitel 2: Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

8. Die trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel

Für die *Definition der trigonometrischen Funktionen stumpfer und überstumpfer Winkel* benützt man ein rechtwinkliges Achsenkreuz x, y mit dem Nullpunkt O (Abb. 8.1). Damit ist ein beliebiger Punkt P durch seine Projektionen M und N auf die Achsen, also durch die rechtwinkligen Koordinaten x und y festgelegt. — Die Lage von P kann auch durch die Länge r von $\overline{OP}$ und den Winkel $\varphi = \sphericalangle POM$ angegeben werden; r und φ heißen die *Polarkoordinaten* von P, r der Radius und φ die *Phase* oder der *Richtungswinkel* von $\overline{OP}$. Wird der Radius $\overline{OP}$ um O aus seiner Ausgangslage OQ, also aus der positiven x-Achse herausgedreht, und zwar so, daß die positive x-Achse auf dem kürzesten Weg in die positive y-Achse überführt wird, also im Gegenuhrzeigersinn[21], so überstreicht der Radius $\overline{OP}$ nicht nur spitze, sondern im weiteren Verlauf auch stumpfe und überstumpfe Winkel. Die x-Achse und die y-Achse teilen die x, y-Ebene in vier Quadranten, die, bei der positiven x-Achse beginnend, dem Umlaufsinn folgend, mit I–IV numeriert werden. Man kann also auch sagen, der Winkel φ durchläuft alle vier Quadranten.

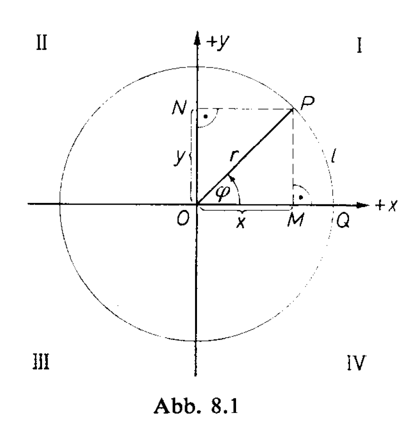


Abb. 8.1

Der Richtungswinkel φ wird auf dem Kreisumfang gemessen. Die Mathematik benützt zur *Messung von Winkeln* zwei Methoden: Bei der *praktischen Methode* wird der Kreisumfang in 360 Teile oder Winkelgrade eingeteilt (Gradmaß). — Ein Winkelgrad (1°) ist in 60 Winkelminuten(60′)

---

[21] Diese Umlaufrichtung wird als der *mathematisch positive Drehsinn* bezeichnet. Es ist aber darauf hinzuweisen, daß für die folgenden Überlegungen sowohl die Richtung der positiven x-Achse als auch der Drehsinn frei wählbar sind; notwendig ist nur, daß die y-Achse senkrecht zur x-Achse steht und so orientiert ist, daß die positive x-Achse bei Drehung im vereinbarten Drehsinn auf dem kürzesten Wege in die positive y-Achse übergeht.

zu je 60 Winkelsekunden (60″) unterteilt. Diese Teilung geht auf das sexagesimale Zahlensystem der Babylonier zurück und heißt *Sexagesimal- oder Altgrad-Teilung*. In neuerer Zeit wird zusätzlich die *Neugradteilung* benützt, die den Winkelgrad (1^g) als den 400. Teil des Vollkreises in 100 Neuminuten (100^c) zu je 100 Neusekunden (100^{cc}) unterteilt. Für die *Umrechnung von Winkeln* aus Altgrad in Neugrad und umgekehrt gilt:

$$90^\circ = 100^g \qquad\qquad 100^g = 90^\circ$$

$$1^\circ = \frac{10^g}{9} \qquad\qquad 1^g = \frac{9^\circ}{10}$$

$$1' = \frac{1}{60}\cdot\frac{10^g}{9} = \frac{100^c}{54} \qquad\qquad 1^c = \frac{54'}{100}$$

$$1'' = \frac{1}{60}\cdot\frac{1^g}{54} = \frac{1000^{cc}}{324} \qquad\qquad 1^{cc} = \frac{324''}{1000}$$

Zur Umrechnung eines Neugrad-Winkels in Altgrad sind also die Grade mit 0,9, die Minuten mit 0,54 und die Sekunden mit 0,324 zu multiplizieren[22]. Die *theoretische Methode* benützt das *analytische oder natürliche Winkelmaß* und legt den Winkel durch seinen Bogen auf dem Einheitskreis (Bogenmaß) fest. Dem Vollwinkel 360° entspricht also der Umfang 2π des Einheitskreises, dem gestreckten Winkel 180° der halbe Umfang π, dem rechten Winkel der Viertelumfang $\pi/2$ usf. Es gelten also die in Tabelle 8.1 eingetragenen Äquivalente.

Tabelle 8.1

Gradmaß	Altgrad	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	Neugrad	$33{,}3\ldots^g$	50^g	$66{,}6\ldots^g$	100^g	200^g	300^g	400^g
Bogenmaß		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Das *Bogenmaß* für den Winkel φ (Abb. 8.1) ist also der Bogen $l = \widehat{QP}$ auf dem Kreis vom Radius r. Die Zahl l/r wird mit arc φ (von lat. arcus = Bogen) oder $\widehat{\varphi}$ bezeichnet. Da arc φ und (φ°) die Maßzahlen ein und derselben Größe φ, nur in verschiedenen Einheiten darstellen, gilt für zwei beliebige Winkel φ und ψ

$$\text{arc}\,(\varphi+\psi) = \text{arc}\,\varphi + \text{arc}\,\psi, \qquad \text{arc}\,\varphi : \text{arc}\,\psi = (\varphi^\circ):(\psi^\circ). \tag{8.1}$$

[22] Die Praxis benützt zur *Winkelumwandlung* Tafelwerke, z. B. O. Sust: Tafeln für die Umwandlung von Winkeln aus alter in neue Teilung und aus neuer in alte Teilung. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart 1948.

Dem im Gradmaß gemessenen Winkel φ° entspricht das Bogenmaß $2\pi\,\varphi^\circ/360^\circ$; dem Winkel 1 im Bogenmaß kommt demnach im Gradmaß ein Winkel ϱ zu, der sich aus $2\pi\cdot\varrho^\circ/360^\circ = 1$ ergibt. Der Winkel

$$\begin{aligned}\varrho &= \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57{,}296\ldots^\circ = 57^\circ 17' 44{,}8\ldots'' \\ &= 3437{,}74\ldots' \quad = 206\,264{,}8\ldots'' = 63{,}66197\ldots^{g},\end{aligned} \tag{8.2}$$

der auch als Radiant (rad) bezeichnet wird, schneidet also auf dem Einheitskreis die Bogenlänge 1 aus. Somit gelten folgende *Umrechnungsformeln*

$$\operatorname{arc}\varphi = \frac{\pi}{180^\circ}\varphi^\circ = \frac{\varphi^\circ}{\varrho^\circ}, \quad \varphi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\operatorname{arc}\varphi = \varrho^\circ \operatorname{arc}\varphi,$$

bzw. (8.3)

$$\operatorname{arc}\varphi = \frac{\pi}{200^{g}}\varphi^{g} = \frac{\varphi^{g}}{\varrho^{g}}, \quad \varphi^{g} = \frac{180^{g}}{\pi}\operatorname{arc}\varphi = \varrho^{g} \operatorname{arc}\varphi.$$

Eine weitere, dem Bogenmaß ähnliche Winkelteilung ist die *Strichteilung*[23].

Die Abb. 8.1 liefert nun eine geometrisch anschauliche, *allgemein gültige Definition der trigonometrischen Funktionen;* es gilt

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}} = \frac{\text{Ordinate}}{\text{Radius}}, \quad & \cos\varphi &= \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \frac{\text{Abszisse}}{\text{Radius}}, \\ \tan\varphi &= \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}} = \frac{\text{Ordinate}}{\text{Abszisse}}, \quad & \cot\varphi &= \frac{\overline{OM}}{\overline{MP}} = \frac{\text{Abszisse}}{\text{Ordinate}}.\end{aligned} \tag{8.4}$$

Wird der Radius $\overline{OP}$ stets positiv gezählt und berücksichtigt man die Vorzeichen der Strecken $\overline{OM}$ und $\overline{MP}$, der Abszissen und Ordinaten von P, so ergeben sich nach Abb. 8.1 die in Tabelle 8.2 eingetragenen Wertebereiche der Funktionen[24].

Die Schaubilder der vier Funktionen (Abb. 8.2 und 8.3) zeigen, daß der Tangens bei 90° und 270° Unstetigkeitsstellen aufweist und von unendlich großen positiven Werten auf unendlich große negative Werte springt. Entsprechendes gilt für den Kotangens an den Stellen 0° (360°) und 180°.

[23] Ein Kreis von 1 m Radius hat einen Umfang von nahezu 6243 mm, so daß die Winkeleinheit auch durch den 1 mm langen Kreisbogen festgelegt werden kann. Da die Zahl 6243 unbequem zu teilen ist, nimmt man 6400 Teile auf den Vollkreis und bezeichnet die Einheit, den 6400. Teil des Vollkreises, mit 1 *Strich* = 1^{-}.

[24] Die seltener benützten Funktionen Sekans und Kosekans werden nicht mehr weiter verfolgt.

Tabelle 8.2

φ / Funktion	$0° \leqq \varphi \leqq 90°$ I. Quadrant	$90° \leqq \varphi \leqq 180°$ II. Quadrant	$180° \leqq \varphi \leqq 270°$ III. Quadrant	$270° \leqq \varphi \leqq 360°$ IV. Quadrant
$\sin \varphi$	$0 \leqq y \leqq 1$	$1 \geqq y \geqq 0$	$0 \geqq y \geqq -1$	$-1 \leqq y \leqq 0$
$\cos \varphi$	$1 \geqq y \geqq 0$	$0 \geqq y \geqq -1$	$-1 \leqq y \leqq 0$	$0 \leqq y \leqq 1$
$\tan \varphi$	$0 \leqq y \leqq \infty$	$-\infty \leqq y \leqq 0$	$0 \leqq y \leqq +\infty$	$-\infty \leqq y \leqq 0$
$\cot \varphi$	$+\infty \geqq y \geqq 0$	$0 \geqq y \geqq -\infty$	$+\infty \geqq y \geqq 0$	$0 \geqq y \geqq -\infty$

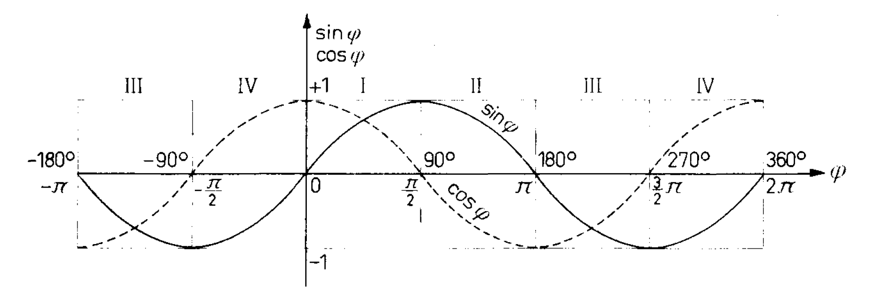


Abb. 8.2

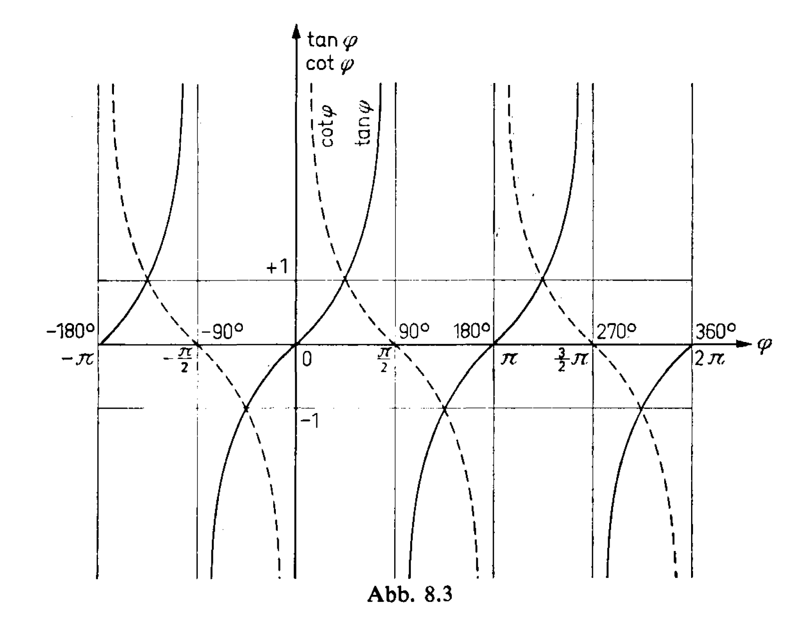


Abb. 8.3

Da die trigonometrischen Funktionen unabhängig von Längen sind, kann man für die geometrische Definition der trigonometrischen Funktionen auch den Einheitskreis benützen. Mit $\overline{OP} = 1$ (Abb. 8.4) nehmen die Definitionen (8.4) dann die einfache Form an

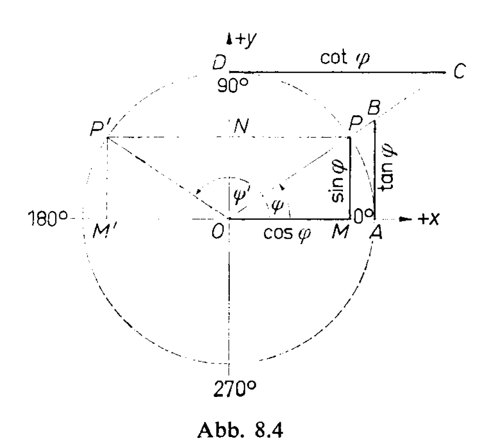


Abb. 8.4

$$\sin\varphi = \overline{MP}, \quad \cos\varphi = \overline{OM},$$

$$\tan\varphi = \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\cot\varphi = \frac{\overline{OM}}{\overline{MP}} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}. \tag{8.5}$$

Wegen dieser Darstellung am Einheitskreis nennt man die trigonometrischen Funktionen auch *Kreisfunktionen*. Auch der Tangens und Kotangens können als Strecken am Einheitskreis dargestellt werden; es gilt (Abb. 8.4)

$$\tan\varphi = \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \overline{AB}, \quad \cot\varphi = \frac{\overline{NP}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{OD}} = \overline{DC}.$$

Auch der Name *Tangens* ist nun leicht zu erklären. Der Wert $\tan\varphi$ wird an der in A an den Einheitskreis gelegten Tangente gemessen (Abb. 8.4). Der Name *Sinus* wird vielfach aus dem Verlauf der sin-Funktion (vgl. Abb. 8.2) von lat. sinus = Busen hergeleitet, doch ist diese Erklärung sprachlich nicht gesichert.

Die Abb. 8.4 zeigt, daß die Definitionen (8.5) für alle Quadranten gültig sind, und bestätigt in einfacher Weise wiederum die Tabelle (8.1). Für einen Winkel φ' z. B. im zweiten Quadranten (gestrichelt gezeichnet) ist $\sin\varphi'$ positiv und $\cos\varphi'$ negativ. Weiter zeigt die Abb. 8.4, daß die in [6] für spitze Winkel abgeleiteten Beziehungen zwischen den Funktionen gültig bleiben: Für das Dreieck OMP gilt, in welchem Quadranten der Winkel auch liegt, der pythagoräische Satz; also gilt für jeden beliebigen Winkel:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}, \quad \cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}, \tag{8.6}$$

und aus (8.5) folgt wiederum

$$\tan\varphi\cot\varphi = 1, \quad \tan\varphi = \frac{1}{\cot\varphi}, \quad \cot\varphi = \frac{1}{\tan\varphi}. \tag{8.7}$$

9. Die Periodizität der trigonometrischen Funktionen

Setzt man in Abb. 8.2 den Verlauf der Funktionen Sinus und Kosinus nach links und rechts, d. h. für beliebig große positive und negative Winkel fort, so zeigt sich, daß die Sinusse und Kosinusse für alle Winkel, die sich um 360° (2π) oder ganzzahlige Vielfache davon unterscheiden, gleich sind. Für Tangens und Kotangens (Abb. 8.3) dagegen stellen sich bei Winkelunterschieden von $\pm 180°$ (π) gleiche Funktionswerte ein. *Die trigonometrischen Funktionen sind also periodische Funktionen, und dies ist eine ihrer wichtigsten Eigenschaften.*

Auch die Abb. 8.4 zeigt die Periodizität der trigonometrischen Funktionen. Dreht sich der Leitstrahl $\overline{OP}$ aus seiner Ausgangslage heraus einmal ganz herum, so nehmen Sinus und Kosinus entsprechend den Definitionsgleichungen (8.5) wieder gleiche Werte an. Es gilt also, gleichgültig, ob $\overline{OP}$ im positiven (Gegenuhrzeiger-) oder negativen (Uhrzeiger-) Sinn gedreht wird,

$$\sin(\varphi \pm 2\pi) = \sin\varphi, \quad \cos(\varphi \pm 2\pi) = \cos\varphi, \tag{9.1a}$$

und für beliebig viele (n) Drehungen

$$\sin(\varphi + n \cdot 2\pi) = \sin\varphi, \quad \cos(\varphi + n \cdot 2\pi) = \cos\varphi, \tag{9.1b}$$

wobei n eine positive oder negative ganze Zahl ist. Sinus und Kosinus sind also periodisch, ihre Periode ist 2π (360°).

Allgemein heißt eine Funktion $f(x)$ des Arguments x periodisch mit der Periode P, wenn sie bei Änderung des Arguments um P unverändert bleibt, also $f(x+P) = f(x)$ ist. In einer periodischen Funktion kann also das Argument um ein beliebiges ganzzahliges Vielfaches von P geändert werden, ohne daß sich der Funktionswert ändert. Streng genommen ist der *Begriff der Periodizität* noch präziser zu formulieren: $f(x)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode P, wenn für jedes x die Beziehung $f(x+P) = f(x)$ gilt und keine Zahl $|p| < |P|$ existiert, für die gleichfalls $f(x+p) = f(x)$ wird.

Nach derselben Schlußweise sind Tangens und Kotangens periodisch mit der Periode 180° (π), d. h. es gilt

$$\tan(\varphi + n \cdot \pi) = \tan\varphi, \quad \cot(\varphi + n \cdot \pi) = \cot\varphi, \tag{9.2}$$

wenn n eine ganze Zahl ist.

10. Die Drehungs- und Spiegelsätze

Nach dem Periodizitätssatz der trigonometrischen Funktionen gibt es keine Zahl $\tau < 2\pi$, für die $\sin(\varphi+\tau) = \sin\varphi$ und $\cos(\varphi+\tau) = \cos\varphi$ wäre. Doch lassen sich die trigonometrischen Funktionen für eine Reihe von Argumentänderungen τ mit Hilfe des Einheitskreises angeben. Diese Beziehungen werden benötigt, um die Funktionen beliebig großer Winkel auf diejenigen spitzer Winkel, also zwischen 0° und 90°, zurückführen zu können.

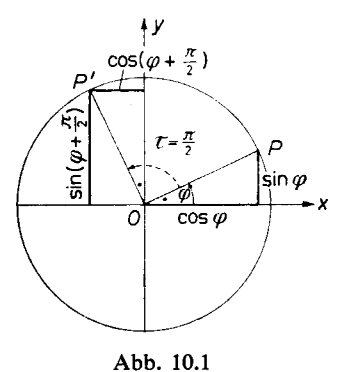


Abb. 10.1

Wenden wir uns zunächst den *Drehungssätzen* zu: Wird bei Sinus und Kosinus das Argument φ um $\tau = \pi/2$ (90°) vergrößert, wobei φ im I. Quadranten angenommen wird, so folgt aus Abb. 10.1 für Winkel im II. Quadranten

$$\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi, \quad \cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi; \tag{10.1}$$

mit (8.5) findet man noch

$$\tan\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = -\cot\varphi, \quad \cot\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = -\tan\varphi. \tag{10.2}$$

(10.1) und (10.2) werden als *Vierteldrehungssatz* bezeichnet.

Bei der Argumenterhöhung um $\tau = \pi$ (180°) liefert Abb. 10.2 für Winkel im III. Quadranten den *Halbdrehungssatz*

$$\sin(\varphi+\pi) = -\sin\varphi,$$
$$\cos(\varphi+\pi) = -\cos\varphi, \tag{10.2a}$$

und mit (8.5) auch

$$\tan(\varphi+\pi) = \tan\varphi,$$
$$\cot(\varphi+\pi) = \cot\varphi, \tag{10.2b}$$

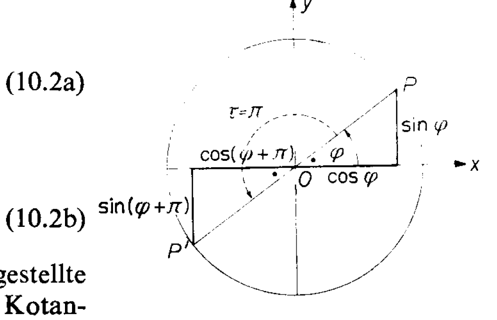


Abb. 10.2

was wiederum die in [9] festgestellte Periodizität von Tangens und Kotangens mit π bestätigt. Ebenso liefert der

Dreivierteldrehungssatz $\left(\tau = \frac{3}{2}\pi \text{ bzw. } 270°\right)$ für Winkel im IV. Quadranten

$$\sin\left(\varphi + \frac{3}{2}\pi\right) = -\cos\varphi, \quad \cos\left(\varphi + \frac{3}{2}\pi\right) = +\sin\varphi, \tag{10.3a}$$

$$\tan\left(\varphi + \frac{3}{2}\pi\right) = -\cot\varphi, \quad \cot\left(\varphi + \frac{3}{2}\pi\right) = -\tan\varphi. \tag{10.3b}$$

Die Drehungssätze gestatten, die Funktionen beliebiger Winkel auf diejenigen spitzer Winkel zurückzuführen. — Dasselbe läßt sich aber auch durch *Spiegelung* erreichen: Ändert man den Winkel φ durch Spiegelung des Leitstrahls $\overline{OP}$ an der Ordinatenachse nach $\overline{OP'}$ (Abb. 10.3) in sein Supplement $\bar{\varphi} = \pi - \varphi$, so gilt

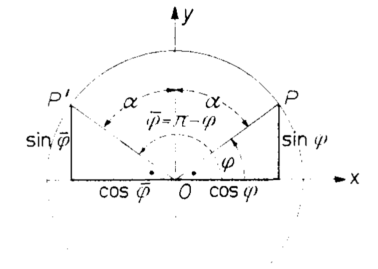


Abb. 10.3

$$\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi, \quad \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi \tag{10.4a}$$

und
$$\tan(\pi - \varphi) = -\tan\varphi, \quad \cot(\pi - \varphi) = -\cot\varphi. \tag{10.4b}$$

(10.4) bildet den *Supplementsatz*. — Die Winkel φ und $\bar{\varphi}$ lassen sich auch mit Hilfe des (spitzen) Winkels α darstellen zu $\varphi = \pi/2 - \alpha$, $\bar{\varphi} = \pi/2 + \alpha$ (Abb. 10.3), woraus folgt

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha, \tag{10.5a}$$

und somit wegen (8.5) auch

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\alpha,$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \tan\alpha. \tag{10.5b}$$

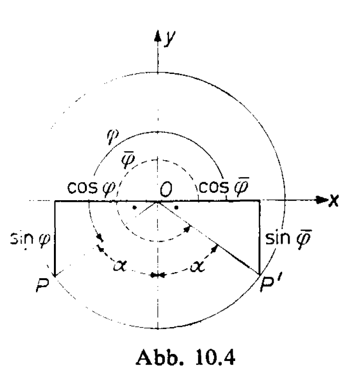


Abb. 10.4

(10.5) enthält auch die schon in [4] abgeleiteten *Komplementsätze*.

Mit Hilfe der Spiegelung lassen sich auch Beziehungen zwischen den Funktionen von Winkeln im III. und IV.

Quadranten angeben. Nach Abb. 10.4 gilt $\sin\overline{\varphi} = \sin\varphi$, $\cos\overline{\varphi} = -\cos\varphi$; da sich die Winkel φ und $\overline{\varphi}$ im III. und IV. Quadranten durch den spitzen Winkel α und $(3/2)\pi$ darstellen lassen, folgt daraus noch

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right), \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right), \tag{10.6a}$$

ferner

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right), \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right). \tag{10.6b}$$

Der *Implementsatz*, mit dessen Hilfe sich die trigonometrischen Funktionen negativer Winkel auf diejenigen spitzer Winkel zurückführen lassen, kann durch Spiegelung an der Abszissenachse des Leitstrahles $\overline{OP}$ nach $\overline{OP'}$

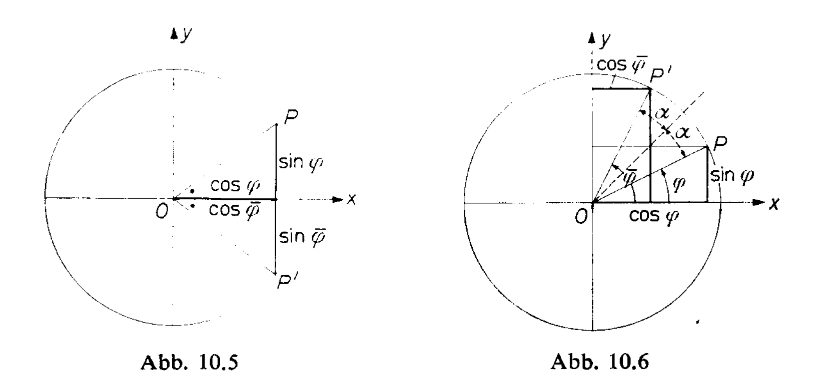


Abb. 10.5 Abb. 10.6

dargestellt werden (Abb. 10.5). Zwischen den Funktionen der Winkel φ und $\overline{\varphi} = 360° - \varphi$ gelten, wenn man die Periodizität berücksichtigt, die Beziehungen

$$\sin(360° - \varphi) = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi, \quad \cos(360° - \varphi) = \cos(-\varphi) = \cos\varphi, \tag{10.7a}$$

und damit wegen (8.5) auch

$$\tan(360° - \varphi) = \tan(-\varphi) = -\tan\varphi, \; \cot(360° - \varphi) = \cot(-\varphi) = -\cot\varphi. \tag{10.7b}$$

(10.7) wird als *Implementsatz*, manchmal auch als *Umkehrungssatz* bezeichnet.

Sinus, Tangens und Kotangens heißen ungerade Funktionen, der Kosinus dagegen eine gerade Funktion nach der Definition: Eine Funktion $f(x)$ des Arguments x heißt *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$; sie heißt *ungerade*, wenn

$f(-x) = -f(x)$. Diese Eigenschaften bezeichnet man auch als den *Paritätssatz der Kreisfunktionen.*

Hier eine weitere Anwendung der Spiegelung: Bringt man den Leitstrahl $\overline{OP}$ ($\varphi < \pi/4$) durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. Quadranten in die Lage $\overline{OP}'$ (Abb. 10.6), so gelten wegen $\bar{\varphi} = \pi/4+\alpha$, $\varphi = \pi/4-\alpha$ die Beziehungen

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) \qquad (10.8a)$$

und

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right), \quad \cot\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right). \qquad (10.8b)$$

(10.8a, b) zeigen, daß die Funktionen der Winkel des 2. Oktanten und somit auch die Funktionen der Winkel aller vier Quadranten auf diejenigen von Winkeln im 1. Oktanten zurückgeführt werden können.

Für die praktische Rechnung sind die Drehungssätze von besonderer Bedeutung, weil sie die Funktionswerte beliebiger Winkel in bequemer Weise aus denen spitzer Winkel bestimmen lassen. Zum Beispiel wird nach dem Vierteldrehungssatz sin 138°12′44″ = sin (48°12′44″+90°) = cos 48°12′44″, nach dem Supplementsatz dagegen sin 138°12′44″ = sin (180°−138°12′44″) = sin 41°47′16″. Für das Zurückgehen von einem Winkel des II. Quadranten auf einen Winkel des I. Quadranten ist der Vierteldrehungssatz rechnerisch bequemer als der Supplementsatz[25]. Die Drehungssätze sind daher noch in Tabelle 10.1 zusammengestellt, wobei τ stets als spitzer Winkel zu verstehen ist.

Tabelle 10.1

Winkel / Funktion	$\varphi = 90°+\tau$ II. Quadrant	$\varphi = 180°+\tau$ III. Quadrant	$\varphi = 270°+\tau$ IV. Quadrant
$\sin\varphi$	$+\cos\tau$	$-\sin\tau$	$-\cos\tau$
$\cos\varphi$	$-\sin\tau$	$-\cos\tau$	$+\sin\tau$
$\tan\varphi$	$-\cot\tau$	$+\tan\tau$	$-\cot\tau$
$\cot\varphi$	$-\tan\tau$	$+\cot\tau$	$-\tan\tau$

[25] Wenn bei späteren Ableitungen mitunter der *Supplementsatz* benützt wird, dann deshalb, weil das Supplement eines Dreieckswinkels als Summe der beiden anderen geometrisch und rechnerisch von Bedeutung ist.

Bisher wurde angenommen, der Winkel φ sei spitz, liege also zwischen 0° und 90°. Geometrisch läßt sich nach den benützten Verfahren am Einheitskreis, analytisch mit den bisher abgeleiteten Formeln selbst zeigen, daß φ jeden beliebigen positiven oder negativen Winkelwert annehmen kann und die abgeleiteten Formeln gültig bleiben.

11. Bestimmung des Arguments aus einem Funktionswert

Bisher wurden zu einem Winkel (Bogen) die trigonometrischen Funktionswerte gesucht. Nun ist noch die umgekehrte Aufgabe zu lösen, aus einem Funktionswert das Argument zu bestimmen. — Durch jeden der Werte $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\tan\varphi$, $\cot\varphi$ wird φ zweideutig bestimmt, weil $180° - \varphi$ denselben Sinus, $-\varphi$ denselben Kosinus, $180° + \varphi$ denselben Tangens und Kotangens wie φ besitzen. Von den vier Winkeln $\pm\varphi$, $180° \pm \varphi$ fällt in jeden Quadranten einer; *die Argumentbestimmung wird also nur eindeutig, wenn noch der Quadrant gegeben ist,* z. B. durch die Vorzeichen von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$. Mit einem gegebenen Funktionswert kann offenbar der Quadrant nicht festgelegt werden, denn mit Hilfe von (8.6) und (8.7) lassen sich zwar aus jedem gegebenen Funktionswert die anderen berechnen, wegen der auftretenden Quadratwurzeln jedoch nur bis auf das Vorzeichen.

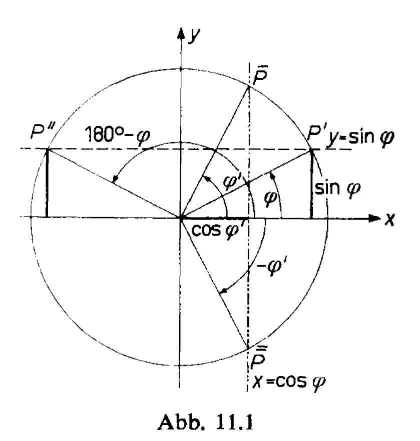


Abb. 11.1

Die Doppeldeutigkeit der Argumentbestimmung aus den Kreisfunktionen läßt sich auch geometrisch deuten: $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ z. B. bestimmen je eine Gerade parallel zur Ordinaten- bzw. Abszissenachse ($y = \sin\varphi$ bzw. $x = \cos\varphi$); jede dieser Geraden schneidet den Einheitskreis im allgemeinen zweimal (Abb. 11.1) und bestimmt somit zwei Lagen für P (P' und P'' bzw. $\bar{P}$ und $\bar{\bar{P}}$). In gleicher Weise kann die Doppeldeutigkeit der Argumentbestimmung aus Tangens und Kotangens gedeutet werden.

Wenn oben von einer ein- oder zweideutigen Bestimmung des Arguments gesprochen wurde, so ist wegen der Periodizität der Kreisfunktionen noch *bis auf ganzzahlige Vielfache von 360° (2π)* hinzuzufügen; denn jeder Lage des Leitstrahls $\overline{OP}$ entsprechen unendlich viele kongruente Lagen, deren Winkel sich nur um Vielfache von 360° (2π) unterscheiden.

Kapitel 3: Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

12. Die Funktionen von Winkelsummen und Winkeldifferenzen

Die Aufgabe, den Sinus und Kosinus der Summe und Differenz zweier Winkel α und β algebraisch darzustellen, wenn die Sinusse und Kosinusse der einzelnen Winkel bekannt sind, läßt sich mit den sogenannten *Additionstheoremen für Sinus und Kosinus* lösen; sie lauten

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta, \end{aligned} \qquad (12.1)$$

wobei entweder die oberen oder unteren Vorzeichen gelten. Die Gleichungen (12.1) sind fundamental; aus ihnen folgen nicht nur alle übrigen Beziehungen zwischen den Funktionen zweier Winkel, sondern auch die *Formeln für den doppelten, halben und mehrfachen Winkel.*

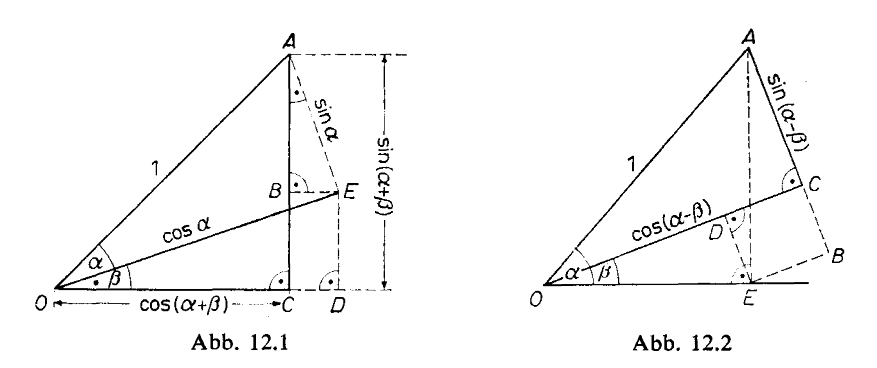


Abb. 12.1 Abb. 12.2

Man hat für die Gleichungen (12.1) auch *Merkregeln* aufgestellt, die aber wenig befriedigen: Die mittleren Vorzeichen einer Formel sind gleich und die Faktoren jedes Produktes rechter Hand ungleichnamig, wenn linker Hand ein Sinus steht; dagegen sind die Vorzeichen ungleich und die Faktoren gleichnamig, wenn linker Hand ein Kosinus steht[26].

Ein erster, einfacher Beweis ergibt sich aus den Abb. 12.1 und 12.2, in denen sowohl α und β als auch $\alpha+\beta$ und $\alpha-\beta$ spitze Winkel

[26] Vgl. G. Hessenberg: Ebene und sphärische Trigonometrie, 5. Aufl., durchgesehen von H. Kneser, Sammlung Göschen, Bd. 99, S. 59, Berlin 1957.

sind. Aus den Abbildungen, die keiner weiteren Erläuterung bedürfen, liest man ab:

$$\sin(\alpha+\beta) = \overline{AB}+\overline{ED} = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{OD}-\overline{EB} = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

und

$$\sin(\alpha-\beta) = \overline{AB}-\overline{ED} = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \overline{OD}+\overline{EB} = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Einen zweiten Beweis liefern die Winkelbeziehungen am Dreieck. Liegen α, β und $\alpha+\beta$ zwischen 0° und 180°, so gibt es ein Dreieck mit den Innenwinkeln α, β und $\gamma = 180°-(\alpha+\beta)$. Zeichnet man den Umkreis des Dreiecks ABC mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r (Abb. 12.3), so gilt nach dem Sehnensatz, wenn $\overline{ON}$ das Lot von O auf AC ist, $\sphericalangle AON = \sphericalangle ABC = \beta$; also erhält man für die Seite b aus dem Dreieck AON mit dem rechten Winkel bei N

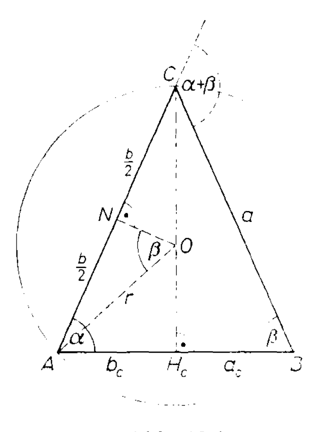


Abb. 12.3

$$\sin\beta = \frac{\frac{b}{2}}{r}, \quad \text{also} \quad b = 2r\sin\beta.$$

Ebenso gilt für die Seiten a und c

$$a = 2r\sin\alpha, \quad c = 2r\sin\gamma = 2r\sin[180-(\alpha+\beta)] = 2r\sin(\alpha+\beta).$$

Die beiden in H_c rechtwinkligen Dreiecke AH_cC und H_cBC liefern $b_c = b\cos\alpha$ und $a_c = a\cos\beta$, also ist

$$c = b\cos\alpha+a\cos\beta = 2r\sin\beta\cos\alpha+2r\sin\alpha\cos\beta.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke für c einander gleich, so folgt daraus wieder

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Beide Beweise gelten zunächst nur für spitze Winkel α, β; im ersten Beweis wurde auch der Winkel $\alpha+\beta$ als spitz angenommen; der Nachweis kann aber auch für stumpfe Winkel $\alpha+\beta$ geführt werden.

Bequemer läßt sich die Allgemeingültigkeit von (12.1) auf folgende Art nachweisen: Ist z. B. α stumpf und β spitz, so setzt man $\alpha = \bar{\alpha}+90°$ und

erhält

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\bar{\alpha}+\beta+90^\circ) = \cos(\bar{\alpha}+\beta) = \cos\bar{\alpha}\cos\beta-\sin\bar{\alpha}\sin\beta.$$

Nun ist

$$\cos\bar{\alpha} = \cos(\alpha-90^\circ) = \sin\alpha \quad \text{und} \quad \sin\bar{\alpha} = \sin(\alpha-90^\circ) = -\cos\alpha,$$

also wird

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Sind beide Winkel α und β stumpf, so erhält man mit $\alpha = \bar{\alpha}+90^\circ$, $\beta = \bar{\beta}+90^\circ$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\bar{\alpha}+\bar{\beta}+180^\circ) = -\cos(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) =$$

$$= \sin\bar{\alpha}\sin\bar{\beta}-\cos\bar{\alpha}\cos\bar{\beta} = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Ebenso ist die Gültigkeit von (12.1) für Winkel α und β im dritten und vierten Quadranten nachzuweisen.

Ein dritter, allgemeingültiger Beweis ist mit Hilfe der Vektorrechnung zu führen.

Dafür wird der Begriff des Skalarproduktes zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ benötigt, die den Winkel $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \varphi$ miteinander einschließen. Es lautet:

$$(\boldsymbol{ab}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ab\cos\varphi,$$

wobei $a = |\boldsymbol{a}|$ und $b = |\boldsymbol{b}|$ die Beträge der Vektoren bedeuten. In Komponentenschreibweise lautet das Skalarprodukt

$$(\boldsymbol{ab}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

wobei a_x, a_y, a_z und b_x, b_y, b_z die Komponenten der Vektoren bedeuten.

Sind $\bar{\boldsymbol{a}}$ und $\bar{\boldsymbol{b}}$ zwei von O ausgehende, in der Zeichenebene liegende Einheitsvektoren mit den Beträgen $|\bar{\boldsymbol{a}}| = |\bar{\boldsymbol{b}}| = 1$, die den Winkel $\alpha-\beta$ einschließen (Abb. 12.4), so gibt das Skalarprodukt von $\bar{\boldsymbol{a}}$ und $\bar{\boldsymbol{b}}$

$$(\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}}) = \cos(\alpha-\beta)$$

oder in Komponentenschreibweise mit

$$a_x = \cos\alpha, \quad a_y = \sin\alpha,$$
$$b_x = \cos\beta, \quad b_y = \sin\beta$$

auch

$$(\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}}) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

woraus sich durch Gleichsetzen ergibt:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

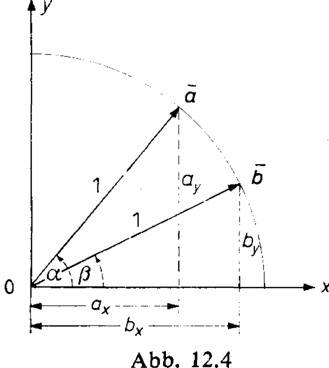


Abb. 12.4

Ersetzt man β durch $-\beta$, so findet man daraus unter Beachtung der Vorzeichen für die Funktionen negativer Winkel

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Die Gleichung für $\sin(\alpha+\beta)$ erhält man durch Rechnung mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos[90^\circ-(\alpha+\beta)] = \cos[(90^\circ-\alpha)-\beta] = \\ &= \cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta+\sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta \\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Wird β wieder durch $-\beta$ ersetzt, so folgt

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Es gibt noch weitere Beweise, zum Beispiel mit dem PTOLEMÄISCHEN *Satz über das ebene Sehnenviereck*, der als elementar-geometrische Fassung der Additionstheoreme die Trigonometrie des späten Altertums enthält und zur Berechnung der *Sehnentabellen* diente[27].

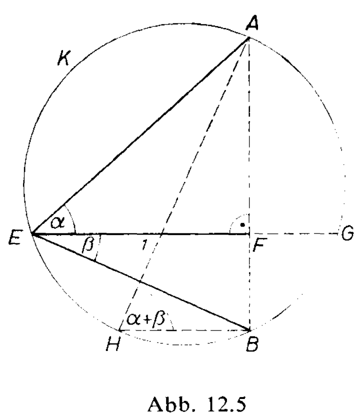


Abb. 12.5

Aus den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus folgen sofort die *Additionstheoreme für Tangens und Kotangens*. Bildet man aus (12.1)

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta}$$

und dividiert Zähler und Nenner des Bruches durch $\cos\alpha\cos\beta$, so wird

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1\mp\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

oder

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}. \tag{12.2}$$

Dies ist das *Additionstheorem der Tangensfunktion.*

Das Additionstheorem des Tangens kann auch geometrisch hergeleitet werden[28]: Trägt man (Abb. 12.5) an der Strecke $\overline{EF} = 1$ in E die Winkel α (nach oben) und β (nach unten) ab, so trifft die in F errichtete Senkrechte zu $\overline{EF}$ die freien Schenkel von

[27] Vgl. G. HESSENBERG, a.a. O. S. 72.
[28] Vgl. z. B. H. DÖRRIE, a.a. O. S. 39.

α und β in A und B, und es gilt $\overline{FA} = \tan\alpha$, $\overline{FB} = \tan\beta$, also $\overline{AB} = \tan\alpha + \tan\beta$. Wird noch der Umkreis K von $\triangle ABE$ gezeichnet, der die Verlängerung von $\overline{EF}$ in G schneidet, so gilt nach dem Sehnensatz $\overline{FE}\cdot\overline{FG} = \overline{FA}\cdot\overline{FB}$ oder $\overline{FG} = \tan\alpha\tan\beta$. Werden noch die Sehne $\overline{BH}$ parallel zu $\overline{GE}$ und die Verbindung $\overline{AH}$ eingetragen, so ist nach dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle AHB = \alpha+\beta$ und außerdem

$$\overline{BH} = \overline{EF} - \overline{FG} = 1 - \tan\alpha\tan\beta.$$

Aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck AHB folgt schließlich

$$\tan AHB = \frac{\overline{AB}}{\overline{HB}} \quad \text{oder} \quad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

In gleicher Weise ergibt sich aus (12.1) für den Kotangens:

$$\cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\sin(\alpha\pm\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta},$$

und nach Division von Zähler und Nenner des rechts stehenden Bruches durch $\sin\alpha\sin\beta$ schließlich

$$\cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cot\beta\cot\alpha\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}. \tag{12.3}$$

Bisher wurden die Winkel α und β stets als positiv vorausgesetzt. Nimmt man den Paritätssatz der Kreisfunktionen zu Hilfe, so lassen sich auch die Fälle einbeziehen, in denen α oder β oder gar beide Winkel negativ sind. Überhaupt werden, wenn man negative Winkel zuläßt, die Formeln für $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, $\tan(\alpha-\beta)$ und $\cot(\alpha-\beta)$ entbehrlich; die Gleichungen (12.1) bis (12.3) vereinfachen sich also für alle beliebigen Winkel α, β zu

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \tag{12.4a}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \tag{12.4b}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, \tag{12.4c}$$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}. \tag{12.4d}$$

Das Formelpaar (12.4a, b) wird als *Funktionaltheorem der Kreisfunktionen* bezeichnet. Darauf ist in [15] noch zurückzukommen.

Schließlich ist noch zu zeigen, daß mit Hilfe der Additionstheoreme auch die *Funktionen dreigliedriger Winkelsummen* dargestellt werden können. Nach (12.4a) gilt zum Beispiel

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma.$$

Wendet man auf die rechte Seite nochmals (12.4a, b) an, so wird

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta+\gamma) = {} & \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ & +\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.\end{aligned} \tag{12.5}$$

In gleicher Weise findet man

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta+\gamma) = {} & \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma,\end{aligned} \tag{12.6}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\tan\gamma-\tan\beta\tan\gamma}. \tag{12.7}$$

Endlich bleibt noch zu bemerken, daß diesen goniometrischen Formeln für drei Winkel auch noch *Ungleichungen* angefügt werden können; sind z. B. α, β, γ spitze Winkel, so gilt

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) < \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma. \tag{12.8}$$

Drückt man die linke Seite nach (12.5) aus, so ist also nachzuweisen, daß

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta$$
$$-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma < \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$$

ist. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sind echte Brüche, also auch die Produkte $\cos\beta\cos\gamma$, $\cos\alpha\cos\gamma$, $\cos\alpha\cos\beta$; weiter ist $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ positiv, so daß die linke Seite kleiner ist als die rechte. Damit ist (12.8) bewiesen.

Weiter läßt sich z. B. für drei spitze Winkel α, β, γ, die der Bedingung

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$$

genügen, zeigen, daß für ihre Summe $\alpha+\beta+\gamma < 180°$ gilt. Den Nachweis mag der Leser selbst versuchen. Weitere Ungleichungen dieser Art finden sich bei H. DÖRRIE, a. a. O. S. 161 f.

13. Die Funktionen mehrfacher und geteilter Winkel

Mit Hilfe der Additionstheoreme lassen sich *Ausdrücke für die trigonometrischen Funktionen mehrfacher und geteilter Winkel* angeben. Ist der Sinus oder Kosinus eines Winkels gegeben und der Sinus oder Kosinus des doppelten oder halben Winkels gesucht, so liefern die Gleichungen (12.4a, b) für $\alpha = \beta = \varphi$ die Beziehungen

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi, \quad \cos 2\varphi = \cos^2\varphi-\sin^2\varphi. \tag{13.1}$$

Wird in der zweiten Formel von (13.1) noch $\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$ oder $\cos^2\varphi = 1-\sin^2\varphi$ gesetzt, so wird daraus noch

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi-1, \quad \cos 2\varphi = 1-2\sin^2\varphi. \tag{13.2}$$

Damit ist die Aufgabe für die *Winkelverdoppelung* gelöst.

Setzt man in (13.2) jetzt $2\varphi = \psi$, $\varphi = \psi/2$, so gibt die Auflösung nach $\cos(\psi/2)$ und $\sin(\psi/2)$ für die *Winkelhalbierung*

$$\cos\frac{\psi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\psi}{2}} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\psi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\psi}{2}}. \tag{13.3}$$

$\sin(\psi/2)$ und $\cos(\psi/2)$ lassen sich auch durch $\sin\psi$ ausdrücken; eine leichte Umformung von (13.3) gibt dafür

$$\begin{aligned}\cos\frac{\psi}{2} &= \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\psi}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\psi},\\ \sin\frac{\psi}{2} &= \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\psi}\mp\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\psi},\end{aligned} \tag{13.4}$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem ψ spitz oder stumpf ist.

Für den *Tangens des doppelten Winkels* liefert (12.4c) für $\alpha = \beta = \varphi$

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}. \tag{13.5}$$

Bildet man (13.5) durch Division der Formeln für $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$, so ergibt sich noch eine interessante Formelgruppe:

$$\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi} = \frac{2\,\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1-\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}} = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}.$$

Zunächst ist also (13.5) bestätigt; werden $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ noch in der Form

$$\sin 2\varphi = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi} = \frac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}, \quad \cos 2\varphi = \frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi} = \frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}$$

geschrieben, so resultiert mit $2\varphi = \Phi$, $\tan\varphi = \tan(\Phi/2) = t$ die Formelgruppe:

$$\sin\Phi = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\Phi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan\Phi = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \cot\Phi = \frac{1-t^2}{2t}. \tag{13.6}$$

Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens können also rational durch den Tangens des halben Winkels ausgedrückt werden.

Der *Kotangens des doppelten Winkels* folgt für $\alpha = \beta = \varphi$ aus (12.4d):

$$\cot 2\varphi = \frac{\cot^2\varphi-1}{2\cot\varphi}. \tag{13.7}$$

Den *Tangens und Kotangens des halben Winkels* bildet man am bequemsten aus (13.3):

$$\tan\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\psi}{1+\cos\psi}}, \qquad \cot\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\psi}{1-\cos\psi}}, \tag{13.8}$$

woraus, wenn einmal die Zähler und einmal die Nenner rational gemacht werden, auch noch die Formeln

$$\tan\frac{\psi}{2} = \frac{1-\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{\sin\psi}{1+\cos\psi}, \qquad \cot\frac{\psi}{2} = \frac{1+\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{\sin\psi}{1-\cos\psi} \tag{13.9}$$

folgen. — Ausdrücklich sei betont, daß diese Beziehungen jederzeit aus einfacheren abgeleitet werden können, also keinesfalls einzuprägen sind. Im Dreieck ABC (Abb. 13.1) gilt nach dem *Peripheriewinkelsatz* $\sphericalangle\, CAB = (1/2) \sphericalangle\, COB = \varphi/2$ und $\sphericalangle\, ACB = 90°$; also können aus den rechtwinkligen Dreiecken ADC und BCD die Beziehungen

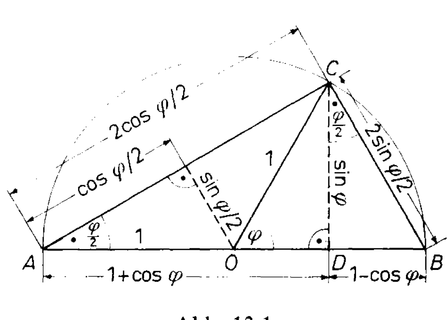


Abb. 13.1

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$1+\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$$

abgelesen werden, woraus sich alle übrigen gewinnen lassen.

Um den *Sinus und Kosinus des dreifachen Winkels* durch die Sinusse und Kosinusse der einfachen Winkel auszudrücken, setzt man zum Beispiel in (12.4a, b) $\alpha = 2\varphi$ und $\beta = \varphi$ und erhält

$$\sin 3\varphi = \sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi,$$

$$\cos 3\varphi = \cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi.$$

Führt man in die erste Gleichung $\cos 2\varphi = 1-2\sin^2\varphi$, in die zweite $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$ und in beide $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ ein, so wird daraus:

$$\sin 3\varphi = \sin\varphi - 2\sin^3\varphi + 2\sin\varphi\cos^2\varphi,$$

$$\cos 3\varphi = 2\cos^3\varphi - \cos\varphi - 2\cos\varphi\sin^2\varphi.$$

Mit $\cos^2\varphi = 1-\sin^2\varphi$ und $\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$ entsteht daraus noch

$$\begin{aligned}\sin 3\varphi &= 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi,\\ \cos 3\varphi &= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,\end{aligned} \tag{13.10}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Ist φ ein spitzer Winkel, so lassen sich auch die Funktionswerte des dreifachen Winkels geometrisch ableiten, und zwar mit Hilfe der von ARCHIMEDES für die Winkeldreiteilung benützten Halbkreisfigur (Abb. 13.2) vom Radius 1. In den Halbkreis AB ist ein gleichschenkliges Dreieck QRS mit den Schenkeln $\overline{QS} = \overline{RS} = 1$ und dem Basiswinkel φ einzuzeichnen; R fällt auf den Halbkreismittelpunkt, S auf den Halbkreis und Q auf die Verlängerung von $\overline{AB}$. Wird $\overline{QS}$ bis zum Schnitt T mit dem Halbkreis

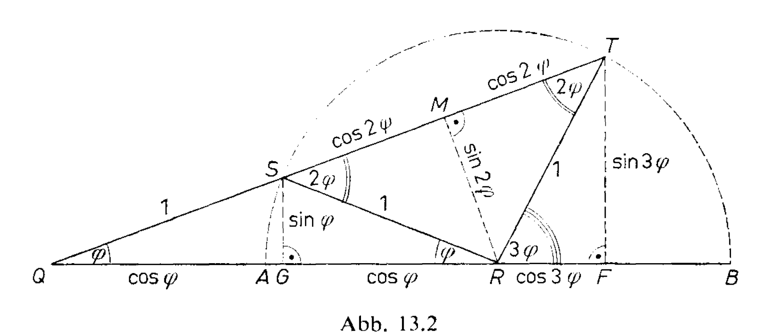


Abb. 13.2

verlängert, so ist $\sphericalangle TSR$ als Außenwinkel von $\triangle QRS$ gleich 2φ, und $\triangle SRT$ ist ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{SR} = \overline{RT} = 1$ und dem Basiswinkel 2φ. Wird noch das Lot $\overline{TF} \perp \overline{AB}$ gefällt, so entsteht das bei F rechtwinklige $\triangle RFT$, dessen Winkel bei R, $\sphericalangle TRF$, als Außenwinkel von $\triangle QRT$ gleich 3φ ist. Fällt man noch die Lote $\overline{SG} \perp \overline{AB}$ und $\overline{RM} \perp \overline{ST}$, so können die Funktionen der ein-, zwei- und dreifachen Winkel durch Strecken dargestellt werden. Es ist

$$\begin{aligned}
\overline{GS} &= \sin\varphi\,, & \overline{QG} &= \overline{GR} = \cos\varphi\,,\\
\overline{MR} &= \sin 2\varphi, & \overline{SM} &= \overline{MT} = \cos 2\varphi,\\
\overline{FT} &= \sin 3\varphi, & \overline{RF} &= \phantom{\overline{MT}} = \cos 3\varphi.
\end{aligned}$$

Bildet man die Proportion

$$\frac{\overline{TF}}{\overline{SG}} = \frac{\overline{TQ}}{\overline{SQ}}, \quad \text{also} \quad \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1+2\cos 2\varphi}{1},$$

und wird für $\cos 2\varphi = 1-2\sin^2\varphi$ eingeführt, so wird $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$.

Der Ausdruck für $\cos 3\varphi$ folgt aus der Proportion

$$\frac{\overline{QF}}{\overline{QG}} = \frac{\overline{QT}}{1}, \quad \text{also} \quad \frac{\cos 3\varphi + 2\cos\varphi}{\cos\varphi} = 1+2\cos 2\varphi.$$

Setzt man $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$, so wird daraus $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$.

Für den *vierfachen Winkel* geben die Verdoppelungsformeln (13.1) und (13.2)

$$\begin{aligned}
\sin 4\varphi &= 2\sin 2\varphi\cos 2\varphi = 4\sin\varphi\cos\varphi(1-2\sin^2\varphi),\\
\cos 4\varphi &= 2\cos^2 2\varphi - 1 = 2(2\cos^2\varphi - 1)^2 - 1 \qquad (13.11)\\
&= 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1.
\end{aligned}$$

Alle weiteren Formeln ergeben sich durch wiederholte Anwendung der Additionstheoreme. Um $\sin 5\varphi$ zu bilden, ist entweder $\sin 5\varphi = \sin(4\varphi+\varphi)$ oder $\sin 5\varphi = \sin(3\varphi+2\varphi)$ anzusetzen. Zum Beispiel wird

$$\sin 5\varphi = \sin(3\varphi+2\varphi) = \sin 3\varphi \cos 2\varphi + \cos 3\varphi \sin 2\varphi$$
$$= (3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi)(1-2\sin^2\varphi) + (4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi)\, 2\sin\varphi\cos\varphi,$$

woraus man durch Umformung erhält:

$$\sin 5\varphi = 5\sin\varphi - 20\sin^3\varphi + 16\sin^5\varphi.$$

In der gleichen Weise findet man auch (13.12)

$$\cos 5\varphi = 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi.$$

Andere Formeln für die Berechnung der Sinus und Kosinus mehrfacher Winkel aus den Funktionen der einfachen Winkel ergeben sich mit Hilfe des MOIVREschen Satzes (vgl. [39]). Dabei ist dann auch der Übergang auf die Funktionen $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ der n-fachen Winkel in einfacher Weise möglich.

Hier mag zunächst der Hinweis genügen, daß man sich bei der Darstellung von $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ auch durch *Rekursion* behelfen kann. Setzt man $n\varphi = (n-1)\varphi + \varphi$, so wird

$$\sin n\varphi = \sin(n-1)\varphi \cos\varphi + \cos(n-1)\varphi \sin\varphi.$$

Addiert man rechts $\sin(n-1)\varphi\cos\varphi - \sin(n-1)\varphi\cos\varphi$, so wird daraus

$$\sin n\varphi = 2\sin(n-1)\varphi\cos\varphi$$
$$- [\sin(n-1)\varphi\cos\varphi - \cos(n-1)\varphi\sin\varphi].$$

Beachtet man, daß die Klammer gleich $\sin[(n-1)\varphi-\varphi] = \sin(n-2)\varphi$ ist, so wird

$$\sin n\varphi = 2\sin(n-1)\varphi\cos\varphi - \sin(n-2)\,\varphi. \qquad (13.12a)$$

Ebenso findet man

$$\cos n\varphi = 2\cos(n-1)\varphi\cos\varphi - \cos(n-2)\varphi. \qquad (13.12b)$$

Damit wird zum Beispiel

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = 2\sin 2\varphi\cos\varphi - \sin\varphi,$$
$$\sin 4\varphi = 2\sin 3\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi,$$
$$\sin 5\varphi = 2\sin 4\varphi\cos\varphi - \sin 3\varphi,$$

usf.

Hier endlich noch die Formeln für den Tangens eines mehrfachen Winkels, die aber von weit geringerer Bedeutung sind. Setzt man in (12.4c) für

$\beta = 2\alpha$, so wird

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan\alpha + \tan 2\alpha}{1 - \tan\alpha \tan 2\alpha},$$

und mit der Verdoppelungsformel (13.5) entsteht daraus

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}. \tag{13.13}$$

Für den n-fachen Winkel findet man für $n\alpha = (n-1)\alpha + \alpha$ durch Rekursion noch allgemein

$$\tan n\alpha = \frac{\tan\alpha + \tan(n-1)\alpha}{1 - \tan\alpha \tan(n-1)\alpha}. \tag{13.14}$$

14. Die Verwandlungsformeln

Die Verwandlungsformeln gestatten, Summen und Differenzen von Kreisfunktionen in Produkte und Quotienten von verwandten Kreisfunktionen umzuformen. Ihre Bedeutung liegt daher in der Aufbereitung trigonometrischer Ausdrücke für die logarithmische Rechnung.

Bildet man aus (12.1) die Summen und Differenzen

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) &= 2\sin\alpha\cos\beta,\\
\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\sin\beta,\\
\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta,\\
\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) &= -2\sin\alpha\sin\beta,
\end{aligned}$$

und setzt man darin $\alpha+\beta = \varphi$ und $\alpha-\beta = \psi$, so daß $\alpha = \frac{\varphi+\psi}{2}$ und $\beta = \frac{\varphi-\psi}{2}$ wird, so entstehen die *Verwandlungsformeln für Sinus und Kosinus*

$$\begin{aligned}
\sin\varphi + \sin\psi &= 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2},\\
\sin\varphi - \sin\psi &= 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2},
\end{aligned} \tag{14.1}$$

$$\begin{aligned}
\cos\varphi + \cos\psi &= 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2},\\
\cos\varphi - \cos\psi &= -2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}.
\end{aligned} \tag{14.2}$$

Mit (14.1) und (14.2) können Summen und Differenzen der Sinus bzw. Kosinus in Produkte verwandelt werden. — Da man einen Sinus stets in einen Kosinus und umgekehrt verwandeln kann, lassen sich daraus auch die Summe bzw. Differenz von einem Sinus und einem Kosinus angeben: Ersetzt man zum Beispiel in (14.2) ψ durch $90° - \psi$, so folgen daraus die Formeln

$$\begin{aligned} \cos\varphi + \sin\psi &= 2\cos\left(45° + \frac{\varphi-\psi}{2}\right)\cos\left(45° - \frac{\varphi+\psi}{2}\right), \\ \cos\varphi - \sin\psi &= 2\sin\left(45° + \frac{\varphi-\psi}{2}\right)\sin\left(45° - \frac{\varphi+\psi}{2}\right). \end{aligned} \tag{14.3}$$

Ebenso läßt sich natürlich mit (14.1) verfahren.

Besonders interessant werden die Formeln, wenn es sich um Summen bzw. Differenzen von Funktionen desselben Winkels handelt. Setzt man zum Beispiel in der ersten Gleichung von (14.1) für $\psi = 90° - \varphi$, so wird daraus

$$\begin{aligned} \sin\varphi + \cos\varphi &= 2\sin\frac{\varphi + 90° - \varphi}{2}\cos\frac{\varphi - 90° + \varphi}{2} \\ &= 2\sin 45°\cos(\varphi - 45°) = \sqrt{2}\cos(\varphi - 45°). \end{aligned}$$

Werden auch die übrigen Gleichungen von (14.1) und (14.2) in dieser Weise behandelt, so ergibt sich die folgende Formelgruppe

$$\sin\varphi + \cos\varphi = \sqrt{2}\cos(\varphi - 45°), \quad \sin\varphi - \cos\varphi = \sqrt{2}\sin(\varphi - 45°), \tag{14.4}$$

$$\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\sin(\varphi + 45°), \quad \cos\varphi - \sin\varphi = \sqrt{2}\cos(\varphi + 45°). \tag{14.5}$$

Auch die *Verwandlungsformeln für Tangens und Kotangens* lassen sich aus den Additionstheoremen (12.1) für Sinus und Kosinus herleiten. Führt man in die erste Gleichung $\sin\alpha = \cos\alpha\tan\alpha$ und $\sin\beta = \cos\beta\tan\beta$ ein, so wird

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha \pm \tan\beta),$$

also

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \tag{14.6}$$

Setzt man weiter $\cos\alpha = \sin\alpha\cot\alpha$ und $\cos\beta = \sin\beta\cot\beta$, so findet man

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\sin\beta(\cot\beta \pm \cot\alpha),$$

also

$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}. \tag{14.7}$$

Damit können auch die Summen und Differenzen zweier Tangenten bzw. Kotangenten in Produkte verwandelt werden.

Um wieder auch die *Summen und Differenzen von Funktionen desselben Winkels* in Produkte zu verwandeln, ist wie folgt zu verfahren: Für $\cot\varphi + \tan\varphi$ findet man

$$\cot\varphi + \tan\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

also

$$\cot\varphi + \tan\varphi = \frac{2}{\sin 2\varphi} = 2\,\text{cosec}\, 2\varphi. \tag{14.8}$$

Ebenso ergeben sich die Formeln

$$\cot\varphi - \tan\varphi = \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{2\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = 2\cot 2\varphi, \tag{14.9}$$

und

$$\text{cosec}\,\varphi + \cot\varphi = \cot\frac{\varphi}{2}, \quad \text{cosec}\,\varphi - \cot\varphi = \tan\frac{\varphi}{2}. \tag{14.10}$$

Schließlich sei noch die *umgekehrte Aufgabe* angedeutet, Produkte der Form $\cos\alpha \cdot \cos\alpha$, $\sin\alpha \cdot \sin\alpha$ in Summen und Differenzen aufzulösen. Ausgehend von den drei Gleichungen

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2},$$

$$\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2},$$

$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2},$$

erhält man mit dem Ansatz $\frac{\varphi+\psi}{2} = n\alpha$ und $\frac{\varphi-\psi}{2} = m\alpha$, also $\varphi = (m+n)\alpha$ und $\psi = (n-m)\alpha$, für die obigen Summen, wenn die Produkte noch auf die linken Seiten gebracht werden, die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} 2\sin n\alpha \cos m\alpha &= \sin(m+n)\alpha + \sin(n-m)\alpha, \\ 2\cos n\alpha \cos m\alpha &= \cos(m+n)\alpha + \cos(n-m)\alpha, \\ 2\sin n\alpha \sin m\alpha &= -\cos(m+n)\alpha + \cos(n-m)\alpha. \end{aligned} \tag{14.11}$$

Eine unmittelbare Anwendung der Verwandlungsformeln bietet die Bildung der sogenannten *Quasireziproken*, die von H. DÖRRIE (a.a.O. S. 50) in die Trigonometrie eingeführt wurden und bei einer Reihe von Ableitungen (vgl. die Abschnitte [85] und [86]) gute Dienste leisten. Unter dem quasireziproken Wert des Bruches Z/N versteht man den Bruch

$$\frac{N-Z}{N+Z}.$$

Die Quasireziproke von b/a ist also $\frac{a-b}{a+b}$. Der Grund für die Bezeichnung liegt darin, daß die zweimalige Bildung der Quasireziproken wieder den ursprünglichen Wert ergibt, d. h. die Quasireziproke von $(a-b)/(a+b)$ gibt

$$\frac{a+b-(a-b)}{a+b+a-b}=\frac{b}{a}.$$

Auf einige trigonometrische Funktionen angewendet, erhält man: Die Quasireziproke von $\sin\beta/\sin\alpha$ lautet

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta},$$

woraus man mit den Verwandlungsformeln (14.1) erhält

$$\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Für den Bruch $\cos\alpha/\cos\beta$ findet man die Quasireziproke nach (14.2) zu

$$\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\beta+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\tan\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

In ähnlicher Weise findet man für $\tan\alpha/\tan\beta$ die Quasireziproke

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Für $\tan\alpha$ lautet sie

$$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{\tan 45^\circ-\tan\alpha}{1+\tan 45^\circ\tan\alpha}=\tan(45^\circ-\alpha)=\cot(\alpha+45^\circ).$$

15. Die Bedeutung der Additionstheoreme

Den Additionstheoremen, oft auch goniometrische Formeln genannt, kommt eine doppelte Bedeutung zu, eine praktische und eine theoretische.

Unter *Goniometrie* versteht man das Rechnen mit den Winkelfunktionen und deren Umformungen, ohne dabei zunächst mit der eigentlichen Trigonometrie, der Dreiecksberechnung, in Beziehung zu treten.

Die praktischen Anwendungsmöglichkeiten der Additionstheoreme sind vielgestaltig: Sie dienen der *Umformung und Vereinfachung trigonometrischer Ausdrücke*, der *Auflösung goniometrischer Gleichungen* und dem rechnerischen *Beweis geometrischer Sätze*. Aber auch rein algebraische Aufgaben, wie die *Auflösung quadratischer und kubischer Gleichungen*, lassen sich mit Hilfe der Additionstheoreme auf trigonometrischem Wege lösen. Nicht zuletzt erleichtern sie durch die Möglichkeit, Summen und Differenzen von trigonometrischen Funktionen in Produkte oder Quotienten zu verwandeln, in vielen Fällen die logarithmische Rechnung. — Den Additionstheoremen kommt aber auch eine hohe theoretische Bedeutung zu: So können zum Beispiel die trigonometrischen Funktionen allein aus den Additionstheoremen heraus definiert werden.

Dies ist zwar ein Problem der *Funktionalgleichungen*, gehört aber der Vollständigkeit halber dennoch in ein Buch über Trigonometrie, zumal es sich leichtverständlich darstellen läßt. — Schreibt man für $\sin\alpha = f(\alpha)$, $\cos\alpha = g(\alpha)$, $\sin\beta = f(\beta)$, $\cos\beta = g(\beta)$, so nehmen die Additionstheoreme (12.4a, b) für Sinus und Kosinus die Form

$$\begin{aligned} f(\alpha+\beta) &= f(\alpha)\,g(\beta)+f(\beta)\,g(\alpha),\\ g(\alpha+\beta) &= g(\alpha)\,g(\beta)-f(\alpha)\,f(\beta) \end{aligned} \qquad (15.1)$$

an. Die Gleichungen (15.1) werden als das *Funktionaltheorem der Kreisfunktionen* bezeichnet.

Um die Kreisfunktionen mit Hilfe der Additionstheoreme definieren zu können, ist die Aufgabe so zu formulieren: Es sind zwei Funktionen $f(\alpha)$ und $g(\alpha)$ gesucht, die den Bedingungen (15.1) genügen, wobei unter α, β wie bisher reelle Größen zu verstehen sind. — Einige spezielle Funktionswerte lassen sich nun auf folgende Art berechnen: Setzt man $\beta = 0$, dann wird aus den beiden Gleichungen (15.1)

$$\begin{aligned} &\text{(I):} & f(\alpha) &= f(\alpha)\,g(0)+f(0)\,g(\alpha),\\ &\text{(II):} & g(\alpha) &= g(\alpha)\,g(0)-f(\alpha)\,f(0). \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen werden leicht umgestellt:

$$\begin{aligned} &\text{(I}'\text{):} & g(\alpha)\,f(0)+f(\alpha)\,g(0) &= f(\alpha),\\ &\text{(II}'\text{):} & -f(\alpha)\,f(0)+g(\alpha)\,g(0) &= g(\alpha). \end{aligned}$$

(I′) und (II′) sind zwei lineare Gleichungen mit den Unbekannten $f(0)$ und $g(0)$, die nach der *CRAMERschen Regel* bestimmt werden:

$$f(0) = \frac{\begin{vmatrix} f(\alpha) & f(\alpha)\\ g(\alpha) & g(\alpha)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g(\alpha) & f(\alpha)\\ -f(\alpha) & g(\alpha)\end{vmatrix}} = 0, \qquad g(0) = \frac{\begin{vmatrix} g(\alpha) & f(\alpha)\\ -f(\alpha) & g(\alpha)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g(\alpha) & f(\alpha)\\ -f(\alpha) & g(\alpha)\end{vmatrix}} = 1.$$

Die Lösungen $f(0) = 0$ und $g(0) = 1$ sind eindeutig unter der Bedingung, daß der Nenner $f^2(\alpha)+g^2(\alpha)$ für jedes α von Null verschieden ist.

Weitere Gleichungen ergeben sich, wenn man in (15.1) $\beta = -\alpha$ setzt:

$$\text{(III)}: \qquad f(0) = f(\alpha)\, g(-\alpha) + f(-\alpha)\, g(\alpha),$$

$$\text{(IV)}: \qquad g(0) = g(\alpha)\, g(-\alpha) - f(\alpha)\, f(-\alpha).$$

Wird wieder umgestellt und das Ergebnis $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ mitbenutzt, so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\text{(III')}: \qquad g(\alpha)\, f(-\alpha) + f(\alpha)\, g(-\alpha) = 0,$$

$$\text{(IV')}: \qquad -f(\alpha)\, f(-\alpha) + g(\alpha)\, g(-\alpha) = 1.$$

Löst man jetzt nach $f(-\alpha)$ und $g(-\alpha)$ auf, so gibt die *CRAMERsche Regel*

$$\text{(V)}: \qquad f(-\alpha) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & f(\alpha) \\ 1 & g(\alpha) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g(\alpha) & f(\alpha) \\ -f(\alpha) & g(\alpha) \end{vmatrix}} = \frac{-f(\alpha)}{f^2(\alpha) + g^2(\alpha)},$$

$$\text{(VI)}: \qquad g(-\alpha) = \frac{\begin{vmatrix} g(\alpha) & 0 \\ -f(\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g(\alpha) & f(\alpha) \\ -f(\alpha) & g(\alpha) \end{vmatrix}} = \frac{g(\alpha)}{f^2(\alpha) + g^2(\alpha)},$$

d. h. $f(-\alpha)$ und $g(-\alpha)$ können durch $f(\alpha)$ und $g(\alpha)$ dargestellt werden. Im Nenner steht, wie schon vorhin, $f^2(\alpha) + g^2(\alpha)$; dieser Ausdruck darf, sollen die gefundenen Lösungen eindeutig bleiben, für keinen Wert von α verschwinden. Gelingt es, dafür einen absoluten Wert zu bestimmen, so ist die gestellte Aufgabe vollends lösbar. — Diese Absolutbestimmung von $f^2(\alpha) + g^2(\alpha)$ gelingt, indem man die Verträglichkeit aller gewonnenen Werte für $f(0)$, $g(0)$, $f(-\alpha)$ und $g(-\alpha)$ mit einer der beiden Funktionalgleichungen (15.1) nachprüft. Setzt man in der ersten $-\beta$ anstelle von β, so wird

$$\text{(VII)}: \qquad f(\alpha - \beta) = f(\alpha)\, g(-\beta) + f(-\beta)\, g(\alpha).$$

Werden nun in (VII) nach (V) und (VI) die Werte

$$f(-\beta) = -\frac{f(\beta)}{f^2(\beta) + g^2(\beta)} \quad \text{und} \quad g(-\beta) = \frac{g(\beta)}{f^2(\beta) + g^2(\beta)}$$

eingesetzt, so ergibt sich

$$f(\alpha - \beta) = \frac{f(\alpha)\, g(\beta)}{f^2(\beta) + g^2(\beta)} - \frac{f(\beta)\, g(\alpha)}{f^2(\beta) + g^2(\beta)},$$

oder

$$\text{(VII')}: \qquad f(\alpha - \beta) = \frac{f(\alpha)\, g(\beta) - f(\beta)\, g(\alpha)}{f^2(\beta) + g^2(\beta)}.$$

Wird nun genau dasselbe mit $-\alpha$ statt α gemacht, wobei β bleibt, so entsteht die Beziehung

$$\text{(VII'')}: \qquad f(-\alpha + \beta) = \frac{-f(\alpha)\, g(\beta) + f(\beta)\, g(\alpha)}{f^2(\alpha) + g^2(\alpha)}.$$

Nun gilt aber für die linke Seite von (VII'') $f(\alpha - \beta) = f\{-(-\alpha + \beta)\}$, also kann sowohl auf $f(\alpha - \beta)$ als auch auf $f(-\alpha + \beta)$ die Beziehung $f(-\alpha) = -\dfrac{f(\alpha)}{f^2(\alpha) + g^2(\alpha)}$ angewandt

werden. Dies führt zu der Identität

$$\text{(VIII)}: \quad \frac{-f(\alpha)\,g(\beta)+f(\beta)\,g(\alpha)}{f^2(\alpha)+g^2(\alpha)} = \frac{-f(\alpha)\,g(\beta)+f(\beta)\,g(\alpha)}{\{f^2(\beta)+g^2(\beta)\}\{f^2(\alpha-\beta)+g^2(\alpha-\beta)\}};$$

woraus folgt, daß

$$\text{(IX)}: \quad f^2(\alpha)+g^2(\alpha) = \{f^2(\beta)+g^2(\beta)\}\{f^2(\alpha-\beta)+g^2(\alpha-\beta)\}$$

ist. Gesucht ist ja ein absoluter Wert für den Ausdruck $f^2(\varphi)+g^2(\varphi)$, der in (IX) dreimal, je mit verschiedenen Argumenten, auftritt, einmal mit α, dann mit β, schließlich mit $\alpha-\beta$. Es gibt zwei Lösungen für diese Identität, nämlich entweder $f^2(\varphi)+g^2(\varphi) = 0$ oder $f^2(\varphi)+g^2(\varphi) = 1$ für jedes beliebige φ. Die erste Lösung wurde schon eingangs ausgeschlossen, also bleibt nur die zweite, nämlich

$$\text{(X)}: \quad f^2(\varphi)+g^2(\varphi) = 1 \text{ für jedes beliebige } \varphi.$$

Nun wird nach (V) und (VI) $f(-\alpha) = -f(\alpha)$ und $g(-\alpha) = g(\alpha)$, und alle übrigen Relationen im Zusammenhang mit den Gleichungen (15.1) und den bisherigen Ergebnissen sind, wie der Leser selbst nachrechnen möge, widerspruchsfrei oder konsistent.

Die gestellte Aufgabe ist damit gelöst; denn die Beziehung (X), $f^2(\alpha)+g^2(\alpha) = 1$ kann geometrisch durch den Einheitskreis dargestellt werden, dessen Punkten die Koordinaten $x = g(\alpha)$, $y = f(\alpha)$ zukommen. Das aber ist identisch mit der in [8] vorgenommenen Definition der Kreisfunktionen. Zu weiteren Schlüssen und Lösungen, welche die Funktionalgleichungen (15.1) noch zulassen mögen, ist hier keine Veranlassung mehr.[29]

Endlich enthalten die Additionstheoreme auch die *arithmetische (zahlenmäßige) Definition der trigonometrischen Funktionen:* Ausgehend von den Werten $\sin 90° = 1$ und $\cos 90° = 0$ können nämlich, wie in [16] zu zeigen ist, zunächst durch fortlaufende Winkelhalbierung die Funktionen beliebig kleiner Winkel und sodann durch Zusammensetzen beliebig kleiner Winkel mittels der Additionstheoreme auch die Funktionen beliebiger Winkel ausgedrückt werden. — Die Additionstheoreme bilden also auch das Bindeglied zwischen Arithmetik und Geometrie.

[29] Erschöpfende Auskunft darüber finden interessierte Leser in dem Buch „Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen“ von L. ACZÉL (Verlag Birkhäuser, Basel, Stuttgart 1961).

Kapitel 4: Berechnung der trigonometrischen Funktionen

16. Strenge Formeln für die trigonometrischen Funktionen bestimmter Winkel

Die strenge Berechnung der trigonometrischen Funktionen für die Winkel 15°, 18°, 30°, 36°, 45°, 54°, 60°, 72°, 75°, 90° wurde schon in [7] ausgeführt. — Die Additionstheoreme bieten nun die Möglichkeit, daraus durch fortgesetzte Halbierung sowie durch Addition und Subtraktion dieser Winkel die trigonometrischen Funktionen einer unendlich großen Anzahl spitzer Winkel durch strenge Wurzelausdrücke darzustellen. — Obgleich diese Formeln für die Berechnung der trigonometrischen Funktionen kaum mehr von Bedeutung sind — dies geschieht heute ausnahmslos mit Hilfe von Reihenentwicklungen (vgl. [18]) —, gehören sie als interessante Anwendung der Additionstheoreme in ein Trigonometriebuch.

Zunächst zur *Winkelhalbierung:* Mit Hilfe der Gleichungen (13.3)

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}, \quad \cos\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$$

erhält man zum Beispiel, von $\cos 90° = 0$ ausgehend, für den Winkel 45° die Funktionswerte

$$\sin 45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos 45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Daraus ergeben sich durch nochmalige Halbierung die Funktionswerte für 22,5° zu

$$\sin 22{,}5° = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$\cos 22{,}5° = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

In gleicher Weise findet man

$$\sin 11{,}25^\circ = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$\cos 11{,}25^\circ = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Schreibt man auch die Funktionswerte für das nochmals halbierte Argument an,

$$\sin 5{,}625^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

$$\cos 5{,}625^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

so ist das *Bildungsgesetz dieser Kettenwurzel* leicht zu erkennen: Von $\cos 90^\circ = 0$ ausgehend, ergeben sich Sinus und Kosinus eines Winkels $\varphi = \frac{90^\circ}{2^n}$, wobei n eine ganze Zahl ist, zu

$$\sin\frac{90^\circ}{2^n} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}},$$

$$\cos\frac{90^\circ}{2^n} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}, \tag{16.1}$$

wobei die 2 unter der Kettenwurzel n-mal auftritt.

Ein noch übersichtlicheres Bildungsgesetz für die Kettenwurzeln ergibt sich unmittelbar aus den Gleichungen (13.3): Um, von $\cos\varphi$ ausgehend, $\sin(\varphi/2)$, $\cos(\varphi/2)$, $\sin(\varphi/4)$, $\cos(\varphi/4)$ usw. zu bilden, setzt man $\cos\varphi = p$ und erhält

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-p}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-2p}, \qquad \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+p}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2p}.$$

Setzt man jetzt $\cos(\varphi/2) = (1/2)\sqrt{2+2p} = q$, so folgen daraus die Formeln für den nochmals halbierten Winkel

$$\sin\frac{\varphi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2-2q} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+2p}},$$

$$\cos\frac{\varphi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2q} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+2p}}.$$

Ebenso wird mit $\cos\frac{\varphi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+2p}} = r$ jetzt

$$\sin\frac{\varphi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-2r} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2p}}},$$

$$\cos\frac{\varphi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2r} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2p}}}.$$

Die beliebig weit fortgesetzte Halbierung eines durch seinen Kosinus gegebenen Winkels φ führt also auf die Sinus und Kosinus der Winkel $\varphi/2$, $\varphi/4$, $\varphi/8$ usf. Hier noch eine Zusammenstellung der Formeln:
Mit $\cos\varphi = p$ wird

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-2p}, \qquad \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2p},$$

$$\sin\frac{\varphi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+2p}}, \qquad \cos\frac{\varphi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+2p}}, \tag{16.2}$$

$$\sin\frac{\varphi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2p}}}, \quad \cos\frac{\varphi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2p}}},$$

usf.

Die Anwendungsmöglichkeit der in (16.2) stehenden Formeln ist vielgestaltig; so erhält man z. B., ausgehend von $\cos 60° = 1/2$, noch folgende Funktionswerte:

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}, \qquad \cos 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$\sin 7{,}5° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}, \qquad \cos 7{,}5° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

$$\sin 3{,}75° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}, \quad \cos 3{,}75° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}},$$

usf.

Dabei ist zu beachten, daß jede der Formeln in (16.1) und (16.2) sofort Funktionswerte zweier spitzer Winkel liefert; denn nach dem Komplementsatz ist $\sin 15° = \cos 75°$, $\cos 15° = \sin 75°$ usf.

Die durch fortlaufende Halbierung eines beliebigen, durch seinen Kosinus gegebenen Winkels φ abgeleiteten Ausdrücke für die Sinusse, Kosinusse, Tangens und Kotangens der Winkel $\varphi/2, \varphi/4, \varphi/8, \ldots$ enthalten nur Quadratwurzeln.

Aber nicht nur die fortgesetzte Halbierung der bisher betrachteten Winkel 90°, 60°, 45° usf., sondern auch die *lineare Kombination* dieser Winkel bietet die Möglichkeit, die Funktionen weiterer Winkel durch strenge Wurzelausdrücke darzustellen: Zum Beispiel können schon jetzt alle Winkel von 3° zu 3° des ersten Quadranten durch die Kombinationen $\varphi+\psi$ oder $\varphi-\psi$ aus den Winkeln 15°, 18°, 30°, 36°, 45°, 54°, 60°, 72°, 75° dargestellt werden, d. h. auch für die Funktionen aller Winkel von 3° zu 3° lassen sich strenge Wurzelausdrücke angeben.

Mit

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}, \qquad \cos 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1), \qquad \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

erhält man somit

$$\begin{aligned}\sin 3^\circ &= \cos 87^\circ = \sin(18^\circ-15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ = \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{16}(\sqrt{30}-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{2}) - \frac{1}{8}\sqrt{20+4\sqrt{5}-10\sqrt{3}-2\sqrt{15}} = \\ &= \frac{1}{16}\left(\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{20+4\sqrt{5}-10\sqrt{3}-2\sqrt{15}}\right).\end{aligned}$$

Ebenso findet man

$$\begin{aligned}\sin 6^\circ &= \cos 84^\circ = \sin(36^\circ-30^\circ) = \\ &= \frac{1}{8}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 9^\circ &= \cos 81^\circ = \sin(45^\circ-36^\circ) = \\ &= \frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 12^\circ &= \cos 78^\circ = \sin(30^\circ-18^\circ) = \\ &= \frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 21^\circ &= \cos 69^\circ = \sin(36^\circ-15^\circ) = \\ &= \frac{1}{8}\left(\sqrt{15-3\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}-\sqrt{10-5\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right),\end{aligned}$$

$$\sin 24^\circ = \cos 66^\circ = \sin(54^\circ - 30^\circ) = \\ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$\sin 27^\circ = \cos 63^\circ = \sin(45^\circ - 18^\circ) = \\ = \frac{1}{8}\left(2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{10}+\sqrt{2}\right),$$

$$\sin 33^\circ = \cos 57^\circ = \sin(15^\circ + 18^\circ) = \\ = \frac{1}{16}\left(2\sqrt{20+4\sqrt{5}-10\sqrt{3}-2\sqrt{15}}+\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}\right),$$

$$\sin 39^\circ = \cos 51^\circ = \sin(54^\circ - 15^\circ) = \\ = \frac{1}{16}\left(\sqrt{30}+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{20+2\sqrt{15}-4\sqrt{5}-10\sqrt{3}}\right),$$

$$\sin 42^\circ = \cos 48^\circ = \sin(60^\circ - 18^\circ) = \\ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right),$$

$$\sin 48^\circ = \cos 42^\circ = \sin(30^\circ + 18^\circ) = \\ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right),$$

$$\sin 51^\circ = \cos 39^\circ = \sin(36^\circ + 15^\circ) = \\ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{15-3\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{10-5\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right),$$

$$\sin 57^\circ = \cos 33^\circ = \sin(72^\circ - 15^\circ) = \\ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{15+3\sqrt{5}}+\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{10-5\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right),$$

$$\sin 63^\circ = \cos 27^\circ = \sin(45^\circ + 18^\circ) = \\ = \frac{1}{8}\left(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{10}-\sqrt{2}\right),$$

$$\sin 66^\circ = \cos 24^\circ = \sin(36^\circ + 30^\circ) = \\ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right),$$

$$\sin 69^\circ = \cos 21^\circ = \sin(54^\circ + 15^\circ) = \\ = \frac{1}{16}\left(\sqrt{30}+\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{20+2\sqrt{15}-4\sqrt{5}-10\sqrt{3}}\right),$$

$$\sin 78^\circ = \cos 12^\circ = \sin(60^\circ + 18^\circ) =$$
$$= \frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1\right),$$
$$\sin 81^\circ = \cos 9^\circ = \sin(45^\circ + 36^\circ) =$$
$$= \frac{1}{8}\left(\sqrt{10} + \sqrt{2} + 2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right),$$
$$\sin 84^\circ = \cos 6^\circ = \sin(54^\circ + 30^\circ) =$$
$$= \frac{1}{8}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{15} + \sqrt{3}\right),$$
$$\sin 87^\circ = \cos 3^\circ = \sin(72^\circ + 15^\circ) =$$
$$= \frac{1}{8}\left(\sqrt{15+3\sqrt{5}} + \sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{10-5\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right).$$

17. Die Funktionen kleiner Winkel

Für spitze Winkel φ gilt nach Abb. 17.1 die *Ungleichung*

$$\sin\varphi < \operatorname{arc}\varphi < \tan\varphi. \tag{17.1}$$

Der Nachweis von (17.1) ist einfach: Der Bogen $\overset{\frown}{AB}$ des um O gezeichneten Einheitskreises ist gleich arc φ; die Länge des Lotes $\overline{BF} \perp \overline{OA}$ ist gleich sin φ und $\overline{AT} = \tan\varphi$. Vergleicht man die Flächen von

$$\triangle OFB: F' = \frac{\sin\varphi}{2},$$
$$\text{Sektor } OAB: F'' = \frac{\operatorname{arc}\varphi}{2},$$
$$\triangle OAT: F''' = \frac{\tan\varphi}{2},$$

so gilt wegen $F' < F'' < F'''$ auch

$$\sin\varphi < \operatorname{arc}\varphi < \tan\varphi.$$

Abb. 17.1

Übrigens hat man in $\sin\varphi < \operatorname{arc}\varphi$ eine obere Schranke für sin φ gewonnen; um auch eine untere Schranke zu bilden, schreibt man $\tan\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi > \widehat{\varphi}$ und erhält $\sin\varphi > \widehat{\varphi}\cos\varphi$. Also gilt

$$\widehat{\varphi}\cos\varphi < \sin\varphi < \widehat{\varphi}. \tag{17.1a}$$

Aus (17.1a) läßt sich eine weitere interessante Ungleichung ableiten: Aus $\tan\varphi > \widehat{\varphi}$ folgt $\sin\varphi/\widehat{\varphi} > \cos\varphi$. Ferner ist nach (17.1a) auch $(\pi/2-\widehat{\varphi}) > \sin(\pi/2-\widehat{\varphi})$ oder $\pi/2-\widehat{\varphi} > \cos\varphi$. Die Multiplikation der beiden Ungleichungen gibt

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin\varphi}{\widehat{\varphi}} - \sin\varphi > \cos^2\varphi \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2}\,\frac{\sin\varphi}{\widehat{\varphi}} > \sin\varphi + \cos^2\varphi.$$

Nun ist aber sicher $\sin\varphi + \cos^2\varphi > \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, also wird

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin\varphi}{\widehat{\varphi}} > 1 \quad \text{oder} \quad \sin\varphi > \frac{2}{\pi}\,\widehat{\varphi}.$$

Die Schranken für $\sin\varphi$ lauten jetzt

$$\frac{2}{\pi}\,\widehat{\varphi} < \sin\varphi < \widehat{\varphi}. \tag{17.1b}$$

Eine andere Form für die untere Schranke von $\sin\varphi$ ergibt sich wie folgt: Es ist

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2\tan\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} = 2\tan\frac{\varphi}{2}\left(1-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Nun ist $\tan\frac{\varphi}{2} > \frac{\widehat{\varphi}}{2}$, $\sin\frac{\varphi}{2} < \frac{\widehat{\varphi}}{2}$, also $1-\sin^2\frac{\varphi}{2} > 1-\frac{\widehat{\varphi}^2}{4}$; also wird

$$\sin\varphi > \widehat{\varphi}\left(1-\frac{\widehat{\varphi}^2}{4}\right) = \widehat{\varphi}-\frac{\widehat{\varphi}^3}{4},$$

womit (17.1b) auch in der Form

$$\widehat{\varphi}-\frac{\widehat{\varphi}^3}{4} < \sin\varphi < \widehat{\varphi} \tag{17.1c}$$

geschrieben werden kann.

Durch $\sin\varphi$ bzw. $\tan\varphi$ dividiert, entstehen aus (17.1) die Ungleichungen

$$1 < \frac{\operatorname{arc}\varphi}{\sin\varphi} < \frac{1}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \cos\varphi < \frac{\operatorname{arc}\varphi}{\tan\varphi} < 1. \tag{17.2}$$

Für unbegrenzt abnehmendes φ nähern sich $\cos\varphi$ und $1/\cos\varphi$ unbeschränkt der Einheit, so daß die Gleichungen (17.2) übergehen in die *Grenzwerte*

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\operatorname{arc}\varphi}{\sin\varphi} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\varphi\to 0}\frac{\operatorname{arc}\varphi}{\tan\varphi} = 1. \tag{17.3a}$$

Der erste, in (17.3a) stehende Grenzwert, der in der Mathematik eine bedeutende Rolle spielt und meist in der Form $\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\widehat{\varphi}} = 1$ geschrieben wird, folgt unmittelbar auch aus (17.1c).

Aus (17.3a) folgt, daß die Kreisbögen kleiner Winkel angenähert mit ihren Funktionswerten Sinus und Tangens übereinstimmen. Für $\varphi = 2°$ gilt z. B. $\operatorname{arc}\varphi = 0{,}03490$, $\sin\varphi = 0{,}03490$, $\tan\varphi = 0{,}03492$.

Hierauf beruht übrigens eine sehr einfache *Berechnung des natürlichen Winkel- oder Bogenmaßes*. Für $\varphi = \varphi_n = 360°/2n$, also $\operatorname{arc}\varphi_n = 2\pi/2n$, geht die erste Ungleichung von (17.2) über in

$$1 < \frac{\frac{2\pi}{2n}}{\sin\varphi_n} < \frac{1}{\cos\varphi_n},$$

woraus man durch Multiplikation mit $n \sin \varphi_n$ die Ungleichung

$$n \sin \varphi_n < \pi < n \tan \varphi_n \tag{17.4a}$$

erhält. Der Vergleich von (17.4a) mit den in [5] abgeleiteten Formeln für den Umfang des dem Einheitskreis ein- bzw. umbeschriebenen n-Eckes, $u_n = 2n \sin(360°/2n)$, $U_n = 2n \tan(360°/2n)$, zeigt, daß (17.4a) auch in der Form

$$\frac{1}{2} u_n < \pi < \frac{1}{2} U_n \tag{17.4b}$$

geschrieben werden kann. (17.4b) ermöglicht eine *genäherte Berechnung von π* und somit auch die Berechnung des Bogenmaßes von Winkeln.

Beispiel: Schon für $n = 1920$ erhält man daraus einen guten Näherungswert von π. Es wird nämlich $(1/2)\, u_{1920} = 3{,}14159$, $(1/2)\, U_n = 3{,}14160$, also liegt π nach (17.4b) innerhalb der Grenzen $3{,}14159 < \pi < 3{,}14160$; der Sollwert dagegen lautet $3{,}14159\ldots$. Dasselbe Resultat erhält man auch unmittelbar aus (17.4a): Mit $n = 1920$ wird $\varphi_n = 360°/2 \cdot 1920 = 5'37{,}5''$; ist nun $\cos 3°$ z. B. nach (16.1) berechnet, $\cos 3° = 0{,}9986\,295\,384$, so lassen sich daraus durch fünfmaliges Halbieren des Arguments ($\varphi_n = 3° : 2^5$) die Funktionswerte $\sin \varphi_n = 0{,}001\,636\,246$, $\cos \varphi_n = 0{,}999\,999\,999$, $\tan \varphi_n = 0{,}001\,636\,248$ und $\pi = 3{,}14159$ berechnen. Eine Reihenformel für die Berechnung von π wird in [45] angegeben.

Auch der Sinus sehr kleiner Winkel φ kann mit Hilfe von (17.1) abgeschätzt werden: Wegen $\cos \varphi \approx 1$ gilt in erster Annäherung

$$\sin \varphi \approx \operatorname{arc} \varphi. \tag{17.5a}$$

Eine Abschätzung des dabei begangenen Fehlers ist auf folgende Weise möglich: Nach der ersten Ungleichung von (17.2) ist $\sin \varphi > \operatorname{arc} \varphi \cos \varphi$; nach (17.1) ist $\operatorname{arc} \varphi > \sin \varphi$, also gilt auch die Ungleichung

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} > 1 - 2 \left(\operatorname{arc} \frac{\varphi}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \varphi)^2. \tag{17.5b}$$

Also wird

$$\sin \varphi > \operatorname{arc} \varphi \left[1 - \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \varphi)^2\right] = \operatorname{arc} \varphi - \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \varphi)^3. \tag{17.5c}$$

Der in (17.5a) begangene Fehler bleibt also $< \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \varphi)^3$.

Zum Beispiel ist $\operatorname{arc} 10' = 0{,}00290888$, $\frac{1}{2} (\operatorname{arc} 10')^3 = 1 \cdot 10^{-8}$; für Winkel $\varphi \leqq 10'$ stimmen also Bogen und Sinus bis auf sieben bedeutsame Stellen überein.

Für den Kosinus eines sehr kleinen Winkels gilt nach (17.2) die Näherung

$$\cos \varphi \approx 1. \tag{17.6a}$$

Von $\cos\varphi = 1-2\sin^2\frac{\varphi}{2} > 1-2\left(\text{arc}\,\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 1-\frac{1}{2}(\text{arc}\,\varphi)^2$ ausgehend, erkennt man, daß der Fehler in (17.6a) kleiner als $(1/2)(\text{arc}\,\varphi)^2$ bleibt; für $\varphi = 10'$ wird $(1/2)(\text{arc}\,\varphi)^2 = 4\cdot 10^{-6}$, d. h. für Winkel $\varphi \leqq 10'$ ist die Näherung (17.6a) bis auf fünf bedeutsame Stellen richtig.

Eine bessere Näherung für $\cos\varphi$ folgt aus (17.5b)

$$\cos\varphi = 1-\frac{1}{2}(\text{arc}\,\varphi)^2, \tag{17.6b}$$

die immer gilt, solange $\sin(\varphi/2) = (1/2)\,\text{arc}\,\varphi$ gesetzt werden kann. Um den in (17.6b) begangenen Fehler abzuschätzen, setzt man in $\cos\varphi = 1-2\sin^2(\varphi/2)$ für $\sin(\varphi/2)$ nach (17.5c) den zu kleinen Wert $(1/2)\,\text{arc}\,\varphi[1-(1/8)(\text{arc}\,\varphi)^2]$; dann ergibt sich

$$\cos\varphi < 1-\frac{1}{2}(\text{arc}\,\varphi)^2+\frac{1}{8}(\text{arc}\,\varphi)^4-\frac{1}{128}(\text{arc}\,\varphi)^6, \tag{17.6c}$$

d. h. der Fehler in (17.6b) ist kleiner als $(1/8)(\text{arc}\,\varphi)^4$.

Übrigens können auch für $\cos\varphi$ Schranken angegeben werden: Bildet man aus (17.1c) für $\frac{\widehat{\varphi}}{2}$

$$\frac{\widehat{\varphi}}{2}-\frac{\widehat{\varphi}^3}{32} < \sin\frac{\varphi}{2} < \frac{\widehat{\varphi}}{2}$$

und quadriert

$$\frac{\widehat{\varphi}^2}{4}-\frac{\widehat{\varphi}^4}{32} < \sin^2\frac{\varphi}{2} < \frac{\widehat{\varphi}^2}{4},$$

so folgt wegen $\cos\varphi = 1-2\sin^2(\varphi/2)$ schließlich

$$1-\frac{\widehat{\varphi}^2}{2} < \cos\varphi < 1-\frac{\widehat{\varphi}^2}{2}+\frac{\widehat{\varphi}^4}{16}. \tag{17.6d}$$

Den oben abgeleiteten Näherungsformeln können noch *weitere Ungleichungen* hinzugefügt werden, die mitunter bei Abschätzungen gute Dienste leisten. Z. B. gilt für spitze Winkel

$$\widehat{\varphi}-\sin\varphi < \tan\varphi-\widehat{\varphi}. \tag{17.7a}$$

Der Nachweis von (17.7a) ist einfach: Drückt man $\sin\varphi$ und $\tan\varphi$ durch $\tan(\varphi/2) = t$ aus, also

$$\sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan\varphi = \frac{2t}{1-t^2},$$

so wird

$$\sin\varphi+\tan\varphi = \frac{4t}{1-t^4}.$$

Daraus folgt

$$\sin\varphi+\tan\varphi > 4t = 4\tan\frac{\varphi}{2}.$$

Da ferner $\tan(\varphi/2) > \widehat{\varphi}/2$ und mithin $4\tan(\varphi/2) > 2\widehat{\varphi}$ ist, folgt somit

$$\sin\varphi + \tan\varphi > 2\widehat{\varphi}$$

oder

$$\tan\varphi - \widehat{\varphi} > \widehat{\varphi} - \sin\varphi,$$

w.z.b.w.

Weiter gelten für spitze Winkel die Ungleichungen

$$\tan\varphi > \widehat{\varphi} + \frac{1}{3}\widehat{\varphi}^3, \tag{17.7b}$$

$$\widehat{\varphi} < \frac{2}{3}\sin\varphi + \frac{1}{3}\tan\varphi, \tag{17.7c}$$

die mit Hilfe der obenstehenden Näherungsformeln nachgewiesen werden können.

18. Reihenentwicklungen der Winkelfunktionen

Vorweg sei bemerkt, daß die Ableitung der bekannten NEWTONschen Reihe für Sinus und Kosinus Aufgabe der Höheren Mathematik ist. Hier soll gezeigt werden, wie *die trigonometrischen Funktionen als Potenzreihen ihrer Argumente* dargestellt werden können.

Potenzreihen sind Reihen, die nach steigenden Potenzen ihres Arguments fortschreiten; sie haben die Form

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots,$$

wobei $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ konstante Größen sind.

Die Potenzreihe für die sin-Funktion kann auf folgende Weise abgeleitet werden: Da der Sinus eine ungerade Funktion ist, können in seiner Potenzreihe nur ungerade Potenzen auftreten; also hat der Ansatz zu lauten

$$\sin\varphi = a_1\widehat{\varphi} + a_3\widehat{\varphi}^3 + a_5\widehat{\varphi}^5 + a_7\widehat{\varphi}^7 + a_9\widehat{\varphi}^9 + \ldots,$$

wobei zur Abkürzung für $\varphi^\circ/\varrho^\circ$ wieder $\widehat{\varphi}$ gesetzt ist. Die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ergeben sich so: Dividiert man durch $\widehat{\varphi}$, so wird

$$\frac{\sin\varphi}{\widehat{\varphi}} = a_1 + a_3\widehat{\varphi}^2 + a_5\widehat{\varphi}^4 + \ldots;$$

nun gilt nach (17.3) der Grenzwert

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\widehat{\varphi}} = 1;$$

also muß $a_1 = 1$ sein, weil alle übrigen Glieder $a_3\widehat{\varphi}^2, a_5\widehat{\varphi}^4, \ldots$ für $\varphi = 0$ verschwinden.

Ganz entsprechend bildet man weiter

$$\frac{\frac{\sin\varphi}{\widehat{\varphi}}-a_1}{\widehat{\varphi}^2} = \frac{\frac{\sin\varphi}{\widehat{\varphi}}-1}{\widehat{\varphi}^2} = a_3+a_5\widehat{\varphi}^3+\ \dots,$$

woraus sich für $\varphi \to 0$ auch a_3 angeben läßt. Vor dem Grenzübergang ist aber der Quotient, der für $\varphi \to 0$ die Form 0/0 annimmt, also unbestimmt wird, noch umzuformen. Setzt man $\varphi = 3\varphi/3$ und drückt $\sin\varphi = \sin(3\varphi/3)$ nach (13.10) aus, so wird

$$a_3 = \left(\frac{\frac{3\sin\frac{\varphi}{3}-4\sin^3\frac{\varphi}{3}}{\widehat{\varphi}}-1}{\widehat{\varphi}^2}\right)_{\varphi\to 0} = \left(\frac{\frac{\sin\frac{\varphi}{3}-\frac{4}{3}\sin^3\frac{\varphi}{3}}{\frac{\widehat{\varphi}}{3}}-1}{\widehat{\varphi}^2}\right)_{\varphi\to 0}.$$

Benützt man für $\sin\frac{\varphi}{3}$ den gleichen Ansatz wie für $\sin\varphi$, also

$$\sin\frac{\varphi}{3} = \frac{\widehat{\varphi}}{3}+a_3\left(\frac{\widehat{\varphi}}{3}\right)^3+a_5\left(\frac{\widehat{\varphi}}{3}\right)^5+a_7\left(\frac{\widehat{\varphi}}{3}\right)^7+\ \dots,$$

so wird jetzt

$$a_3 = \left(\frac{\frac{\widehat{\varphi}}{3}+a_3\left(\frac{\widehat{\varphi}}{3}\right)^3+a_5\left(\frac{\widehat{\varphi}}{3}\right)^5+\ \dots\ -\frac{4}{3}\left[\left(\frac{\widehat{\varphi}}{3}\right)^3+3a_3\left(\frac{\widehat{\varphi}}{3}\right)^4+\ \dots\right]-\frac{\widehat{\varphi}}{3}}{\frac{\widehat{\varphi}^3}{3}}\right)_{\varphi\to 0},$$

oder, wenn man dividiert,

$$a_3 = \left(a_3\frac{1}{3^2}+a_5\frac{\widehat{\varphi}^2}{3^4}+\ \dots\ -\frac{4}{3}\left[\frac{1}{3^2}+3a_3\frac{\widehat{\varphi}}{3^3}+\dots\right]\right)_{\varphi\to 0}.$$

Geht man wieder zur Grenze über ($\varphi \to 0$), so wird also

$$a_3 = \frac{1}{3^2}a_3-\frac{4}{3^3},\quad \text{d. h.}\quad a_3 = -\frac{1}{2\cdot 3} = -\frac{1}{3!},$$

wobei zur Abkürzung $3! = 1\cdot 2\cdot 3$ eingeführt ist.

Allgemein wird das Produkt $1\cdot 2\cdot 3\ \dots\ n$ der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ mit $n!$ (sprich n-Fakultät) abgekürzt.

In derselben Weise läßt sich a_5 aus

$$a_5 = \left(\frac{\sin \varphi - \widehat{\varphi} + \frac{\widehat{\varphi}^3}{3!}}{\widehat{\varphi}^5} \right)_{\varphi \to 0}$$

bestimmen: Mit $\varphi = 5\,\varphi/5$, also
$\sin(5\varphi/5) = 5\sin(\varphi/5) - 20\sin^3(\varphi/5) + 16\sin^5(\varphi/5)$ [vgl. (13.12)], und mit dem Ansatz für $\sin(\varphi/5)$

$$\sin\frac{\varphi}{5} = \frac{\widehat{\varphi}}{5} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\widehat{\varphi}}{5}\right)^3 + a_5\left(\frac{\widehat{\varphi}}{5}\right)^5 + \ldots$$

erhält man — da für $\varphi \to 0$ alle höheren Potenzen wegfallen, genügt es, die Reihe bis zur 5. Potenz anzuschreiben — für a_5

$$a_5 = \left(\frac{5\frac{\widehat{\varphi}}{5} - \frac{5(\widehat{\varphi})^3}{5^3 \cdot 3!} + 5a_5\left(\frac{\widehat{\varphi}}{5}\right)^5 + \ldots - 20\left[\left(\frac{\widehat{\varphi}}{5}\right)^3 - 3\frac{1}{3!}\left(\frac{\widehat{\varphi}}{5}\right)^5 + \ldots\right]}{\widehat{\varphi}^5} \right.$$

$$\left. \frac{+16\left[\left(\frac{\widehat{\varphi}}{5}\right)^5 + \ldots\right] - \widehat{\varphi} + \frac{\widehat{\varphi}^3}{3!}}{\widehat{\varphi}^5} \right)_{\varphi \to 0}.$$

Dividiert man durch $\widehat{\varphi}^5$ und geht dann zur Grenze $(\varphi \to 0)$ über, so wird

$$a_5 = 5a_5 \cdot \frac{1}{5^5} + \frac{60}{3!} \cdot \frac{1}{5^5} + \frac{16}{5^5} \quad \text{oder} \quad a_5 = \frac{1}{5!}.$$

Auch die weiteren Koeffizienten a_7, a_9, ... können nach diesem Verfahren bestimmt werden; es ergibt sich

$$a_7 = -\frac{1}{7!}, \quad a_9 = +\frac{1}{9!}, \quad a_{11} = -\frac{1}{11!} \quad \text{usf.}$$

Also lautet die Potenzreihe für den Sinus

$$\sin\varphi = \widehat{\varphi} - \frac{\widehat{\varphi}^3}{3!} + \frac{\widehat{\varphi}^5}{5!} - \frac{\widehat{\varphi}^7}{7!} + \frac{\widehat{\varphi}^9}{9!} - \frac{\widehat{\varphi}^{11}}{11!} + \ldots. \tag{18.1}$$

Ausdrücklich ist zu bemerken, daß die hier gegebene Ableitung elementar ist und keinesfalls als Existenzbeweis im Sinne der Höheren Mathematik gelten kann.

Die Mathematik benützt für die Ableitung von (18.1) die MACLAURIN*sche Formel*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{18.2a}$$

wonach die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch die Reihe (18.2a) dargestellt

werden kann, vorausgesetzt, daß alle Ableitungen von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ existieren. Das Glied $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1}$ mit $0 < \xi < x$ heißt das *Restglied* $R(x)$.

Bildet man die Ableitungen von $\sin x$, so erhält man $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x$, oder mit $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} f^{(4n)}(x) &= \sin x, & f^{(4n+1)}(x) &= \cos x, \\ f^{(4n+2)}(x) &= -\sin x, & f^{(4n+3)}(x) &= -\cos x. \end{aligned}$$

Also lauten die Ableitungen an der Stelle $x = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ allgemein $f^{(4n)}(0) = 0, f^{(4n+1)}(0) = 1, f^{(4n+2)}(0) = 0, f^{(4n+3)}(0) = -1$, und nach (18.2a) wird jetzt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} + \frac{\sin \xi}{(4n+4)!} \cdot x^{4n+4}. \quad (18.2b)$$

Die *Abschätzung des Restgliedes* gibt $\lim_{n\to\infty} R(x) = 0$, also lautet die Potenzreihe für den Sinus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}. \quad (18.2c)$$

Die *Potenzreihe für den Kosinus* kann wie folgt gewonnen werden: Nach (13.2) gilt $\cos 2\psi = 1 - 2\sin^2 \psi$. Ersetzt man darin $2\sin^2 \psi$ nach (18.1), so wird

$$\cos 2\psi = 1 - 2\left[\widehat{\psi} - \frac{\widehat{\psi}^3}{3!} + \frac{\widehat{\psi}^5}{5!} - \frac{\widehat{\psi}^7}{7!} + \ldots\right]^2$$

oder

$$\cos 2\psi = 1 - 2\left[\widehat{\psi}^2 - 2\frac{\widehat{\psi}^4}{3!} + \left(\frac{2}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right)\widehat{\psi}^6 - 2\left(\frac{1}{7!} + \frac{1}{3!\,5!}\right)\widehat{\psi}^8 + \ldots\right],$$

woraus mit $2\psi = \varphi$ nach leichter Rechenarbeit

$$\cos\varphi = 1 - 2\frac{\widehat{\varphi}^2}{4} + \frac{4\cdot\widehat{\varphi}^4}{2^4\cdot 3!} - 2\left(\frac{2}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right)\frac{\widehat{\varphi}^6}{2^6} + 4\left(\frac{1}{7!} + \frac{1}{3!\,5!}\right)\frac{\widehat{\varphi}^8}{2^8} \ldots$$

folgt, oder schließlich

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\widehat{\varphi}^2}{2!} + \frac{\widehat{\varphi}^4}{4!} - \frac{\widehat{\varphi}^6}{6!} + \frac{\widehat{\varphi}^8}{8!} \ldots. \quad (18.3a)$$

Für Potenzreihen gilt, wie ohne Ableitung mitgeteilt werden soll, folgendes *Konvergenzkriterium:* Hat in der Potenzreihe $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ der Quotient $|a_{n+1} : a_n|$ einen endlichen Grenzwert G, so konvergieren sowohl $f(x)$ als auch die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ in dem Intervall $-\alpha$ bis $+\alpha$ gleichmäßig und absolut, wenn $0 < \alpha < 1/G$ ist. Im Sonderfall $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 0$ konvergiert $f(x)$ für jeden endlichen Wert von x gleichmäßig und absolut. — Offenbar konvergieren demnach die Potenzreihen für Sinus und Kosinus in jedem endlichen Intervall gleichmäßig. — Da die Potenzreihe für $\sin x$ für alle Werte von x konvergiert, kann die Reihe für $f(x) = \cos x = (\sin x)'$ daraus unmittelbar durch gliedweise Differentiation von (18.2c)

gewonnen werden; dabei ergibt sich

$$\cos x = (\sin x)' = 1-\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}-\frac{7x^6}{7!}+ \dots$$
$$= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (18.3b)$$

Eine weitere Möglichkeit für die Ableitung der Potenzreihen von Sinus und Kosinus bietet die *Formel von* MOIVRE (vgl. [39]).

Die *Tangensreihe* ergibt sich in einfacher Weise aus dem Ansatz

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = b_0+b_1\widehat{\varphi}+b_2\widehat{\varphi}^2+b_3\widehat{\varphi}^3+b_4\widehat{\varphi}^4+\dots,$$

wobei die Koeffizienten b_0, b_2, b_4, b_6, ... Null sein müssen, weil der Tangens eine ungerade Funktion ist, also alle geraden Potenzen verschwinden. Somit wird

$$\frac{\widehat{\varphi}-\frac{\widehat{\varphi}^3}{3!}+\frac{\widehat{\varphi}^5}{5!}-\frac{\widehat{\varphi}^7}{7!}+\dots}{1-\frac{\widehat{\varphi}^2}{2!}+\frac{\widehat{\varphi}^4}{4!}-\frac{\widehat{\varphi}^6}{6!}+\dots} = b_1\widehat{\varphi}+b_3\widehat{\varphi}^3+b_5\widehat{\varphi}^5+b_7\widehat{\varphi}^7+\dots;$$

multipliziert man beide Seiten mit der Reihe für $\cos\varphi$ nach (18.3a), so entsteht die Gleichung

$$\widehat{\varphi}-\frac{\widehat{\varphi}^3}{3!}+\frac{\widehat{\varphi}^5}{5!}-\frac{\widehat{\varphi}^7}{7!}+\dots = b_1\widehat{\varphi}+\left(b_3-\frac{b_1}{2!}\right)\widehat{\varphi}^3+\left(b_5-\frac{b_3}{2!}+\frac{b_1}{4!}\right)\varphi^5+\dots$$
$$+\left(b_7-\frac{b_5}{2!}+\frac{b_3}{4!}-\frac{b_1}{6!}\right)\varphi^7+\dots.$$

Die Gleichung kann identisch nur dann erfüllt sein, wenn die Koeffizienten gleicher Potenzen von $\widehat{\varphi}$ auf beiden Seiten übereinstimmen; für die Koeffizienten b ergeben sich also die Gleichungen

$$b_1 = 1, \quad b_3-\frac{b_1}{2!} = -\frac{1}{3!}, \quad b_5-\frac{b_3}{2!}+\frac{b_1}{4!} = \frac{1}{5!} \text{ usw.,}$$

woraus man erhält

$$b_1 = 1, \quad b_3 = \frac{1}{3}, \quad b_5 = \frac{2}{15}, \quad b_7 = \frac{17}{315}.$$

Also lautet die Potenzreihe für den Tangens

$$\tan\varphi = \widehat{\varphi}+\frac{1}{3}\widehat{\varphi}^3+\frac{2}{15}\widehat{\varphi}^5+\frac{17}{315}\widehat{\varphi}^7+\dots. \quad (18.4)$$

Die Konvergenz von (18.4) kann mit Hilfe des *Konvergenzkreissatzes von* CAUCHY beurteilt werden: Zu jeder Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

gibt es einen Konvergenzkreis um den Nullpunkt vom Radius

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

innerhalb dessen die Potenzreihe für jeden Punkt konvergiert. Für die Reihe (18.4) ist $R = \pi/2$.

Auch für die Potenzreihe (18.4) läßt sich ein Bildungsgesetz angeben; es ist

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} \cdot x^{2n-1},$$

wobei die B_n die sogenannten BERNOULLI*schen Zahlen* sind: $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$ usf.

Die BERNOULLIschen Zahlen, die übrigens sämtlich rational und für eine ganze Reihe von Potenzreihendarstellungen von Bedeutung sind, ergeben sich durch Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
&2B_1 + 1 &&= 0,\\
&3B_2 + 3B_1 + 1 &&= 0,\\
&4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + 1 &&= 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\binom{n}{1} B_{n-1} + \binom{n}{2} B_{n-2} + \binom{n}{3} B_{n-3} + \dots + \binom{n}{n-1} B_1 + \binom{n}{n} B_0 &&= 0,
\end{aligned}$$

dessen Koeffizienten und Absolutglieder nichts anderes sind als die *Binomialkoeffizienten* und dem PASCAL*schen Dreieck* entnommen werden können, wenn die erste Ziffer, also immer eine 1, einer jeden Zeile weggelassen wird.

19. Trigonometrische Tafeln

Unentbehrliches Hilfsmittel für die Berechnung der trigonometrischen Tafeln sind die in [18] abgeleiteten, erstmals von NEWTON angegebenen *unendlichen Reihen für Sinus und Kosinus*,

$$\sin\varphi = \widehat{\varphi} - \frac{\widehat{\varphi}^3}{3!} + \frac{\widehat{\varphi}^5}{5!} - \frac{\widehat{\varphi}^7}{7!} + \frac{\widehat{\varphi}^9}{9!} - \frac{\widehat{\varphi}^{11}}{11!} + \dots,$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\widehat{\varphi}^2}{2!} + \frac{\widehat{\varphi}^4}{4!} - \frac{\widehat{\varphi}^6}{6!} + \frac{\widehat{\varphi}^8}{8!} - \frac{\widehat{\varphi}^{10}}{10!} + \dots. \qquad (19.1)$$

Damit lassen sich für jeden beliebigen Winkel φ die Funktionswerte $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ und somit auch $\tan\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi$, $\cot\varphi = \cos\varphi/\sin\varphi$ berechnen.

Die Notwendigkeit trigonometrischer und logarithmisch-trigonometrischer Tafeln bedarf keiner Erläuterung. Schon vor Jahrhunderten hat man versucht, derartige Tafeln zu berechnen. Auch durch die Einführung bequemer Tischrechenmaschinen und programmgesteuerter Rechenautomaten haben diese Tafeln kaum an Bedeutung verloren, nur die Art der jetzt benötigten Tafeln hat sich entscheidend gewandelt: Während man bisher Tafeln mit kleinen Schritten der Winkel bei vorgegebener Stellenzahl (5, 6, 7, 8 Dezimalstellen) bevorzugte, sind jetzt Tafeln für nur wenige Werte mit großer Stellenzahl notwendig geworden, die sogenannten Nutshell tables. Vgl. z. B. R. A. HIRVONEN, Nutshell Tables of mathematical functions for interpolation with calculating machines, Bull. géod. 1953, S. 369–392.

Mit Hilfe der Drehungs- und Spiegelsätze konnte in [10] gezeigt werden, daß die Kreisfunktionen beliebiger Winkel auf diejenigen von Winkeln im ersten Quadranten zurückgeführt werden können. Es genügt also, die Funktionswerte für Winkel $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ aufzustellen, die aber keinesfalls alle zu berechnen sind: Nach (10.8a) gilt nämlich für Winkel im zweiten Oktanten, $\pi/4 < \varphi < \pi/2$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right), \tag{19.2}$$

das heißt, die Funktionswerte müssen nur für die Winkel des ersten Oktanten berechnet werden. — Indessen läßt sich der Bereich für die Berechnung noch weiter einschränken; es gilt nämlich noch

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) = \cos\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) - \sin\alpha. \tag{19.3}$$

(19.3) ist leicht nachzuweisen; nach den Additionstheoremen gilt

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha;$$

bildet man die Summe, so wird

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) = \cos\alpha,$$

womit die erste Gleichung von (19.3) bestätigt ist. In gleicher Weise ist für den Nachweis der zweiten Gleichung zu verfahren.

Nach (19.3) müssen die Funktionswerte also nur für Winkel $\varphi \leqq \pi/6$ berechnet werden. Das bringt den Vorteil, daß die Reihen für Sinus und Kosinus gut konvergieren. Zum Beispiel genügen selbst für $\varphi = \pi/6$ fünf Glieder der Sinusreihe, um $\sin(\pi/6)$ auf zehn Dezimalstellen genau zu erhalten; das sechste Glied wird nämlich $(1/11!)\cdot(\pi/6)^{11} = 0{,}2\cdot 10^{-10}$.

Diese Genauigkeitsabschätzung wird meist ausreichen; bricht man nämlich die unendliche Reihe für Sinus an irgendeiner Stelle ab, so ist der dadurch entstehende Fehler kleiner als das erste nicht berücksichtigte Glied.

Die Zahl der notwendigen Glieder der Reihe kann auch wie folgt abgeschätzt werden: Soll für ein gegebenes $\widehat{\varphi}$ das Glied $\widehat{\varphi}^n/n! < t$ bleiben, wobei also t die Rechengenauigkeit bestimmt, so kann man die Ungleichung $t < \left(\frac{\widehat{\varphi}}{\sqrt{n}}\right)^n$ zu Hilfe nehmen. Für große n ist nämlich $n \cdot 1 = n$, $(n-1)\,2 > n$, $(n-2)\,3 > n$, ..., $1 \cdot n = n$, also gilt die Ungleichung $(n!)^2 > n^n$, oder $n! > (\sqrt{n})^n$, also $1/n! < \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$. Für eine strenge Fehlerabschätzung ist das Restglied $\frac{\sin \xi}{(4n+4)!}\,\widehat{\varphi}^{4n+4}$ heranzuziehen, woraus n für eine vorgegebene Rechengenauigkeit bestimmt werden kann.

Für eine Funktionstafel mit acht Dezimalstellen und Winkelschritten von 1° zu 1° genügt es also, nach (19.1) die Sinusse und Kosinusse für $\widehat{\varphi} = 1°/\varrho°$, $2°/\varrho°$, $3°/\varrho°$, ... bis $30°/\varrho° = \pi/6$ zu berechnen. Die Funktionswerte für die übrigen Grade des ersten Quadranten ergeben sich daraus nach (19.2) und (19.3). Hier als Beispiel die Berechnung von sin 1° und cos 1°; mit $\widehat{\varphi} = 1°/\varrho° = \pi/180 = 0{,}017\,453\,293$ erhält man:

Sinus		Kosinus	
$\widehat{\varphi} =$	0,017 453 293	$1 =$	+1,000 000 000
$-\frac{\widehat{\varphi}^3}{6} = -$	886	$-\frac{1}{2}\widehat{\varphi}^2 = -$	152 309
$+\frac{\widehat{\varphi}^5}{120} = +$	00	$+\frac{1}{24}\widehat{\varphi}^4 = +$	4
sin 1° =	0,017 452 407	cos 1° =	0,999 847 695

Handelt es sich wie im Beispiel um die Berechnung der Funktionswerte voller Grade, also $\varphi = 90° \cdot p$ und $\widehat{\varphi} = (\pi/2)p$ mit $p = 1/90$, $2/90 = 1/45$, $3/90 = 1/30$ usf., so lassen sich die Potenzreihen für Sinus und Kosinus auch in der Form

$$\sin \varphi = p\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3!}\left(p\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(p\frac{\pi}{2}\right)^5 - \ldots,$$
$$\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2!}\left(p\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(p\frac{\pi}{2}\right)^4 - \ldots \qquad (19.4)$$

schreiben.

Soll eine *Tafel mit dem Intervall* $\Delta = 1'$ berechnet werden, so bestimmt man die Funktionswerte der Zwischenargumente zweckmäßigerweise mit Hilfe eines Interpolationsverfahrens. Im folgenden Beispiel wird das von

SIMPSON (TH. SIMPSON, 1710–1761) angegebene Interpolationsverfahren benützt. Bezeichnet man die Funktionswerte und deren Differenzen in der Form

$$\begin{array}{lll} \sin 0^\circ & & \\ & u_0 & = \sin\Delta - \sin 0^\circ \\ \sin\Delta & & \\ & u_1 & = \sin 2\Delta - \sin\Delta \\ \sin 2\Delta & & \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \sin(n-1)\Delta & & \\ & u_{n-1} & = \sin n\Delta - \sin(n-1)\Delta \\ \sin n\Delta & & \\ & u_n & = \sin(n+1)\Delta - \sin n\Delta \\ \sin(n+1)\Delta & & \end{array} \tag{19.5a}$$

also

$$\begin{aligned} \sin(n-1)\Delta + u_{n-1} &= \sin n\Delta, \\ \sin n\Delta \qquad + u_n &= \sin(n+1)\Delta, \end{aligned} \tag{19.5b}$$

so läßt sich die Differenz u_n aus der vorhergehenden (u_{n-1}) in einfacher Weise berechnen. Dafür ist aus (19.5b) die Summe

$$\sin(n+1)\Delta + \sin(n-1)\Delta = 2\sin n\Delta + u_n - u_{n-1} \tag{19.5c}$$

zu bilden; bringt man jetzt die linke Seite von (19.5c) in die Form

$$\sin(n+1)\Delta + \sin(n-1)\Delta = 2\sin n\Delta\cos\Delta$$

und setzt $\cos\Delta = 1 - \frac{\hat{\Delta}^2}{2} = 1 - \frac{k}{2}$, also $2\cos\Delta = 2 - k$,

so wird daraus

$$\sin(n+1)\Delta + \sin(n-1)\Delta = (2-k)\sin n\Delta = 2\sin n\Delta - k\sin n\Delta. \tag{19.5d}$$

Der Vergleich mit (19.5c) schließlich gibt

$$u_n = u_{n-1} - k\sin n\Delta; \tag{19.5e}$$

u_n kann also durch eine einfache Rechenoperation aus u_{n-1} gewonnen werden. Für den Ausgangswert u_0 gilt nach (19.5a) $u_0 = \sin\Delta - \sin 0^\circ$ oder

$$u_0 = \sin\Delta = \hat{\Delta} - \frac{\hat{\Delta}^3}{6} + \ldots, \tag{19.5f}$$

wobei die höheren Glieder vernachlässigt werden können.

Beim Kosinus findet man für die Einschaltung der Zwischenwerte mit den Bezeichnungen

$$\begin{array}{ll}
\cos 0^\circ & \\
& v_0 = \cos 0^\circ - \cos \Delta \\
\cos \Delta & \\
& v_1 = \cos \Delta - \cos 2\Delta \\
\cos 2\Delta & \\
\vdots & \vdots \\
\cos (n-1)\Delta & \\
& v_{n-1} = \cos (n-1)\Delta - \cos n\Delta \\
\cos n\Delta & \\
& v_n = \cos n\Delta - \cos (n+1)\Delta \\
\cos (n+1)\Delta &
\end{array} \tag{19.6a}$$

die Beziehung

$$\cos (n-1)\Delta + \cos (n+1)\Delta = 2\cos n\Delta + v_{n-1} - v_n. \tag{19.6b}$$

Die linke Seite umgeformt gibt

$$\cos (n-1)\Delta + \cos (n+1)\Delta = 2\cos n\Delta - k\cos n\Delta,$$

und schließlich

$$v_n = v_{n-1} + k\cos n\Delta. \tag{19.6c}$$

Der Ausgangswert v_0 ergibt sich zu $v_0 = \cos 0^\circ - \cos \Delta$, oder

$$v_0 = 1 - \left(1 - \frac{\hat{\Delta}^2}{2}\right) = +\frac{\hat{\Delta}^2}{2} = \frac{k}{2}, \tag{19.6d}$$

wenn wieder die höheren Potenzen von $\hat{\Delta}$ vernachlässigt werden. Die Gleichungen (19.5) und (19.6) sind die SIMPSONschen Interpolationsformeln.

Mit den Ausgangswerten

$$\begin{aligned}
\Delta = 1', \quad \hat{\Delta} = \frac{\pi}{10\,800} &= 290\,888\,209 \cdot 10^{-12}, \\
u_0 = \sin \Delta = \sin 1' &= 290\,888\,205 \cdot 10^{-12}, \\
k = \hat{\Delta}^2 &= 84\,616 \cdot 10^{-12}, \\
v_0 = \frac{k}{2} &= 42\,308 \cdot 10^{-12}
\end{aligned}$$

ergeben sich für Sinus und Kosinus die folgenden Zahlenwerte, die nach der Berechnung von Tangens und Kotangens auf die gewünschte Zahl von Dezimalstellen abzurunden sind:

Sinus

		(E_9)	
0° 00′	0,000 000	000	$u_0 = 290\,888{,}205\ (E_9)$
0° 01′	0,000 290	888	$u_1 = u_0 - k \sin 0°\,01' =$
0° 02′	0,000 581	776	$= 290\,888{,}185\ (E_9)$

usf.

Kosinus

		(E_9)	
0° 00′	1,000 000	000	$v_0 = 42{,}308\ (E_9)$
0° 01′	0,999 999	958	$v_1 = v_0 + k \cos 0°\,01' = 126{,}924\ (E_9)$
0° 02′	0,999 999	831	$v_2 = 211{,}540\ (E_9)$
0° 03′	0,999 999	620	$v_3 = 296{,}156\ (E_9)$
0° 04′	0,999 999	324	

usf.

In ähnlicher Weise können die *Logarithmen der trigonometrischen Funktionen* berechnet werden. Bequemer als die unendlichen Potenzreihen sind dafür aber die *unendlichen Produkte für Sinus und Kosinus* (vergl. [46]):

$$\frac{\sin\varphi}{\widehat{\varphi}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\widehat{\varphi}^2}{n^2\pi^2}\right) = \left(1-\frac{\varphi^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\widehat{\varphi}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\widehat{\varphi}^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

und

$$\cos\varphi = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\widehat{\varphi}^2}{(2n-1)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{\widehat{\varphi}^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right)\left(1-\frac{\widehat{\varphi}^2}{9\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right)\left(1-\frac{\widehat{\varphi}^2}{25\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right)\cdots, \tag{19.7}$$

deren Faktoren sich mit fortschreitender Gliederzahl der Einheit nähern.

Für $\lg\sin\varphi$ und $\lg\cos\varphi$ ergeben sich damit die bequemen Reihen

$$\begin{aligned}\lg\sin\varphi &= \lg\widehat{\varphi} + \lg\left(1-\frac{\widehat{\varphi}^2}{\pi^2}\right) + \lg\left(1-\frac{\widehat{\varphi}^2}{4\pi^2}\right) + \dots,\\ \lg\cos\varphi &= \lg\left(1-\frac{4\widehat{\varphi}^2}{\pi^2}\right) + \lg\left(1-\frac{4\widehat{\varphi}^2}{9\pi^2}\right) + \dots,\end{aligned} \tag{19.8}$$

woraus auch

$$\begin{aligned} \lg \tan\varphi &= \lg \sin\varphi + \text{cpl.} \lg \cos\varphi, \\ \lg \cot\varphi &= \lg \cos\varphi + \text{cpl.} \lg \sin\varphi \end{aligned} \tag{19.9}$$

gebildet werden können.

Für das logarithmische Rechnen ist noch die MASKELYNE*sche Regel* von Interesse. Nach (17.1) gibt es einen Grenzwinkel, bis zu dem bei vorgeschriebener Rechengenauigkeit $\sin\varphi = \tan\varphi = \widehat{\varphi} = \varphi''/\varrho''$ gesetzt werden darf.

Für $\varphi = 206''$ zum Beispiel wird $\widehat{\varphi} = 1\cdot 10^{-3}$ und $\widehat{\varphi}^3 = 1\cdot 10^{-9}$; $\sin\varphi$ und $\tan\varphi$ weichen also von $\widehat{\varphi}$ um weniger als $1\cdot 10^{-9}$ ab.

Die MASKELYNEsche Regel bietet die Möglichkeit, diese einfache Rechnung für Sinus und Tangens auf größere Winkel auszudehnen. — Ist φ so klein, daß, der geforderten Rechengenauigkeit entsprechend, $\widehat{\varphi}^4$ und alle höheren Potenzen von $\widehat{\varphi}$ vernachlässigt werden können, so gilt nach (18.1) und (18.2)

$$\sin\varphi = \widehat{\varphi} - \frac{\widehat{\varphi}^3}{6} = \widehat{\varphi}\left(1 - \frac{\widehat{\varphi}^2}{6}\right), \quad \cos\varphi = 1 - \frac{\widehat{\varphi}^2}{2}.$$

Nun ist nach dem binomischen Satz

$$\left(1 - \frac{\widehat{\varphi}^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}\frac{\widehat{\varphi}^2}{2} + \ldots = (\cos\varphi)^{\frac{1}{3}},$$

also wird

$$\sin\varphi = \widehat{\varphi}(\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}.$$

In gleicher Weise findet man

$$\tan\varphi = \frac{\widehat{\varphi}(\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}}{\cos\varphi} = \widehat{\varphi}(\cos\varphi)^{-\frac{2}{3}}.$$

In Logarithmen ergeben sich daraus die Formeln

$$\begin{aligned} \lg \sin\varphi &= \lg \varphi'' - \lg \varrho'' + \frac{1}{3} \lg \cos\varphi, \\ \lg \tan\varphi &= \lg \varphi'' - \lg \varrho'' - \frac{2}{3} \lg \cos\varphi. \end{aligned} \tag{19.10}$$

Von der MASKELYNEschen Regel ist in vielen Logarithmentafeln Gebrauch gemacht, und zwar in Form der Hilfsgrößen S (= Sinus-) und

T (= Tangensreduktion). Mit

$$\begin{aligned} S &= -\lg \varrho'' + \frac{1}{3} \lg \cos \varphi = \text{cpl.} \left(\lg \varrho'' + \frac{1}{3} \lg \sec \varphi\right), \\ T &= -\lg \varrho'' - \frac{2}{3} \lg \cos \varphi = \text{cpl.} \left(\lg \varrho'' - \frac{2}{3} \lg \sec \varphi\right) \end{aligned} \tag{19.11a}$$

gilt dann

$$\lg \sin \varphi = \lg \varphi'' + S, \quad \lg \tan \varphi = \lg \varphi'' + T, \tag{19.11b}$$

oder, wenn der Winkel gesucht ist,

$$\begin{aligned} \lg \varphi'' &= \lg \sin \varphi - S = \lg \sin \varphi + \text{cpl. } S = \\ &= \lg \tan \varphi - T = \lg \tan \varphi + \text{cpl. } T. \end{aligned} \tag{19.11c}$$

Für Winkel φ innerhalb der letzten Grade des Quadranten gelten, wie leicht einzusehen ist, die Formeln

$$\begin{aligned} \lg \cos \varphi &= \lg (90^\circ - \varphi)'' + S, \\ \lg \cot \varphi &= \lg (90^\circ - \varphi)'' + T, \\ \lg \tan \varphi &= \text{cpl. } \lg \cot \varphi \end{aligned}$$

oder, wenn der Winkel gesucht ist,

$$\begin{aligned} \lg (90^\circ - \varphi)'' &= \lg \cos \varphi + \text{cpl. } S, \\ &= \lg \cot \varphi + \text{cpl. } T, \\ &= \text{cpl. } \lg \tan \varphi + \text{cpl. } T, \end{aligned}$$

und

$$\varphi = 90^\circ - (90^\circ - \varphi).$$

Schließlich sei noch auf einige trigonometrische und logarithmisch-trigonometrische Tafeln hingewiesen, die insbesondere in der Geodäsie und der sphärischen Astronomie häufig benutzt werden:

F. G. GAUSS, Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln (Sexagesimal unterteilter Altgrad), Verlag K. Wittwer, 411. — 420. Auflage, Stuttgart 1961. Neugrad: 36. — 40. Auflage, Stuttgart 1957.

C. BREMIKER, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln für alte (sexagesimale) Teilung mit sechs Dezimalstellen, 22. Stereotyp-Ausgabe, Verlag K. Wittwer, Stuttgart 1950.

K. ROTTMANN, Siebenstellige Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, Hochschul-Taschenbuch Band 26/26a/26b, Bibliographisches Institut, Mannheim 1961, und Siebenstellige dekadische Logarithmen, Band 17/17a, ebenda 1960.

J. BAUSCHINGER und J. PETERS, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit acht Dezimalstellen (2 Bände), 3. Auflage, Verlag von H. R. Engelmann, Weinheim/Bergstraße 1958.

J. PETERS, Sechsstellige Tafel der trigonometrischen Funktionen (Altgradteilung), 5. Auflage, F. Dümmlers Verlag, Bonn 1962.

J. PETERS, Siebenstellige Werte der trigonometrischen Funktionen von Tausendstel zu Tausendstel des Neugrades, herausgegeben im Verlag des Reichsamtes für Landesaufnahme, Berlin 1941; unveränderter Nachdruck im Institut für Angewandte Geodäsie, Frankfurt am Main 1952.

Einzelheiten über den Aufbau und die Benützung dieser Tafeln können den ausführlich gehaltenen Erläuterungen dieser Werke entnommen werden. Grundkenntnisse des logarithmischen Rechnens werden allerdings vorausgesetzt.

Kapitel 5: Das schiefwinklige Dreieck

20. Winkelbeziehungen im Dreieck

Zwischen den drei Winkeln α, β, γ eines ebenen Dreiecks bestehen zahlreiche Beziehungen. Für die *Winkelsumme* gilt bekanntlich

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ. \tag{20.1}$$

Weiter ist daran zu erinnern, daß von den drei Winkeln eines schiefwinkligen Dreiecks einer stumpf sein kann; es können also entweder drei spitze oder zwei spitze und ein stumpfer Winkel auftreten. Deshalb sind die Sinusse für alle Dreieckswinkel stets positiv, während der Kosinus, der Tangens und der Kotangens eines Winkels, falls dieser stumpf ist, negativ sind.

Für die *Summen je zweier Winkel* gilt

$$\alpha+\beta, \quad \beta+\gamma, \quad \gamma+\alpha < 180^\circ, \tag{20.2}$$

wobei aber

$$\alpha+\beta, \quad \beta+\gamma, \quad \gamma+\alpha \gtrless 90^\circ \tag{20.3}$$

sein kann. Das bedeutet, daß die Sinusse $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\beta+\gamma)$, $\sin(\gamma+\alpha)$ stets positiv sind, während die Kosinusse, Tangens und Kotangens dieser Winkelsummen auch negativ werden können.

Für die *halbe Summe zweier Winkel* folgt aus (20.2) und (20.3), daß stets

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta), \quad \frac{1}{2}(\beta+\gamma), \quad \frac{1}{2}(\gamma+\alpha) < 90^\circ \tag{20.4}$$

ist, die Kreisfunktionen für die halben Summen zweier Winkel also stets positiv sind.

Die *halbe Differenz zweier Winkel* wird stets ein positiver oder negativer spitzer Winkel sein, zum Beispiel ist

$$\frac{\beta-\gamma}{2} \gtrless 0 \quad \text{für } \beta \gtrless \gamma, \quad \text{also ist} \quad \cos\frac{\beta-\gamma}{2} > 0.$$

Der Kosinus der halben Differenz zweier Winkel ist also stets positiv, während Sinus, Tangens und Kotangens positiv oder negativ sein können.

Weitere Beziehungen zwischen den Winkeln eines ebenen Dreiecks ergeben sich mit Hilfe der Additionstheoreme. Hier zunächst eine *Kosinus-*

beziehung: Wegen $\alpha+\beta = 180^\circ-\gamma$ gilt $\cos(\alpha+\beta) = \cos(180^\circ-\gamma) = -\cos\gamma$. Andererseits ist nach dem Additionstheorem auch

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = -\cos\gamma,$$

oder

$$\sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma.$$

Quadriert man und setzt links $\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta$ bzw. $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ ein, so wird daraus

$$(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) = \cos^2\alpha\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\gamma,$$

und schließlich

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1. \qquad (20.5)$$

Für eine *Tangensbeziehung* zwischen den Dreieckswinkeln ist von $\tan(\alpha+\beta) = -\tan\gamma$ auszugehen. Wird für die linke Seite das Additionstheorem des Tangens benützt, so ergibt sich

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = -\tan\gamma,$$

oder schließlich

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma. \qquad (20.6)$$

Multipliziert man (20.6) mit $\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma$, so entsteht die Kotangensrelation

$$\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta = 1. \qquad (20.7)$$

Auch eine *Sinusrelation* läßt sich angeben, die aber weniger symmetrisch ist:

$$4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma = 2(\sin^2\beta\sin^2\gamma+\sin^2\gamma\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\sin^2\beta)- \\ -\sin^4\alpha-\sin^4\beta-\sin^4\gamma. \qquad (20.8)$$

Der Nachweis von (20.8) ist am bequemsten mit Hilfe des Kosinussatzes zu führen; er wird daher in [22] nachgetragen.

Weitere goniometrische Formeln ergeben sich, wenn auch die halben und doppelten Dreieckswinkel eingeführt werden. Wendet man auf die Summe $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ die Verwandlungsformeln an, so wird

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

oder, weil $\sin\{(\alpha+\beta)/2\} = \cos(\gamma/2)$ und $\sin(\gamma/2) = \cos\{(\alpha+\beta)/2\}$ ist,

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right] = \\ = 4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

also

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{20.9}$$

In ähnlicher Weise findet man

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{20.10}$$

Diese hier gezeigte Ableitung von (20.9) und (20.10) ist übrigens nicht die einzige; ebenso bequem ist die Herleitung mit Hilfe der Sätze des ebenen Dreiecks (vgl. [25]).

Für die Summe $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma$ erhält man nach den Verwandlungsformeln zunächst

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\sin\gamma\cos\gamma;$$

nun ist $\sin(\alpha+\beta) = \sin(180°-\gamma) = \sin\gamma$ und $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$, also wird

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma = 2\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] =$$

$$= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma. \tag{20.11}$$

Ebenso findet man

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma = 1-4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \tag{20.12}$$

und

$$\tan 2\alpha+\tan 2\beta+\tan 2\gamma = \tan 2\alpha\tan 2\beta\tan 2\gamma. \tag{20.13}$$

Für die halben Dreieckswinkel seien noch angegeben

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2} = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}, \tag{20.14}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 1 \tag{20.15}$$

und

$$\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}. \tag{20.16}$$

Als Beispiel für den Nachweis dieser Formelgruppe sei noch (20.16) hergeleitet. Wegen $(\alpha+\beta)/2 = 90°-\gamma/2$ gilt

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \cot\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{\cot\frac{\gamma}{2}}.$$

Das Additionstheorem, links angewendet, gibt

$$\frac{\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}-1}{\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\cot\frac{\gamma}{2}},$$

oder schließlich

$$\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}.$$

21. Der Sinussatz

Die Ableitung des *Sinussatzes*, der die Sinus-Verhältnisse der Winkel durch die Seiten ausdrückt, ist so gewählt, daß gleichzeitig die Höhen- und Flächenformeln sowie die Durchmesserregel für den Umkreis mit angeschrieben werden können.

Die *Höhenformel*

$$h_c = b \sin\alpha \tag{21.1}$$

ist unmittelbar aus Abb. 21.1a abzulesen: Ist $\alpha \neq 90°$, so ist $\triangle AH_cC$ ein bei H_c rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten h_c, b_c und b als Hypo-

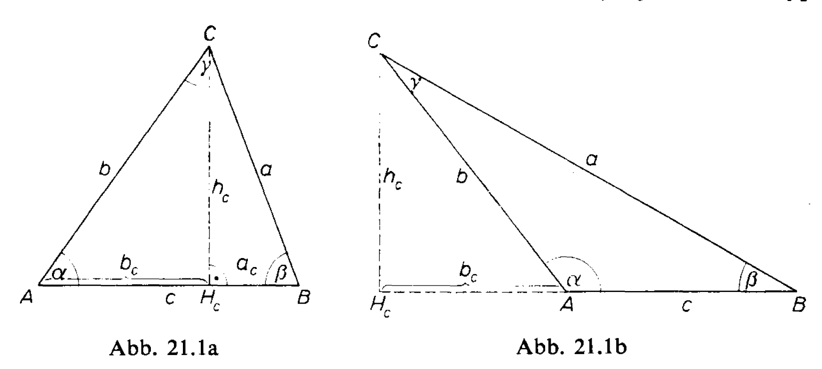


Abb. 21.1a Abb. 21.1b

tenuse. Für den Winkel CAH_c gilt $\sin(CAH_c) = h_c/b$. Der Winkel CAH_c ist gleich α, wenn α spitz, gleich $(180°-\alpha)$, wenn α stumpf ist (s. Fig. 21.1b). Nach dem Supplementsatz gilt also in jedem Falle $\sin\alpha = h_c/b$, womit (21.1) bewiesen ist. Auch für $\alpha = 90°$ bleibt (21.1) richtig, weil einerseits $\sin\alpha = 1$ und andererseits $b = h_c$ wird, wenn H_c nach A fällt.

Die zyklische Vertauschung von (21.1) — an Stelle von a tritt b, von b tritt c, ..., bei den Winkeln ist es entsprechend — gibt zunächst drei

Gleichungen der Höhenformel:

$$h_a = c \sin\beta, \quad h_b = a \sin\gamma, \quad h_c = b \sin\alpha. \tag{21.2}$$

In gleicher Weise erhält man aus $\sin\beta = h_c/a$ oder $h_c = a \sin\beta$ und durch zyklische Vertauschung noch

$$h_a = b \sin\gamma, \quad h_b = c \sin\alpha, \quad h_c = a \sin\beta. \tag{21.3}$$

Multipliziert man in (21.2) oder (21.3) mit den entsprechenden Hypotenusen, also

$$ah_a = ac \sin\beta, \quad bh_b = ab \sin\gamma, \quad ch_c = bc \sin\alpha,$$

so entstehen daraus wegen $ah_a = bh_b = ch_c = 2F$ die *Flächenformeln*

$$2F = ab \sin\gamma = ac \sin\beta = bc \sin\alpha. \tag{21.4}$$

Aus (21.4) folgt auch die *Durchmesserregel für den Umkreis:* Multipliziert man z. B. $2F = bc \sin\alpha$ mit a, so wird

$$a2F = abc \sin\alpha,$$

woraus sich wegen $abc = 4rF$, mit r als Umkreisradius, die Beziehung $a = 2r \sin\alpha$ ergibt. Die zyklische Vertauschung liefert schließlich

$$a = 2r \sin\alpha, \quad b = 2r \sin\beta, \quad c = 2r \sin\gamma. \tag{21.5}$$

Das Verhältnis einer Dreiecksseite zum Sinus ihres Gegenwinkels ist also gleich dem Durchmesser des Umkreises; (21.5) wird mitunter auch als Sehnensatz bezeichnet.

Der Sinussatz folgt nun unmittelbar aus dem Vergleich von (21.2) und (21.3); es ist

$$c \sin\beta = b \sin\gamma, \quad a \sin\gamma = c \sin\alpha, \quad b \sin\alpha = a \sin\beta,$$

oder

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \tag{21.6a}$$

Noch einfacher erhält man den Sinussatz aus der Durchmesserregel: Nach (21.5) haben die Quotienten $a/\sin\alpha$, $b/\sin\beta$ und $c/\sin\gamma$ den gemeinsamen Wert $2r$, also gilt auch

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{21.6b}$$

Schließlich können die Gleichungen (21.6) noch in die fortlaufende Proportion

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \tag{21.6c}$$

zusammengefaßt werden.

Eine zweite Ableitung des Sinussatzes bietet die Vektorrechnung: Dafür faßt man die Seiten des Dreiecks ABC als Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ auf, deren Absolutbeträge $|\boldsymbol{a}| = a$, $|\boldsymbol{b}| = b$, $|\boldsymbol{c}| = c$ die Längen der Seiten sind (Abb. 21.2); bildet man die äußeren Produkte $[\boldsymbol{ac}] = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{c}| \sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ und $[\boldsymbol{bc}] = |\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}| \sin(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, so entstehen zwei zur Zeichenebene senkrechte Vektoren mit entgegengesetzten Richtungen. Schreibt man die wegen $[\boldsymbol{cc}] = \vec{\mathbf{o}}$ bestehende Identität

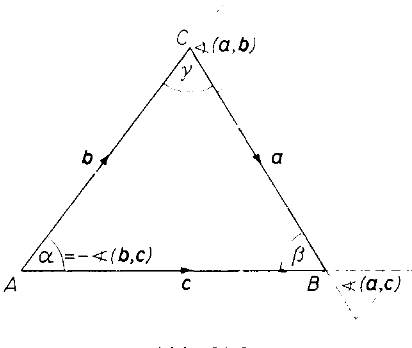


Abb. 21.2

$$[\boldsymbol{ac}] + [\boldsymbol{bc}] = [\boldsymbol{ac}] + [\boldsymbol{bc}] - [\boldsymbol{cc}]$$

in der Form

$$[\boldsymbol{ac}] + [\boldsymbol{bc}] = [(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})\boldsymbol{c}],$$

so folgt daraus wegen $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \vec{\mathbf{o}}$ die Gleichung

$$[\boldsymbol{ac}] = -[\boldsymbol{bc}].$$

Die beiden Vektoren sind also entgegengesetzt gleich, infolgedessen müssen ihre Beträge übereinstimmen, d. h. es muß

$$ac \sin\beta = bc \sin\alpha \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

sein.

Auch aus dem Kosinussatz kann der Sinussatz abgeleitet werden, wie in [25] gezeigt wird.

Eine der einfachsten Ableitungen des Sinussatzes, bei der sofort auch eine geometrische Deutung der Proportion Seite/Sinus des Gegenwinkels möglich ist, bietet unmittelbar der Durchmessersatz: Um $\triangle ABC$ sei der Umkreis K gezeichnet und der Durchmesser $d = CG$ eingetragen (Abb. 21.3). Dann ist $\triangle BCG$ in B rechtwinklig, und der Winkel φ ist gleich α bzw. $180° - \alpha$, je nachdem α spitz oder stumpf ist. Nun ist $\sin\varphi = \sin\alpha = a/d$, oder $a/\sin\alpha = d$, d. h. das Verhältnis Seite/Sinus des Gegenwinkels ist gleich dem Umkreisdurchmesser. In gleicher Weise findet man $d = b/\sin\beta = c/\sin\gamma$, womit der Sinussatz bestätigt ist.

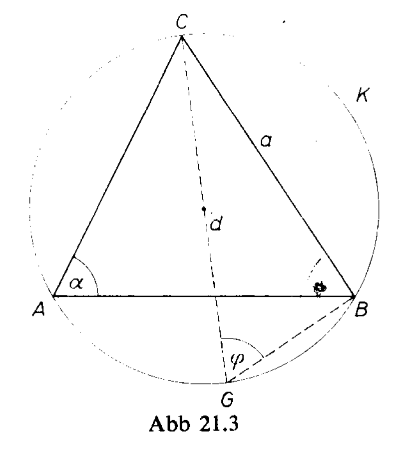


Abb 21.3

Schließlich wird in [34] noch ein weiterer Beweis gebracht, der in einfacher Weise auch die *Sinussätze für das Vier-, Fünf- und Sechseck* liefert, wobei sich, wenn z. B. die

Gleichung (21.6b) in die Form

$$c \sin\alpha - a \sin\gamma = c \sin\alpha - a \sin(\alpha+\beta) = 0$$

gebracht wird, folgendes Formelsystem ergibt:

Dreieck: $\overline{AB}\sin\alpha - \overline{BC}\sin(\alpha+\beta) = 0,$

Viereck: $\overline{AB}\sin\alpha - \overline{BC}\sin(\alpha+\beta) + \overline{CD}\sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0,$

Fünfeck: $\overline{AB}\sin\alpha - \overline{BC}\sin(\alpha+\beta) + \overline{CD}\sin(\alpha+\beta+\gamma) - \overline{DE}\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0,$

Sechseck: $\overline{AB}\sin\alpha - \overline{BC}\sin(\alpha+\beta) + \overline{CD}\sin(\alpha+\beta+\gamma) - \overline{DE}\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + {}$
$+ \overline{EF}\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) = 0,$

wenn die Seiten mit $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ usf. und die inneren Eckenwinkel mit α, β, γ, ... bezeichnet werden.

22. Der Kosinussatz

Die drei Gleichungen des *Kosinussatzes*, die je eine Beziehung zwischen dem Kosinus eines Winkels und den drei Seiten herstellen, können in den Formen

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos\alpha,\\ b^2 &= c^2+a^2-2ca\cos\beta,\\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\gamma \end{aligned} \qquad (22.1)$$

und

$$\cos\alpha = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc},\quad \cos\beta = \frac{a^2-b^2+c^2}{2ca},\quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \qquad (22.2)$$

geschrieben werden. Die einfachste Ableitung des Kosinussatzes bietet der *Projektionssatz*, dessen Beziehungen unmittelbar aus den Abb. 21.1 abzulesen sind: Die Projektion der Seite b auf c lautet $b_c = \pm b\cos\alpha$, wobei das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen gilt, wenn α $\left\{\begin{matrix}\text{spitz}\\ \text{stumpf}\end{matrix}\right\}$ ist. Ebenso findet man für die übrigen Projektionen

$$a_c = \pm a\cos\beta,\quad b_a = \pm b\cos\gamma,\quad c_a = \pm c\cos\beta,$$
$$a_b = \pm a\cos\gamma,\quad c_b = \pm c\cos\alpha,$$

die auch für rechte Winkel α, β, γ mit beiden Vorzeichen richtig bleiben.

Mit Hilfe dieser Projektionen lassen sich die *drei Kosinusformeln*

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha, \qquad b = c\cos\alpha + a\cos\gamma, \qquad a = b\cos\gamma + c\cos\beta \tag{22.3}$$

bilden, die für spitze und stumpfe Winkel gültig sind: Sind α und β spitz, so ist $c = a_c + b_c = a\cos\beta + b\cos\alpha$; ist α stumpf, β spitz, so gilt $c = a_c - b_c = a\cos\beta - b\cos(180° - \alpha) = a\cos\beta + b\cos\alpha$ (vgl. Abb. 21.1a, b).

Multipliziert man die drei Gleichungen (22.3) der Reihe nach mit c, b, a, addiert die beiden ersten und subtrahiert davon die dritte, so wird daraus

$$c^2 + b^2 - a^2 = ca\cos\beta + cb\cos\alpha + bc\cos\alpha + ba\cos\gamma - ab\cos\gamma - ac\cos\beta,$$

oder

$$c^2 + b^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha.$$

Dies ist bis auf die Anordnung der Glieder die erste Gleichung von (22.1), womit der Kosinussatz bewiesen ist. Die beiden anderen Gleichungen von (22.1) erhält man in gleicher Weise aus der Kosinusformel (22.3) oder durch zyklische Vertauschung. *Der Kosinussatz ist die wichtigste Formel der ebenen Trigonometrie; als Begründung dafür ist anzuführen, daß nahezu alle Sätze für das schiefwinklige Dreieck allein aus dem Kosinussatz gewonnen werden können* (vgl. [25]).

Für die vektorielle Ableitung des Kosinussatzes ist an Hand der Abb. 21.2 die Vektorsumme $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ zu bilden. Werden beide Seiten dieser Gleichung skalar mit sich selbst multipliziert, so wird daraus

$$(\boldsymbol{cc}) = ((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})) = (\boldsymbol{aa}) + 2(\boldsymbol{ab}) + (\boldsymbol{bb}).$$

Der Definition des Skalarproduktes entsprechend ist nun $(\boldsymbol{aa}) = a^2$, $(\boldsymbol{bb}) = b^2$, $(\boldsymbol{cc}) = c^2$ und $2(\boldsymbol{ab}) = 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2ab\cos(180° - \gamma) = -2ab\cos\gamma$. Also wird

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Ein dritter Beweis des Kosinussatzes folgt sofort aus dem „Allgemeinen Pythagoräischen Satz" [vgl. (1.2)]: In

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cb_c$$

gilt in jedem beliebigen Dreieck das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen für einen $\left\{\begin{matrix}\text{spitzen}\\ \text{stumpfen}\end{matrix}\right\}$ Winkel α; setzt man nach dem Projektionssatz $b_c = \pm b\cos\alpha$, so folgt daraus wieder der Kosinussatz.

Der Kosinussatz liefert auch die Winkelbeziehung (20.8): Setzt man in (21.5) $r = 1/2$, so wird $a = \sin\alpha$, $b = \sin\beta$ und $c = \sin\gamma$. Der Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

nimmt somit die Form

$$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \quad \text{an.}$$

Löst man nach $\cos\gamma$ auf und quadriert, so wird daraus mit $\cos^2\gamma = 1-\sin^2\gamma$:

$$4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma = 2(\sin^2\beta\sin^2\gamma+\sin^2\gamma\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\sin^2\beta) - \\ -\sin^4\alpha - \sin^4\beta - \sin^4\gamma.$$

Die Bedeutung des Kosinussatzes für die Berechnung eines Dreiecks ist aus (22.1) und (22.2) erkennbar: (22.1) liefert immer ein viertes Stück, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind; bei drei gegebenen Seiten liefern die Gleichungen (22.2) als viertes Stück einen Winkel. Bemerkenswert ist, daß man damit in jedem Fall zwei gegenüberliegende Stücke erhält, für die Bestimmung der dann noch fehlenden Stücke also immer der Sinussatz benützt werden kann. Sinus- und Kosinussatz reichen also für die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks aus. Da der Kosinussatz aber keine durchgehende logarithmische Rechnung zuläßt, werden noch andere Sätze benützt, die im folgenden hergeleitet werden.

Schließlich sei noch erwähnt, daß sich sowohl die Sinusse als auch die Kosinusse der Winkel α, β, γ eines Dreiecks ABC geometrisch deuten lassen (vgl. H. DÖRRIE, a.a.O. S. 67 f.): Wählt man den Umkreisdurchmesser des Dreiecks als Längeneinheit, so sind die Sinus der Winkel gleich den Seiten, die Kosinus die an die Ecken anstoßenden Höhenabschnitte, wobei für eine stumpfe Ecke der Höhenabschnitt negativ zu nehmen ist.

Die *geometrische Deutung der Sinus* folgt unmittelbar aus der Durchmesserregel (21.5); wählt man den Umkreisdurchmesser als Längeneinheit, also $d = 2r = 1$, so wird $\sin\alpha = a$, $\sin\beta = b$, $\sin\gamma = c$, d. h. die Sinusse der Winkel sind gleich den Seiten des Dreiecks. — Um die Kosinus der Winkel geometrisch zu deuten, zeichnet man im Dreieck ABC, dessen Umkreisdurchmesser wieder die Längeneinheit sein soll, die drei Höhen h_a, h_b, h_c, die sich im Höhenschnittpunkt H schneiden (Abb. 22.1). Werden noch der Durchmesser $\overline{AD}$ und die Verbindungen $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$ eingetragen, so entstehen die in B bzw. C rechtwinkligen Dreiecke ABD und ADC. Für die Winkel in der gemeinsamen Ecke D gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle ADC = \beta$, $\sphericalangle ADB = \gamma$, für die gemeinsame Hypotenuse $\overline{AD} = 1$. Nun ist in $\triangle ADC$ nach der Kathetenregel $\cos\beta = \overline{CD}/1 = \overline{CD}$, und in $\triangle ABD$ gilt $\cos\gamma = \overline{BD}$, womit eine erste Deutung gegeben ist. Hier noch eine zweite Deutung: Wie leicht einzusehen ist, ist das Viereck $HBDC$

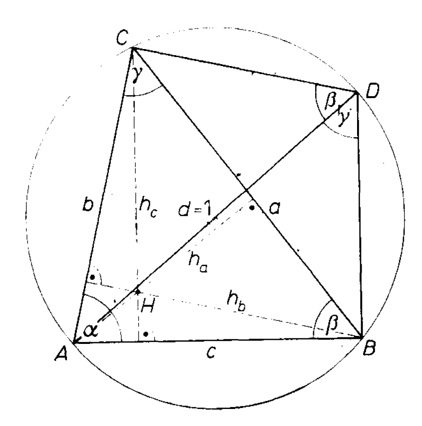


Abb. 22.1

ein Parallelogramm, also ist $\overline{CD} = \overline{HB}$ und $\overline{BD} = \overline{HC}$ und folglich

$$\overline{HB} = \cos\beta, \quad \overline{HC} = \cos\gamma.$$

In gleicher Weise findet man $\overline{HA} = \cos\alpha$, wenn für obige Ableitung der von B oder C ausgehende Durchmesser eingeführt wird. In gleicher Weise ist der Beweis zu führen, falls einer der Dreieckswinkel stumpf ist; dabei ergibt sich, daß der an die stumpfe Ecke anstoßende Höhenabschnitt negativ zu nehmen ist.

23. Die Formeln von Mollweide und Neper

Die Mollweide*schen Formeln* werden meist in der Form geschrieben:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}, \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}, \tag{23.1a}$$

woraus durch zyklische Vertauschung noch die Gleichungen

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \qquad \frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{23.1b}$$

und

$$\frac{c-a}{b} = \frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}, \qquad \frac{c+a}{b} = \frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \tag{23.1c}$$

entstehen. Die Mollweide*schen Formeln* umfassen also insgesamt sechs Gleichungen. Durch Division folgen daraus die Neper*schen Gleichungen;* bildet man z. B. aus (23.1a) den Quotienten

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \, \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}}$$

und beachtet, daß $\gamma/2 = 90° - (\alpha+\beta)/2$, also $\cot(\gamma/2) = \tan\{(\alpha+\beta)/2\}$ ist, so wird daraus

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{23.2a}$$

(23.2a) ist die erste der NEPERschen Gleichungen. Zwei weitere folgen daraus durch zyklische Vertauschung:

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\tan\dfrac{\beta+\gamma}{2}},\quad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\tan\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}{\tan\dfrac{\gamma+\alpha}{2}}. \tag{23.2b, c}$$

Hier eine historische Notiz: Die Namen beider Formelsysteme sind nicht ganz zutreffend: (23.1) ist schon bei NEWTON (Arithmetica universalis 1707) zu finden, d. h. MOLLWEIDE war lediglich der Wiederentdecker. Die nach NEPER benannten Gleichungen (23.2) finden sich schon bei Th. FINK (Geometria rotundi, Basel 1583), müßten also richtigerweise FINKsche Gleichungen heißen!

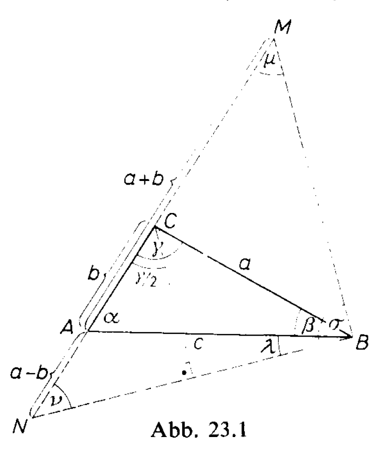


Abb. 23.1

Für beide Formelsysteme gibt es verschiedene Möglichkeiten der Herleitung. Hier zunächst eine geometrische Ableitung der MOLLWEIDEschen Formeln: Gilt im Dreieck ABC (Abb. 23.1) die Ungleichung $a > b$, so entstehen, wenn um C ein Kreis mit dem Radius $r = a$ gezeichnet wird, der die Verlängerungen von $\overline{AC}$ in M bzw. N schneidet, die Strecken $\overline{AM} = a+b$, $\overline{AN} = a-b$. Mit den Winkeln λ, μ, ν, σ erhält man für die Dreiecke ABM und ABN die Sinusverhältnisse

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\lambda}{\sin\nu} \text{ und } \frac{a+b}{c}=\frac{\sin\sigma}{\sin\mu}.$$

Zwischen den Winkeln λ, μ, ν, σ gelten nun folgende Beziehungen: $\triangle NBC$ ist gleichschenklig, also gilt $\nu = \lambda+\beta$ oder $\lambda = \nu-\beta$.

Fällt man von C das Lot auf $\overline{NB}$, so folgt auch $\nu = 90°-\gamma/2$ oder, wegen $\gamma/2 = 90°-(\alpha+\beta)/2$, auch $\nu = (\alpha+\beta)/2$.

Für μ findet man aus dem bei B rechtwinkligen $\triangle\, MBN$ die Beziehungen $\mu = 90°-\nu = \gamma/2$, $\sigma = 90°-\lambda$, also ist

$$\lambda=\nu-\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta=\frac{\alpha-\beta}{2} \text{ und } \sigma=90°-\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Aus den obigen Sinusverhältnissen wird damit

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma}{2}},$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin\left(90^\circ-\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}},$$

womit die MOLLWEIDEschen Formeln bewiesen sind.

Eine zweite Ableitung der MOLLWEIDEschen Formeln ermöglicht der Sinussatz: Aus der Addition und Subtraktion von

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma},\quad \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

folgt die Beziehung

$$\frac{a\pm b}{c}=\frac{\sin\alpha\pm\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Wendet man rechts die Verwandlungsformeln an, so wird:

$$\frac{a\pm b}{c}=\frac{2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}}=\frac{\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}},$$

d. h.

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}},\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma}{2}}.$$

Auch die NEPERschen Gleichungen lassen sich aus dem Sinussatz ableiten: Aus

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a}{b}$$

folgt durch korrespondierende Addition und Subtraktion

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{a-b}{a+b}.$$

Die Verwandlungsformeln liefern dafür

$$\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Diese Herleitung der NEPERschen Gleichungen aus dem Sinussatz, die an Kürze und Einfachheit nichts zu wünschen übrig läßt, enthält einen weiteren wichtigen Satz, der als *Sinus–Tangens-Satz* bezeichnet wird: Ist das Sinusverhältnis

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \tag{23.3a}$$

zweier Winkel α, β gegeben, so kann mit Hilfe der NEPERschen Gleichungen auf ein Tangensverhältnis

$$\frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a-b}{a+b} \tag{23.3b}$$

übergegangen werden.

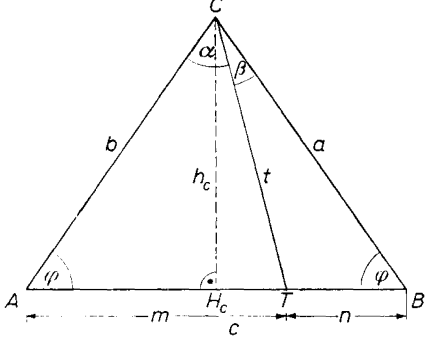


Abb. 23.2

Der Sinus–Tangens-Satz kann auch auf geometrischem Wege abgeleitet werden: Ist $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Basiswinkel φ und den gleichen Schenkeln $\overline{AC} = \overline{BC}$ (Abb. 23.2) und zerlegt man den Winkel bei C durch die Transversale $t = \overline{CT}$ in die Teilwinkel α und β, wobei $\alpha > \beta$ sein soll ($\alpha+\beta$ ist als konkav angenommen), so gelten mit $\overline{AT} = m$ und $\overline{BT} = n$ die Sinusverhältnisse

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{m}{t} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\beta}{\sin\varphi} = \frac{n}{t} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{m}{n}. \tag{23.3c}$$

Durch die Höhe h_c entstehen noch die bei H_c rechtwinkligen Dreiecke AH_cC und H_cTC, deren Winkel bei C gleich $(\alpha+\beta)/2$ und $(\alpha-\beta)/2$ sind, weil h_c ja zugleich Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ ist. Da h_c auch die Basis $\overline{AB}$ halbiert, ergeben sich die Katheten der beiden Dreiecke zu $\overline{AH_c} = (m+n)/2$ und $\overline{TH_c} = (m-n)/2$. Damit folgen aus den beiden Rechtwinkeldreiecken die Beziehungen

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\overline{AH_c}}{h_c} = \frac{m+n}{2h_c}, \qquad \tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\overline{TH_c}}{h_c} = \frac{m-n}{2h_c}.$$

Durch Division entsteht daraus

$$\frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{m-n}{m+n},$$

wodurch wieder der Übergang von einem Sinus- zu einem Tangensverhältnis möglich ist. — Setzt man $m/n = a/b$, so entsteht wieder die erste der NEPERschen Gleichungen. Gl. (23.3c) enthält noch den sogenannten *Spitzentransversalensatz des gleichschenkligen Dreiecks*, der etwa wie folgt formuliert werden kann: Jede Spitzentransversale eines gleichschenkligen Dreiecks teilt die Basis in zwei Abschnitte, die sich wie die Sinus der Gegenwinkel in der Spitze verhalten.

Eine weitere Ableitung der MOLLWEIDEschen Gleichungen — und damit auch der NEPERschen Gleichungen — mit Hilfe der Durchmesserregel für den Umkreis wird in [25] angegeben. — Auf die Bedeutung dieser Formelsysteme für die Dreiecksauflösung ist in [26] einzugehen.

24. Tangens der halben Dreieckswinkel

Zu den bisher abgeleiteten Sätzen treten noch die *Halbwinkelformeln*, welche die halben Winkel als Funktionen der Seiten angeben; sie lauten

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}, \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \tag{24.1}$$

mit $s = (a+b+c)/2$.

Hier zunächst wieder eine geometrische Herleitung unter Verwendung des dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises mit dem Radius ϱ (Abb. 24.1): Fällt man vom Mittelpunkt I des Inkreises, dem Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden, die Lote $\overline{IK} = \overline{IL} = \overline{IM}$ auf die Seiten, so unterteilen die Lotfußpunkte K, L und M die Seiten in die Abschnitte $\overline{AK} = \overline{AM} = x$, $\overline{BK} = \overline{BL} = y$, $\overline{CL} = \overline{CM} = z$. Die Abschnitte x, y, z erfüllen das Gleichungstripel $a = y+z$, $b = x+z$, $c = x+y$; die Auflösung gibt

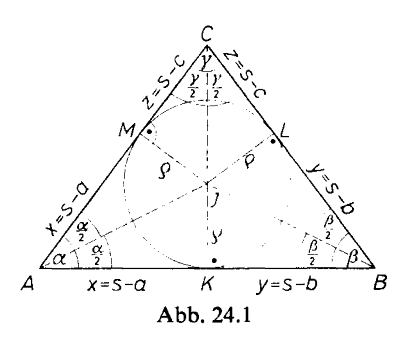


Abb. 24.1

$$x = s-a, \quad y = s-b, \quad z = s-c \quad \text{mit} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken AKI, BIK und CIL folgt dann

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b}, \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c}. \tag{24.2}$$

Gl. (24.2) wird als die *Tangensformel* bezeichnet.

Gelingt es jetzt noch, den Inkreisradius durch die Seiten a, b, c auszudrücken, so ist die Ableitung der Halbwinkelformeln gelöst. Die Fläche F des Dreiecks ABC kann aus den Teildreiecken ABI, BCI, CAI zusammengesetzt werden; also gilt $F = (1/2)\varrho a + (1/2)\varrho b + (1/2)\varrho c = s\varrho$, oder $\varrho = F/s$. Nach der HERONschen *Flächenformel* (1.1) ist aber $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, also folgt $\varrho = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)/s}$, und die Tangentenformel (24.2) geht damit über in die Halbwinkelformel (24.1), wobei es genügt, eine der Gleichungen anzuschreiben, z. B. die erste,

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

weil ja die beiden anderen wieder durch zyklische Vertauschung daraus hervorgehen.

25. Ableitung der Dreieckssätze aus dem Kosinussatz

Hier soll noch gezeigt werden, daß die meisten Dreieckssätze allein aus dem Kosinussatz abgeleitet werden können, weshalb er als die wichtigste Beziehung im ebenen Dreieck gilt. Schreibt man die erste Gleichung (22.1) in der Form

$$2bc\cos\alpha = -a^2+b^2+c^2$$

und ersetzt $\cos\alpha$ durch

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1 \quad \text{bzw. durch} \quad \cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

so erhält man einmal

$$4bc\cos^2\frac{\alpha}{2} = -a^2+b^2+c^2+2bc = -a^2+(b+c)^2 =$$
$$= [a+(b+c)][-a+(b+c)] = 2s\cdot 2(s-a) = 4s(s-a),$$

und zum andern

$$4bc\sin^2\frac{\alpha}{2} = a^2-b^2-c^2+2bc = a^2-(b-c)^2 =$$
$$= [a-(b-c)][a+(b-c)] = 4(s-b)(s-c).$$

Daraus folgen zunächst zwei weitere Halbwinkelbeziehungen, nämlich

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \qquad (25.1)\text{a}$$

die wieder zyklisch vertauscht werden können,

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}, \quad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},$$
$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}, \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}, \qquad (25.1\text{b,c})$$

und schließlich durch Division der Formeln (25.1) auch die Halbwinkelformeln (24.1).

Multipliziert man die beiden Gleichungen von (25.1) miteinander, so findet man noch

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{1}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (25.2)$$

Der Sinus eines Dreieckswinkels läßt sich also auch in der Form

$$\sin\alpha = (2/bc)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

angeben. Beachtet man, daß

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = F = \frac{bc}{2}\sin\alpha = \frac{abc}{4r}$$

ist, so gibt (25.2) die Durchmesserregel für den Umkreis, $\sin\alpha = a/2r$, und daraus folgt, wie schon in [21] gezeigt, wiederum der Sinussatz.

Aus dem Durchmessersatz ergeben sich noch die MOLLWEIDEschen und somit auch die NEPERschen Gleichungen: Bildet man aus $a = 2r\sin\alpha$ und $b = 2r\sin\beta$ die Summe bzw. Differenz

$$a \pm b = 2r(\sin\alpha \pm \sin\beta) = 4r\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

und dividiert durch $c = 2r\sin\gamma = 4r\sin(\gamma/2)\cos(\gamma/2)$, so folgen daraus wieder die MOLLWEIDEschen Formeln

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

und

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

und die Division der beiden Gleichungen endlich liefert wieder die NEPERsche Formel.

Schließlich soll an einigen Beispielen gezeigt werden, daß, wie schon erwähnt, die in [20] abgeleiteten goniometrischen Formeln des Dreiecks auch mit Hilfe der Dreieckssätze gewonnen werden können: Bildet man z. B. aus (25.1) die Produkte

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}\,\frac{s(s-b)}{ca}}=\frac{s}{c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}=\frac{s}{c}\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{s-c}{c}\sin\frac{\gamma}{2}$$

und multipliziert die erste Gleichung mit der aus $c = 2r\sin\gamma = 4r\sin(\gamma/2)\cos(\gamma/2)$ folgenden Beziehung $4\cos(\gamma/2) = c/r\sin(\gamma/2)$, so wird daraus

$$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{r}=\frac{a+b+c}{2r}=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma,$$

womit (20.9) nachgewiesen ist. Wird die zweite Gleichung mit diesem Faktor multipliziert, so entsteht

$$4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s-c}{r}=\frac{a+b-c}{2r}=\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma,$$

womit auch (20.10) bestätigt ist.

Hier noch ein weiteres Beispiel: Bildet man aus den Halbwinkelformeln (24.1) die Produkte

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=(s-c)/s,\qquad \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}=(s-a)/s,$$

$$\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=(s-b)/s$$

und summiert, so wird

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{s}{s}=1,$$

womit (20.15) bewiesen ist.

26. Die Grundaufgaben der Dreiecksauflösung, Hinweise für die praktische Rechnung

Die bei der *Dreiecksberechnung* auftretenden Grundaufgaben können mit den bisher abgeleiteten Formeln ohne Schwierigkeiten gelöst werden. Unter den gegebenen und gesuchten Stücken seien zunächst die Seiten

a, b, c und die Winkel α, β, γ verstanden. — Weitere Dreiecksaufgaben werden in [33] behandelt.

Nach den Kongruenzsätzen ist ein Dreieck durch drei voneinander unabhängige Stücke bestimmt, worunter mindestens eine Seite sein muß. Man hat also die folgenden *Grundaufgaben:*

I. Gegeben eine Seite und zwei Winkel.

II. Gegeben zwei Seiten und ein Winkel; dabei ist zu unterscheiden

a) der Winkel wird von den Seiten eingeschlossen und
b) der Winkel liegt einer der Seiten gegenüber.

III. Gegeben drei Seiten.

Da die Aufgabe II in zwei Aufgaben zerfällt, liegen insgesamt vier Grundaufgaben vor.

Zu I: Sind z. B. a, β und γ gegeben (vgl. Abb. 26.1, die gegebenen Stücke sind darin und auch in den folgenden Abbildungen unterstrichen), so ergeben sich die fehlenden Seiten mit $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$ nach dem Sinussatz zu

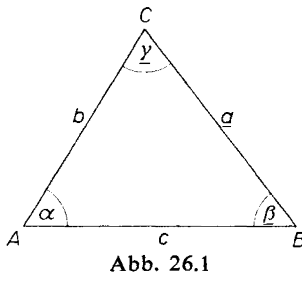


Abb. 26.1

$$b = a\,\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}, \qquad c = a\,\frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Bedingungen für die gegebenen Stücke, außer der selbstverständlichen, daß die Summe der zwei gegebenen Winkel $< 180°$ sein muß, bestehen nicht.

Zu IIa: Sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, z. B. b, c, α gegeben (Abb. 26.2) und ist nur die dritte Seite verlangt, so liefert der Kosinussatz

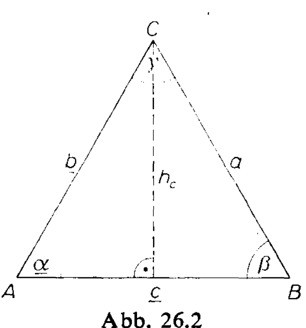


Abb. 26.2

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}.$$

Eine erste vollständige Lösung bieten die NEPERschen und MOLLWEIDEschen Gleichungen. Nach (23.2b) gilt

$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\tan\frac{\beta+\gamma}{2}$$

oder, weil $\dfrac{\beta+\gamma}{2} = \dfrac{180°-\alpha}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$ ist, wird

$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{\alpha}{2}.$$

Damit sind die Winkel bekannt:

$$\beta = \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2},$$

$$\gamma = \frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Die fehlende Seite a ergibt sich aus (23.1b) zu

$$a = \frac{(b-c)\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Für die Rechnung hat man lediglich zu beachten, daß für $b > c$ auch $\beta > \gamma$ werden muß bzw. für $b < c$ wegen $\beta < \gamma$ $\tan\{(\beta-\gamma)/2\} < 0$ wird.

Natürlich kann die Seite a auch nach dem Sinussatz berechnet werden. Da aber die Stücke $\alpha/2$, $(b-c)$ und $(b+c)$ schon vorliegen, ist die MOLLWEIDEsche Gleichung bequemer.

Eine zweite vollständige Lösung ergibt sich unmittelbar aus Abb. 26.2. Im $\triangle ABC$ gilt

$$\tan\beta = \frac{h_c}{c-b\cos\alpha} = \frac{b\sin\alpha}{c-b\cos\alpha},$$

womit β und auch der dritte Winkel $\gamma = 180^\circ-(\alpha+\beta)$ berechnet werden können. Der Sinussatz gibt die dritte Seite zu $a = b\,\sin\alpha/\sin\beta$. Für die Seite a gilt aber auch $a\cos\beta = c-b\cos\alpha$ oder $a = (c-b\cos\alpha)/\cos\beta$.

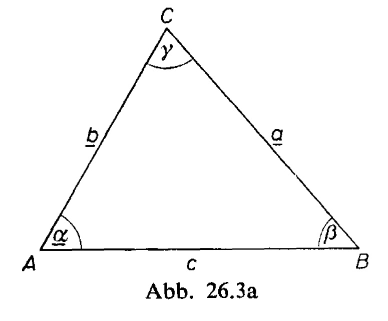


Abb. 26.3a

Zu IIb: Sind zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen, z. B. a, b und α gegeben (Abb. 26.3a), so liegt der doppeldeutige Fall (Casus ambiguus) vor, für den es entweder keine, eine oder zwei Lösungen gibt. — Ist nur die dritte Seite verlangt, so erhält man für c nach dem Kosinussatz (22.1) die quadratische Gleichung $c^2-2bc\cos\alpha+(b^2-a^2) = 0$. Nach c aufgelöst gibt dies

$$c = b\cos\alpha \pm \sqrt{b^2\cos^2\alpha - b^2 + a^2} = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha};$$

also wird

$$c = b\cos\alpha \pm \sqrt{(a+b\sin\alpha)(a-b\sin\alpha)}.$$

Offenbar gibt es zwei brauchbare Werte von c, also zwei verschiedene Dreiecke, wenn $|\sqrt{(a+b\sin\alpha)(a-b\sin\alpha)}| < b\cos\alpha$ ist. Wird einer der Werte von c negativ, so gibt es nur ein Dreieck; wird die Wurzel imaginär, dann gibt es kein Dreieck mit den gegebenen Stücken.

Sind auch die Winkel verlangt, so bestimmt man diese zuerst und dann die fehlende Seite. Für β liefert der Sinussatz $\sin\beta = b\sin\alpha/a$, woraus sofort die *Doppeldeutigkeit* erkennbar ist: der Sinus liefert zwei Winkel, nämlich β und $\beta' = 180°-\beta$, wobei vier Fälle eintreten können, nämlich

1. keiner der Winkel ist brauchbar,
2. beide Lösungen fallen zusammen,
3. beide Lösungen sind brauchbar,
4. nur ein Winkel ist möglich, der andere unmöglich.

Fall 1 liegt vor, wenn $b\sin\alpha > a$ ist; dies kann nur eintreten, wenn $a < b$ ist, also der Gegenwinkel der kleineren Seite gegeben ist.

Fall 2 tritt ein, wenn $b\sin\alpha = a$, d. h. $\sin\beta = 1$ und $\beta = 90°$ wird, also ein rechtwinkliges Dreieck mit b als Hypotenuse vorliegt.

Fall 3 kann nur eintreten, wenn $a < b$, also auch $\alpha < \beta$ ist, d. h. der Gegenwinkel der kleineren Seiten gegeben ist, und wenn $\alpha < 90°$ bleibt. Für $\alpha > 90°$ gibt es keine Lösung, weil dann auch $\beta > 90°$ sein müßte, was wegen $\alpha+\beta < 180°$ unmöglich ist.

Fall 4 liegt vor, wenn $a > b$, also auch $\alpha > \beta$ ist, d. h. der Gegenwinkel der größeren Seite gegeben ist. Die Lösung ist, unabhängig von α, stets eindeutig, weil der Winkel β stets spitz sein muß. Für $a = b$ ergibt sich ein gleichschenkliges Dreieck.

Das Ergebnis der Diskussion von Aufgabe IIb läßt sich zusammenfassen:

Gegeben: a, b, α; ist $b\sin\alpha < a$, so gibt es für

$$\begin{aligned} a < b,\ \alpha &< 90° = \text{zwei Lösungen},\\ \alpha &\geqq 90° = \text{keine Lösung},\\ a \geqq b,\ \alpha &\lesseqgtr 90° = \text{stets eine eindeutige Lösung}. \end{aligned}$$

Die Diskussion der Aufgabe IIa ist auch auf geometrischem Wege möglich. Ist $\alpha < 90°$, so gibt es nach Abb. 26.3b für

$a < b\sin\alpha$	keine	Lösung	(Fall 1),
$a = b\sin\alpha$	eine	Lösung B_2	(Fall 2),
$a > b\sin\alpha$	zwei	Lösungen B_3' und B_3''	(Fall 3),
$a \geqq b$	eine	Lösung B_4	(Fall 4).

Die Grenzen der Doppeldeutigkeit sind durch die Ungleichung $b\sin\alpha < a < b$ vorgegeben. Ist $\alpha > 90°$ (Abb. 26.3c), so gibt es nur für $a > b$ eine Lösung.

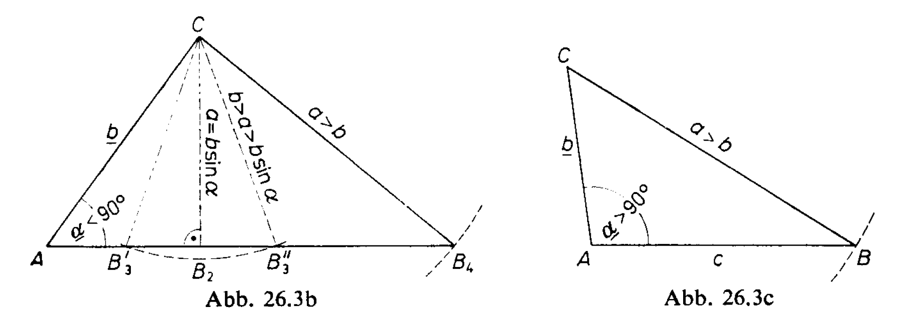


Abb. 26.3b

Abb. 26.3c

Ist nun β bekannt und sind zwei Lösungen möglich, β und $(180°-\beta)$, so liefert der Projektionssatz für die dritte Seite

$$c_1 = b \cos\alpha + a \cos\beta \text{ bzw. } c_2 = b \cos\alpha + a \cos(180°-\beta) = b \cos\alpha - a \cos\beta,$$

also

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = b \cos\alpha \pm a \cos\beta.$$

Ebenso kann für die Berechnung der dritten Seite c der Sinussatz verwendet werden:

$$c_1 = a\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}, \quad c_2 = a\frac{\sin(\alpha+180°-\beta)}{\sin\alpha},$$

oder

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = a\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha}.$$

Übrigens würde sich ein unmöglicher Wert von β ohne die obige Diskussion auch an dem negativen Wert für c zeigen.

Zu III: Sind die drei Seiten a, b, c gegeben, so geschieht die numerische Berechnung der Winkel α, β, γ am zweckmäßigsten mit Hilfe der Halbwinkelformeln, die noch in der Form

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b}, \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c}$$

gebildet werden können, wobei

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

den Radius des Inkreises bedeutet (vgl. auch [27]). — Natürlich ist für die Lösung dieser Aufgabe auch der Kosinussatz geeignet [vgl. die Gleichungen (22.2)], der aber ohne Umformung keine durchgehende logarithmische Rechnung ermöglicht.

Bedingungen für die Lösbarkeit bestehen — außer der selbstverständlichen, daß die Summe je zweier Seiten größer sein muß als die dritte Seite — nicht.

Es erscheint angebracht, im Anschluß an die Grundaufgaben der Dreiecksberechnung einige *Bemerkungen zur numerischen und logarithmischen Rechnung* anzufügen. — Bei numerischer Rechnung mit Hilfe von Tischrechenautomaten sind von der Bequemlichkeit her gesehen praktisch alle Dreieckssätze gleichwertig. Zum Beispiel besteht kaum ein Unterschied in der Rechenarbeit, ob bei Aufgabe III die Winkel nach dem Kosinussatz oder den Halbwinkelformeln ermittelt werden. — Von der Genauigkeit her ist es aber ein großer Unterschied, ob ein Winkel aus seinem Sinus oder Kosinus, seinem Tangens oder Kotangens bestimmt wird. Z. B. können Winkel um 90° aus ihrem Sinus und Winkel bei 0° aus ihrem Kosinus nur unscharf bestimmt werden, weil in diesen Bereichen sehr kleinen Funktionsänderungen sehr große Argumentänderungen gegenüberstehen, wie ein Blick in eine Funktionstafel oder auf Abb. 26.4 zeigt. Dagegen lassen Tangens und Kotangens einen Winkel immer ausreichend scharf bestimmen, weil hier gleichen Funktionsänderungen wesentlich geringere Argumentänderungen entsprechen (Abb. 26.4). Hier erkennt man sofort den Vorzug der Halbwinkelsätze: Die Winkel $\alpha/2$, $\beta/2$, $\gamma/2$ sind immer spitz und überdies meist klein, können also sehr scharf bestimmt werden. Auch die NEPERschen Gleichungen sind in dieser Hinsicht günstig.

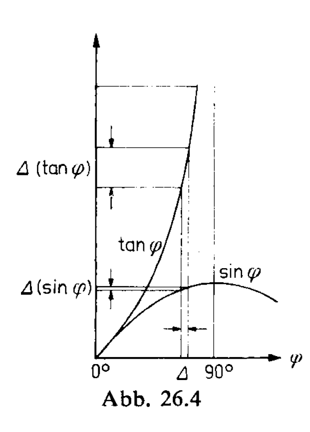
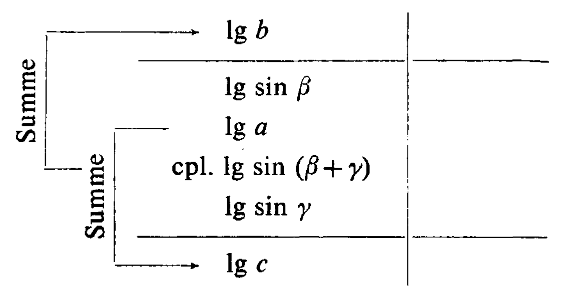


Abb. 26.4

Während bei numerischer Rechnung an Rechenmaschinen kaum Zwischenergebnisse zu notieren sind und sich somit ein Rechenschema erübrigt, wird man darauf bei logarithmischer Rechnung nicht verzichten. Für die Seitenberechnung nach dem Sinussatz z. B. (Aufgabe I),

$b = a \sin\beta/\sin(\beta+\gamma)$, $c = a \sin\gamma/\sin(\beta+\gamma)$, kann es etwa wie folgt



aussehen, wenn der Ergänzungslogarithmus cpl.lg sin $(\beta+\gamma)$ von lg sin $(\beta+\gamma)$ eingeführt wird.

cpl.lg z bedeutet nach den Regeln des logarithmischen Rechnens $0-\lg z = \lg 1-\lg z = \lg 1/z$.

Während der Sinussatz, die Halbwinkelformeln und die NEPERschen Gleichungen eine durchgehende logarithmische Rechnung ermöglichen, ist der Kosinussatz für die logarithmische Rechnung erst umzuformen: Ist z. B. $a = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$ auszuwerten (Aufgabe IIa), so setzt man

$$b^2+c^2-2bc\cos\alpha = (b+c)^2-4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

und erhält mit der Hilfsgröße $p = 2\sqrt{bc}\cos(\alpha/2)$ schließlich

$$a = \sqrt{(b+c+p)(b+c-p)}.$$

Auch Ausdrücke der Art

$$\tan\beta = \frac{b\sin\alpha}{c-b\cos\alpha}$$

(vgl. die zweite Lösung der Aufgabe IIa) können für eine bequeme logarithmische Rechnung aufbereitet werden. Führt man den Hilfswinkel ν mit $\tan\nu = b\sin\alpha/c$ ein, so wird

$$\tan\beta = \frac{c\tan\nu}{c-b\cos\alpha} = \frac{c\sin\nu}{c\cos\nu-b\cos\alpha\cos\nu},$$

und mit $b\cos\nu = c\sin\nu/\sin\alpha$ schließlich

$$\tan\beta = \frac{c\sin\nu}{c\cos\nu-\dfrac{c\sin\nu\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha\sin\nu}{\sin(\alpha-\nu)}.$$

Die Umformung weiterer trigonometrischer Ausdrücke durch Einführung von Hilfswinkeln wird in [47] gezeigt.

Schließlich sei erwähnt, daß man jede sich bietende *Rechenkontrolle* nützen wird. Dazu ein Beispiel: Sind, wie in Aufgabe III, die Seiten gegeben, so wird man sich nicht damit begnügen, zwei Winkel nach den Halbwinkelsätzen zu berechnen und den dritten durch Ergänzung auf 180° zu bilden, sondern wird alle drei Winkel berechnen. Dann muß sein

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2} = 90°.$$

Wie leicht nachzuweisen ist, können aber schon während der Rechnung Kontrollen vorgenommen werden. So muß z. B.

$$(s-a)+(s-b)+(s-c) = s \quad \text{und} \quad \tan(\alpha/2)\tan(\beta/2)\tan(\gamma/2) = \varrho/s$$

sein.

27. Formeln für die Fläche, den In- und Umkreisradius und den Umfang des Dreiecks

Die *fundamentale Flächenformel*, wonach die Dreiecksfläche gleich dem Halbprodukt zweier Seiten, multipliziert mit dem Sinus des Zwischenwinkels, ist, wurde schon in [21] angegeben. Danach gilt, vgl. (21.4),

$$F = \frac{ab}{2}\sin\gamma = \frac{ac}{2}\sin\beta = \frac{bc}{2}\sin\alpha. \tag{27.1}$$

Die Fläche kann aber auch durch eine Seite und zwei Anwinkel oder durch die drei Seiten ausgedrückt werden. Im ersten Falle liefert, wenn z. B. c, α, β gegeben sind, die letzte Gleichung von (27.1), wenn man für b nach dem Sinussatz

$$b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

schreibt, sofort

$$2F = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \tag{27.2a}$$

und durch zyklische Vertauschung erhält man noch

$$2F = \frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}. \tag{27.2b}$$

Aus (27.2a) folgt auch noch die *Flächenformel*

$$2F = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} = \frac{c^2}{\cot\alpha+\cot\beta}, \tag{27.2c}$$

woraus sich durch zyklische Vertauschung zwei weitere Ausdrücke ergeben.

Sind die drei Seiten gegeben, so liefert die erste Gleichung von (27.1), wenn man quadriert und $\sin^2\gamma = 1-\cos^2\gamma$ setzt, zunächst $4F^2 = a^2b^2(1-\cos^2\gamma)$. Drückt man $\cos\gamma$ nach dem Kosinussatz durch die Seiten aus, $\cos\gamma = (a^2+b^2-c^2)/2ab$, oder

$$1-\cos^2\gamma = [4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2]/4a^2b^2,$$

so wird $16F^2 = 4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$. Formt man die rechte Seite in

$$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2 = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

um und führt die Hilfsgrößen $s = (a+b+c)/2$, $s_a = s-a$, $s_b = s-b$, $s_c = s-c$ ein, so wird $16F^2 = 2s \cdot 2s_a \cdot 2s_b \cdot 2s_c$ oder

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{27.3}$$

(27.3) ist die berühmte HERON*sche Flächenformel*, die in der Planimetrie mit Hilfe des Inkreisradius ϱ bewiesen wird.

Von (27.1) ausgehend, kann auch die Flächenformel

$$F = \frac{abc}{4r} \tag{27.4}$$

abgeleitet werden. Setzt man in $F = (ab \sin\gamma)/2$ nach dem Durchmessersatz $\sin\gamma = c/2r$, so wird sofort $F = abc/4r$.

Interessant ist noch, daß sich die Fläche auch durch alle sechs Stücke des Dreiecks ausdrücken läßt:

Aus der Multiplikation der drei Gleichungen von (27.1) folgt

$$2F = \sqrt[3]{a^2b^2c^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}, \tag{27.5a}$$

oder aus (27.2c)

$$F = \frac{a^2+b^2+c^2}{4(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)}. \tag{27.5b}$$

Ist für ein Dreieck nur eine Seite und deren Gegenwinkel bekannt, so läßt sich, obgleich das Dreieck noch nicht bestimmt ist, der *Halbmesser des Umkreises* angeben.

Der Grund für diesen scheinbaren Widerspruch ist, daß der geometrische Ort eines Punktes, von dem aus die Endpunkte einer festen Strecke stets unter dem gleichen Winkel gesehen werden, ein Kreis ist (Umfangswinkel).

Nach dem Durchmessersatz ist

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

also auch

$$r = \frac{\frac{a}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{2}}{\sin\beta} = \frac{\frac{c}{2}}{\sin\gamma}. \tag{27.6}$$

Aus $= a/2 \sin\alpha$ erhält man mit dem aus (25.2) folgenden Wert $\sin\alpha = (2/bc)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ wiederum $r = abc/4F$, also eine mit (27.4) übereinstimmende Beziehung.

Auch r kann durch alle sechs Sücke des Dreiecks ausgedrückt werden, z. B.

$$r = \frac{a+b+c}{8 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}.$$

Die hier zahlreich möglichen Beziehungen sind jedoch ohne praktische Bedeutung!

Für den *Radius ϱ des Inkreises* wurde in [24] gefunden:

$$\varrho = \frac{F}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}. \tag{27.7}$$

Sind statt der drei Seiten nur eine Seite und die Winkel des Dreiecks gegeben, so findet man nach (24.2) z. B.

$$\varrho = (s-a) \tan \frac{\alpha}{2} = (s-a) \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

und weil nach (25.1)

$$(s-a) \sin \frac{\alpha}{2} = (s-a) \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = a \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

ist, wird schließlich mit zyklischer Vertauschung

$$\varrho = \frac{a \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{b \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{c \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}. \tag{27.8}$$

(27.8) kann übrigens unmittelbar an Abb. 24.1 abgelesen werden; z. B. gilt

$$c = \overline{AB} = \varrho \left(\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2}\right) = \varrho \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} =$$

$$= \varrho \frac{\sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}, \quad \text{also} \quad \varrho = \frac{c \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}.$$

Hier noch die Formeln für die Radien ϱ', ϱ'', ϱ''' der Ankreise an die Seiten a, b, c, die sich in einfacher Weise ableiten lassen, jedoch selten benützt werden:

$$\varrho' = \frac{F}{s-a}, \quad \varrho'' = \frac{F}{s-b}, \quad \varrho''' = \frac{F}{s-c}.$$

Der *Umfang des Dreiecks* läßt sich aus (27.6) ableiten; ersetzt man in der Summe

$$r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma) = \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2} = s$$

$\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ durch die aus (25.2) folgenden Ausdrücke

$$\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad \sin\beta = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

so wird

$$s = 2r\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\left[\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}\right] =$$

$$= \frac{4rs\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{abc} = 4r\sqrt{\frac{s^3(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2b^2c^2}},$$

woraus nach (25.1)

$$s = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \tag{27.9}$$

folgt.

28. Differentialformeln des ebenen Dreiecks

Bei vielen Aufgaben der praktischen Trigonometrie, insbesondere in der Vermessungskunde, hat man abzuschätzen, wie sich die Unsicherheiten oder Änderungen der gegebenen Stücke auf die daraus trigonometrisch abgeleiteten Größen auswirken. — Eine ausführliche Darstellung der Fehlerfortpflanzung ist Aufgabe der Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung[30]. Hier wird es genügen, die für Abschätzungen notwendigen Formeln herzuleiten. Am einfachsten sind diese Formeln mit Hilfe der Differentialrechnung zu erhalten, wofür die Ableitungen der Kreisfunktionen benötigt werden. Indessen können die Formeln auch auf elementarem Wege gewonnen werden, was zuerst gezeigt werden soll.

Als erstes sind dafür die *Änderungen der Winkelfunktionen* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ anzugeben, wenn sich α in $\alpha+\Delta\alpha$ ändert; dabei wird angenom-

[30] Vgl. z. B. H. Wolf: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, F. Dümmlers Verlag, Bonn 1968, oder W. Grossmann, Grundzüge der Ausgleichungsrechnung, 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1961.

men, daß $\Delta\alpha$ so klein ist, daß $\sin(\Delta\alpha) = \tan(\Delta\alpha) = \widehat{\Delta\alpha} = \Delta\alpha''/\varrho''$ und $\cos(\Delta\alpha) = 1$ gesetzt werden kann und die höheren Potenzen $(\Delta\alpha''/\varrho'')^2$, $(\Delta\alpha''/\varrho'')^3$ usf. der geforderten Rechengenauigkeit entsprechend vernachlässigbar sind. Dann gilt nach dem Additionstheorem

$$\sin(\alpha+\Delta\alpha) = \sin\alpha\cos(\Delta\alpha)+\cos\alpha\sin(\Delta\alpha) = \sin\alpha+\cos\alpha\left(\frac{\Delta\alpha''}{\varrho''}\right).$$

In gleicher Weise liefern die Additionstheoreme die Funktionswerte $\cos(\alpha+\Delta\alpha)$, $\tan(\alpha+\Delta\alpha)$ und $\cot(\alpha+\Delta\alpha)$, so daß man insgesamt erhält

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\Delta\alpha) &= \sin\alpha+\cos\alpha\left(\frac{\Delta\alpha''}{\varrho''}\right),\\
\cos(\alpha+\Delta\alpha) &= \cos\alpha-\sin\alpha\left(\frac{\Delta\alpha''}{\varrho''}\right),\\
\tan(\alpha+\Delta\alpha) &= \tan\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\frac{\Delta\alpha''}{\varrho''}\right),\\
\cot(\alpha+\Delta\alpha) &= \cot\alpha-\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\Delta\alpha''}{\varrho''}\right).
\end{aligned} \tag{28.1}$$

Für die Ableitung der *Differentialformeln des rechtwinkligen Dreiecks* sei zunächst folgende Aufgabe behandelt:

1. Die Katheten a, b ändern sich um Δa und Δb; gesucht ist die Änderung Δc der Hypotenuse. Dabei sollen Δa, Δb so klein sein, daß die zweiten und höheren Potenzen von $\Delta a/a$, $\Delta b/b$, wobei $\Delta a/a$, $\Delta b/b$ die *relativen Seitenänderungen* darstellen, gegenüber diesen Größen vernachlässigt werden können. Ebenso sollen Produkte der Art $(\Delta a/a)(\Delta b/b)$ klein sein gegen die relativen Änderungen $\Delta a/a$, $\Delta b/b$. Diese Forderungen können durch die Ungleichungen

$$(\Delta a)^2 \ll a\,\Delta a, \qquad \Delta a\,\Delta b \ll a\,\Delta a \text{ oder } b\,\Delta b \text{ usf.}$$

ausgedrückt werden. Wie ändert sich nun die Hypotenuse c, wenn die Katheten um Δa bzw. Δb geändert werden? Es gilt

$$(c+\Delta c)^2 = (a+\Delta a)^2+(b+\Delta b)^2,$$

oder

$$c^2+2c\,\Delta c+(\Delta c)^2 = a^2+2a\,\Delta a+(\Delta a)^2+b^2+2b\,\Delta b+(\Delta b)^2.$$

Wegen $c^2 = a^2+b^2$ wird daraus, wenn man die höheren Glieder vernachlässigt,

$$c\,\Delta c = a\,\Delta a+b\,\Delta b.$$

Um die relative Änderung der Hypotenuse zu erhalten, ist mit $1/c^2$ zu multiplizieren, also

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{a\,\Delta a + b\,\Delta b}{c^2}. \tag{28.2a}$$

Zu beachten ist, daß bei dieser elementaren Ableitung die Änderungen Δa, Δb, Δc der Seiten und $\widehat{\Delta\alpha}$, $\widehat{\Delta\beta}$, $\widehat{\Delta\gamma}$ der Winkel nicht als Differentiale gelten, sondern als kleine Größen, die den angegebenen Bedingungen genügen.

2. Sind die Änderungen Δb bzw. $\Delta\beta$ der Kathete b bzw. des Winkels β gegeben, so folgt für die Änderung Δc der Hypotenuse c aus $b = c \sin\beta$ jetzt

$$(b+\Delta b) = (c+\Delta c)\sin(\beta+\Delta\beta) =$$

$$= (c+\Delta c)\left[\sin\beta + \cos\beta\,\widehat{\Delta\beta}\right],$$

oder

$$\Delta b = \Delta c \sin\beta + c\cos\beta\,\widehat{\Delta\beta}.$$

Wird noch durch $b = c\sin\beta$ dividiert, so erhält man

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta b}{b} - \cot\beta\left(\frac{\Delta\beta''}{\varrho''}\right). \tag{28.2b}$$

Weit einfacher können die Formeln (28.2) mit Hilfe der Differentialrechnung gewonnen werden. Unter Beachtung der Differentiationsregeln — die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen sind in [41] dargestellt — findet man für die erste Aufgabe aus der Differentiation von $c^2 = a^2 + b^2$

$$2c\,\mathrm{d}c = 2a\,\mathrm{d}a + 2b\,\mathrm{d}b,$$

oder, wenn noch mit $1/2c^2$ multipliziert wird,

$$\frac{\mathrm{d}c}{c} = \frac{a\,\mathrm{d}a + b\,\mathrm{d}b}{c^2}.$$

Für die 2. Aufgabe folgt aus der Differentiation von $b = c\sin\beta$ zunächst

$$\mathrm{d}b = \mathrm{d}c\sin\beta + c\cos\beta\,\mathrm{d}\beta$$

oder, wenn noch durch $b = c\sin\beta$ dividiert wird,

$$\frac{\mathrm{d}c}{c} = \frac{\mathrm{d}b}{b} - \cot\beta\left(\frac{\mathrm{d}\beta''}{\varrho''}\right).$$

Die *Differentialformeln für das schiefwinklige Dreieck* sollen so entwickelt werden, daß aus den Änderungen der drei gegebenen Stücke die

der abgeleiteten Stücke angegeben werden können; dabei soll jetzt für die Ableitung die Differentialrechnung benützt werden.

Für die Änderungen $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ der Winkel gilt wegen $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ zunächst

$$d\alpha + d\beta + d\gamma = 0, \tag{28.3}$$

weil ja auch die Summe $(\alpha + d\alpha) + (\beta + d\beta) + (\gamma + d\gamma)$ der geänderten Winkel 180° ergeben muß.

3. Um eine Beziehung zwischen den Änderungen zweier Seiten und deren Gegenwinkel, z. B. a, b, α, β herzustellen, ist der Sinussatz $a \sin \beta = b \sin \alpha$ zu differenzieren:

$$da \sin \beta + a \cos \beta \, d\beta = db \sin \alpha + b \cos \alpha \, d\alpha.$$

Mit $1/a \sin \beta = 1/b \sin \alpha$ multipliziert, wird daraus

$$\frac{da}{a} + \cot \beta \, d\beta = \frac{db}{b} + \cot \alpha \, d\alpha,$$

woraus sich durch zyklische Vertauschung die Formelgruppe

$$\frac{da}{a} - \cot \alpha \left(\frac{d\alpha''}{\varrho''}\right) = \frac{db}{b} - \cot \beta \left(\frac{d\beta''}{\varrho''}\right) = \frac{dc}{c} - \cot \gamma \left(\frac{d\gamma''}{\varrho''}\right) \tag{28.4}$$

ergibt.

Natürlich lassen sich auch die Differentialformeln des schiefwinkligen Dreiecks auf elementarem Wege herleiten. Mit den Änderungen Δa, Δb, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ gibt der Sinussatz $a \sin \beta = b \sin \alpha$

$$(a + \Delta a) \sin (\beta + \Delta\beta) = (b + \Delta b) \sin (\alpha + \Delta\alpha),$$

oder

$$(a + \Delta a) \{\sin \beta + \cos \beta \cdot \widehat{\Delta\beta}\} = (b + \Delta b) \{\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \widehat{\Delta\alpha}\}.$$

Vernachlässigt man Produkte der Änderungen, so wird daraus

$$\Delta a \sin \beta + a \cos \beta \cdot \widehat{\Delta\beta} = \Delta b \sin \alpha + b \cos \alpha \cdot \widehat{\Delta\alpha},$$

oder nach Multiplikation mit $1/a \sin \beta = 1/b \sin \alpha$ schließlich

$$\frac{\Delta a}{a} - \cot \alpha \left(\frac{\Delta\alpha''}{\varrho''}\right) = \frac{\Delta b}{b} - \cot \beta \left(\frac{\Delta\beta''}{\varrho''}\right).$$

4. Eine Beziehung zwischen den Differentialen der drei Seiten und einem Winkel, z. B. α, liefert der Kosinus-Satz; differenziert man

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \text{ so wird}$$

$$2a\, da = 2b\, db + 2c\, dc - 2\, db\, c \cos \alpha - 2\, dc\, b \cos \alpha + 2bc \sin \alpha \, d\alpha,$$

oder zusammengefaßt

$$a\, da = (b - c \cos \alpha)\, db + (c - b \cos \alpha)\, dc + bc \sin \alpha \left(\frac{d\alpha''}{\varrho''}\right). \tag{28.5a}$$

Die zyklische Vertauschung liefert zwei weitere Gleichungen:

$$b\,\mathrm{d}b = (c-a\cos\beta)\,\mathrm{d}c+(a-c\cos\beta)\,\mathrm{d}a+ca\sin\beta\left(\frac{\mathrm{d}\beta''}{\varrho''}\right),$$
$$c\,\mathrm{d}c = (a-b\cos\gamma)\,\mathrm{d}a+(b-a\cos\gamma)\,\mathrm{d}b+ab\sin\gamma\left(\frac{\mathrm{d}\gamma''}{\varrho''}\right). \qquad (28.5\mathrm{b})$$

5. Schließlich sei noch die Beziehung zwischen den Differentialen zweier Seiten und zweier Winkel, von denen der eine von den Seiten eingeschlossen ist, angegeben; mit der aus Abb. 28.1 ablesbaren Beziehung

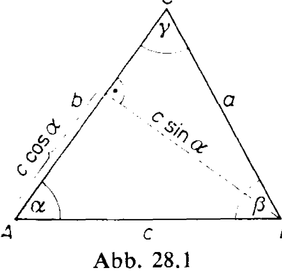


Abb. 28.1

$$\tan\gamma = \frac{c\sin\alpha}{b-c\cos\alpha},$$

die auch in der Form $b-c\cos\alpha = c\sin\alpha\cot\gamma$ geschrieben werden kann, erhält man durch die Differentiation

$$\mathrm{d}b-\mathrm{d}c\cos\alpha+c\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha=\mathrm{d}c\sin\alpha\cot\gamma+c\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha\cot\gamma-c\sin\alpha\frac{\mathrm{d}\gamma}{\sin^2\gamma},$$

oder

$$c(\sin\alpha-\cos\alpha\cot\gamma)\,\mathrm{d}\alpha+c\sin\alpha\,\mathrm{cosec}^2\gamma\,\mathrm{d}\gamma=-\mathrm{d}b+(\cos\alpha+\sin\alpha\cot\gamma)\,\mathrm{d}c.$$

Vereinfacht man die Klammerausdrücke

$$\sin\alpha-\cos\alpha\cot\gamma = \frac{\sin\alpha\sin\gamma-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\gamma} = -\frac{\cos(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma},$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha\cot\gamma = \frac{\cos\alpha\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

so wird

$$c\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\,\mathrm{d}\alpha+c\sin\alpha\,\mathrm{cosec}^2\gamma\,\mathrm{d}\gamma = -\mathrm{d}b+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\,\mathrm{d}c.$$

Multipliziert man mit $\sin\gamma$ und beachtet, daß

$$c\sin\alpha\,\mathrm{cosec}^2\gamma\sin\gamma = c\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = a \text{ ist,}$$

so wird endlich

$$c \cos \beta \, \mathrm{d}\alpha + a \, \mathrm{d}\gamma = -\sin \gamma \, \mathrm{d}b + \sin \beta \, \mathrm{d}c,$$

woraus durch zyklische Vertauschung wieder drei Gleichungen entstehen:

$$\begin{aligned} a \cos \gamma \left(\frac{\mathrm{d}\beta''}{\varrho''}\right) + b \left(\frac{\mathrm{d}\alpha''}{\varrho''}\right) &= -\sin \alpha \, \mathrm{d}c + \sin \gamma \, \mathrm{d}a, \\ b \cos \alpha \left(\frac{\mathrm{d}\gamma''}{\varrho''}\right) + c \left(\frac{\mathrm{d}\beta''}{\varrho''}\right) &= -\sin \beta \, \mathrm{d}a + \sin \alpha \, \mathrm{d}b, \\ c \cos \beta \left(\frac{\mathrm{d}\alpha''}{\varrho''}\right) + a \left(\frac{\mathrm{d}\gamma''}{\varrho''}\right) &= -\sin \gamma \, \mathrm{d}b + \sin \beta \, \mathrm{d}c. \end{aligned} \qquad (28.6)$$

Kapitel 6: Weitere Beziehungen und Sätze für das schiefwinklige Dreieck

In diesem Kapitel sollen einige weniger bekannte Beziehungen und Sätze für das schiefwinklige Dreieck angegeben und einige Sonderfälle der Dreiecksberechnung behandelt werden.

29. Der Satz von PAPPUS[31)]

Im folgenden werden noch einige Begriffe aus der Geometrie wie *gerichtete Strecken und Winkel, Verhältnis und Doppelverhältnis* benötigt. Um einen Punkt C auf einer Geraden g gegenüber zwei Punkten A und B der Geraden zu fixieren, kann man die gerichtete, d. h. mit einemVorzeichen versehene Strecke $\overline{AC}$ benützen; das Vorzeichen von $\overline{AC}$ ist positiv oder negativ, je nachdem B und C von A aus in gleicher oder entgegengesetzter Richtung liegen. Ebenso könnte man C durch die gerichtete Strecke $\overline{BC}$ festlegen, wobei für die Vorzeichen sinngemäß zu verfahren ist (Abb. 29.1). Die Lage von C kann aber auch durch das Verhältnis $\lambda = \overline{AC} : \overline{BC}$, das Teilverhältnis des Punktes C für das Punktepaar AB, fixiert werden. Offenbar ist λ positiv oder negativ, je nachdem C zwischen A und B liegt oder nicht. Denkt man sich die Gerade g durch A und B in die von links her bezifferten Abschnitte I, II und III zerlegt, so nimmt λ, wenn C z. B. die Gerade von links nach rechts durchläuft, in I alle Werte von -1 bis -0, in II alle Werte von $+0$ bis $+\infty$, in III alle Werte von $-\infty$ bis -1 an. — Jeder Punkt C der Geraden g ist also durch sein *Teilverhältnis* λ eindeutig bestimmt, verschiedenen Punkten entsprechen verschiedene Teilverhältnisse.

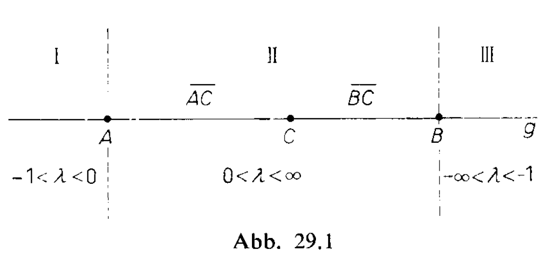


Abb. 29.1

---

31) Auch PAPPOS, um 310 n.Chr.

Auf die gleiche Weise läßt sich nun auch das *Doppelverhältnis* für vier kollineare, das heißt auf einer Geraden g liegende Punkte A, B, C, D (Abb. 29.2) angeben, worunter man den Wert

$$\mu = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = (ABCD) \qquad (29.1)$$

versteht und wobei die Reihenfolge der Punkte wesentlich ist.

Abb. 29.2

Das Doppelverhältnis ändert sich nicht, wenn die ersten beiden Punkte mit den beiden letzten oder die ersten beiden Punkte unter sich und gleichzeitig die letzten beiden unter sich vertauscht oder beide Vertauschungen gleichzeitig vorgenommen werden:

$$(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA),$$

d. h. von den für die Punkte A, B, C, D möglichen $4! = 24$ Doppelverhältnissen sind daher höchstens 6 verschieden:

$$(ABCD) = \mu, \quad (ACBD) = 1-\mu, \quad (ADCB) = \frac{\mu}{\mu-1},$$

$$(ABDC) = \frac{1}{\mu}, \quad (ACDB) = \frac{1}{1-\mu}, \quad (ADBC) = \frac{\mu-1}{\mu}.$$

Die Punkte A und B einerseits und C und D andererseits heißen zugeordnet oder konjugiert. Die Werte von μ, wenn z. B. D die Gerade in der Richtung $A-B-C$ durchläuft, lassen sich ebenso wie vorhin beim einfachen Teilverhältnis angeben, sind aber hier ohne Interesse.

In ähnlicher Weise kann innerhalb eines *ebenen Strahlenbüschels*, worunter man die Gesamtheit der durch einen Punkt O laufenden Geraden versteht, ein veränderlicher Strahl c festgelegt werden: Betrachtet man zwei feste Strahlen a und b und einen beweglichen Strahl m, so fixieren die Drehwinkel, die m im positiven bzw. im negativen Sinn ausführen muß, um von a nach c. bzw. um von b nach c zu kommen, den Strahl c eindeutig (Abb. 29.2).

Statt nun einen der beiden Drehwinkel (ac) oder (bc) zur Angabe der Lage von c zu verwenden, zieht man das *Sinusteilverhältnis* $\sin(ac) : \sin(bc)$ in bezug auf die Strahlen a, b vor, wobei (ac) und (bc) die genannten Drehwinkel bedeuten. — Offenbar entspricht jeder Lage des Strahles c genau ein Sinusverhältnis, und umgekehrt gehört zu jedem Wert des Sinusteilverhältnisses genau ein Strahl des Büschels. Nun bringt man die Strahlen a, b, c mit einer nicht durch O laufenden Geraden g zum Schnitt und vergleicht das Sinusteilverhältnis mit dem Teilverhältnis der Schnitt-

winkel in A, B, C. Nach dem Sinussatz (Abb. 29.3) gilt, wenn α und β die Schnittwinkel der Strahlen a und b mit der Geraden g bedeuten,

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \qquad (29.2)$$

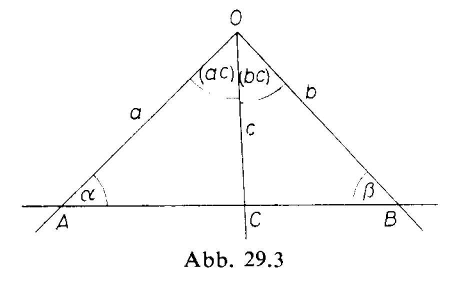


Abb. 29.3

Der Quotient aus dem Sinusteilverhältnis des Strahls c und dem Teilverhältnis des Punktes C hat demnach für alle Strahlen des Büschels und die zugehörigen Schnittpunkte denselben Wert.

Sind nun c und d zwei beliebige Strahlen des Büschels, C und D deren Schnittpunkte mit der Geraden g, so gilt (Abb. 29.2) jetzt

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

Dies ist der *Satz von* PAPPUS, den man üblicherweise so schreibt:

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

Bezeichnet man die linke Seite als das Doppelverhältnis $(abcd)$ der vier konzentralen Strahlen a, b, c und d, so läßt sich, da die rechte Seite nichts anderes ist als das Doppelverhältnis $(ABCD)$ der vier kollinearen Punkte $ABCD$, der Satz von PAPPUS auch so ausdrücken: Das Doppelverhältnis von vier Strahlen a, b, c, d ist gleich dem Doppelverhältnis der vier Punkte, in denen die Strahlen irgendeine Gerade schneiden, d. h. es gilt

$$(abcd) = (ABCD). \qquad (29.3)$$

Das Doppelverhältnis wird gelegentlich bei der Auswertung von Luftbildern dazu benützt, die Kartenlage eines Bildpunktes zu berechnen, der mit drei anderen in der Karte identifizierbaren Bildpunkten in einer Geraden liegt. Meist wird jedoch ein graphisches Verfahren, die Papierstreifenmethode, bevorzugt.

30. Die Sätze von CEVA und MENELAOS

Die drei auf den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ und $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC (Abb. 30.1) liegenden beliebigen Punkte A_1, B_1, C_1 bestimmen die drei Teilverhältnisse

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}, \quad \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}, \quad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}.$$

Das Produkt

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}$$

nennt man den *Sechsgrößenbruch* der Punkte A_1, B_1, C_1 für das Dreieck ABC.

Für diesen merkwürdigen Bruch gilt die fundamentale *Regula sex quantitatum:* Der Sechsgrößenbruch hat den Wert $+1$, wenn die drei Ecktransversalen $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ durch einen Punkt laufen, den Wert -1, wenn die drei Punkte A_1, B_1, C_1 auf einer Geraden liegen, was natürlich nur für ein erweitertes Dreieck möglich ist, das auch die Verlängerungen der Dreiecksseiten umfaßt.

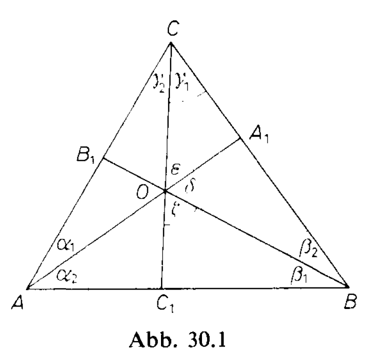


Abb. 30.1

Statt des erweiterten Dreiecks kann auch der Begriff des Dreiseites eingeführt werden, worunter man das System der drei Geraden $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$, der Seiten des Dreiseites versteht.

Dies sind die *Sätze von* CEVA[32] und MENELAOS[33]. Zunächst der trigonometrische Beweis für den *Satz von* CEVA, der oft auch in der Form

$$\overline{BA_1} \cdot \overline{CB_1} \cdot \overline{AC_1} = \overline{CA_1} \cdot \overline{AB_1} \cdot \overline{BC_1}$$

angegeben wird; d. h. schneiden sich die drei Ecktransversalen in einem Punkt O (innerhalb oder außerhalb des Dreiecks), so ist das Produkt dreier nicht aneinanderliegender Seitenabschnitte gleich dem Produkt der drei anderen.

Schneiden sich die Transversalen $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ in O, so gilt mit den in Abb. 30.1 eingetragenen Winkeln δ, ε, ζ für die Flächen der Teildreiecke

$$2\,\triangle BOA_1 = \overline{BO} \cdot \overline{OA_1} \sin\delta, \quad 2\,\triangle COA_1 = \overline{CO} \cdot \overline{OA_1} \sin\varepsilon,$$

$$2\,\triangle COB_1 = \overline{CO} \cdot \overline{OB_1} \sin\zeta, \quad 2\,\triangle AOB_1 = \overline{AO} \cdot \overline{OB_1} \sin\delta,$$

$$2\,\triangle AOC_1 = \overline{AO} \cdot \overline{OC_1} \sin\varepsilon, \quad 2\,\triangle BOC_1 = \overline{BO} \cdot \overline{OC_1} \sin\zeta.$$

---

[32] CEVA, italienischer Mathematiker, 1648–1737.

[33] MENELAOS, griech. Mathematiker, um 80 n.Chr.

Bildet man das Verhältnis

$$\frac{\triangle BOA_1 \cdot \triangle COB_1 \cdot \triangle AOC_1}{\triangle COA_1 \cdot \triangle AOB_1 \cdot \triangle BOC_1} = \frac{\overline{BO}\cdot\overline{OA_1}\cdot\overline{CO}\cdot\overline{OB_1}\cdot\overline{AO}\cdot\overline{OC_1}\sin\delta\sin\zeta\sin\varepsilon}{\overline{CO}\cdot\overline{OA_1}\cdot\overline{AO}\cdot\overline{OB_1}\cdot\overline{BO}\cdot\overline{OC_1}\sin\varepsilon\sin\delta\sin\zeta} = 1,$$

so folgt, weil die links in Zähler und Nenner stehenden Dreiecke je paarweise gleiche Höhen haben,

$$\frac{\overline{BA_1}\cdot\overline{CB_1}\cdot\overline{AC_1}}{\overline{CA_1}\cdot\overline{AB_1}\cdot\overline{BC_1}} = 1. \tag{30.1}$$

Der Satz von CEVA gibt noch folgende Beziehung: Verbindet man einen beliebigen Punkt O mit den Ecken eines Dreiecks A, B, C, so gilt, wenn die Transversalen die Winkel α, β, γ in die Teilwinkel α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 zerlegen (Abb. 30.1), wegen (30.1) die Beziehung

$$\frac{\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2} = 1. \tag{30.2a}$$

Der Satz läßt sich noch verallgemeinern: Verbindet man einen Punkt O mit den Ecken A, B, C, ..., N eines n-Eckes und sind α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, ... ν_1, ν_2 die Teilwinkel, in die die Polygonwinkel α, β, γ, ... durch die Transversalen $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, ... zerlegt werden (Abb. 30.2), so gilt, wie durch fortlaufende Anwendung des Sinussatzes auf die Dreiecke AOB, BOC, COD usf. nachgewiesen werden kann,

$$\frac{\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1\ldots\sin\nu_1}{\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2\ldots\sin\nu_2} = 1. \tag{30.2b}$$

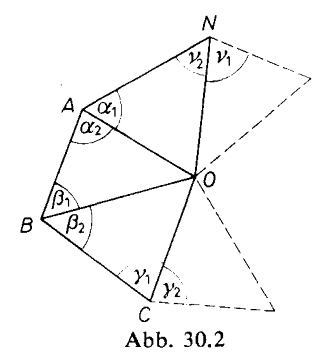


Abb. 30.2

Ebenso einfach ist der *Satz von* MENELAOS zu beweisen, der mitunter auch in der Form

$$\overline{BA_1}\cdot\overline{CB_1}\cdot\overline{AC_1} = -\overline{CA_1}\cdot\overline{AB_1}\cdot\overline{BC_1}$$

geschrieben wird; d. h. schneidet eine Transversale eines Dreieckes die drei Seiten oder ihre Verlängerungen, so ist das Produkt dreier nicht anliegender Seitenabschnitte gleich dem negativen Produkt der anderen.

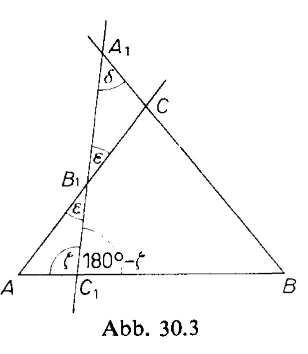


Abb. 30.3

Nach Abb. 30.3 — die Punkte A_1, B_1 und C_1 liegen in einer Geraden — lassen sich die

folgenden Flächenverhältnisse angeben:

$$\frac{\triangle BA_1C_1}{\triangle CA_1B_1} = \frac{\overline{BA_1}\cdot\overline{A_1C_1}}{\overline{CA_1}\cdot\overline{A_1B_1}}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\delta},$$

$$\frac{\triangle CA_1B_1}{\triangle AC_1B_1} = \frac{\overline{CB_1}\cdot\overline{A_1B_1}}{\overline{AB_1}\cdot\overline{C_1B_1}}\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon},$$

$$\frac{\triangle AC_1B_1}{\triangle BA_1C_1} = \frac{\overline{AC_1}\cdot\overline{B_1C_1}\cdot\sin\zeta}{\overline{BC_1}\cdot\overline{C_1A_1}\cdot\sin(180-\zeta)}.$$

Multipliziert man die drei Gleichungen miteinander, so wird daraus, wenn man beachtet, daß den Vereinbarungen in [29] entsprechend $\overline{BA}_1/\overline{CA}_1$ negativ ist,

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = -1. \tag{30.3}$$

31. Der Satz von Stewart

Ein wenig bekannter Satz der ebenen Geometrie ist der *Satz von* STEWART. Teilt eine von der Spitze C des Dreiecks ABC aus gezogene Transversale $\overline{CT} = t_c$ die Seite $\overline{AB}$ in die beiden Abschnitte $\overline{AT} = u$ und $\overline{BT} = v$ (Abb. 31.1), so gilt nach STEWART die Beziehung

$$ct_c^2 = ua^2+vb^2-cuv. \tag{31.1}$$

Der trigonometrische Beweis von (31.1) ist einfach: Drückt man die Kosinus der Zwischenwinkel φ bzw. $180°-\varphi$ von u und t_c bzw. t_c und v mittels der beiden Kosinussätze

$$b^2 = u^2+t_c^2-2ut_c\cos\varphi$$

und

$$a^2 = v^2+t_c^2+2vt_c\cos\varphi$$

aus, also

$$\cos\varphi = \frac{u^2+t_c^2-b^2}{2ut_c},$$

$$\cos\varphi = \frac{a^2-v^2-t_c^2}{2vt_c},$$

so erhält man durch Gleichsetzen

$$u^2v+t_c^2v-b^2v = ua^2-uv^2-t_c^2u$$

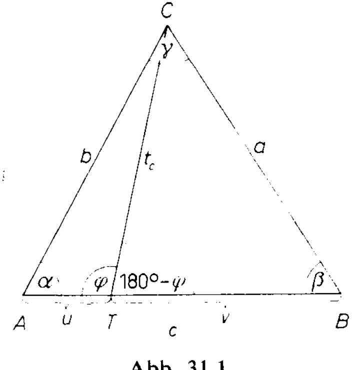


Abb. 31.1

oder

$$t_c^2(u+v) = ua^2+vb^2-uv(u+v),$$

und schließlich

$$ct_c^2 = ua^2+vb^2-cuv,$$

womit (31.1) bewiesen ist.

Ist die Transversale t_c die *Winkelhalbierende* t_c' und bezeichnet man die Abschnitte auf $\overline{AB}$ mit u' und v', so wird aus (31.1)

$$ct_c'^2 = u'a^2+v'b^2-cu'v'. \tag{31.2a}$$

Weiter gelten die Verhältnisse

$$\frac{u'}{b} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\varphi}, \quad \frac{v'}{a} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(180°-\varphi)},$$

also ist

$$\frac{u'}{v'} = \frac{b}{a}. \tag{31.2b}$$

Aus (31.2b) läßt sich auch bilden:

$$\frac{u'}{u'+v'} = \frac{u'}{c} = \frac{b}{a+b}, \quad \frac{v'}{u'+v'} = \frac{v'}{c} = \frac{a}{a+b}. \tag{31.2c}$$

Schreibt man (31.2a) in der Form

$$t_c'^2 = u'\frac{a^2}{c}+v'\frac{b^2}{c}-u'v'$$

und ersetzt darin u'/c und v'/c nach (31.2c), so wird

$$t_c'^2 = \frac{ba^2}{a+b}+\frac{ab^2}{a+b}-u'v' = ab-u'v' \tag{31.2d}$$

oder, wenn $u'v'$ nach (31.2c) ersetzt wird,

$$t_c'^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}[(a+b)^2-c^2] = \frac{4ab}{(a+b)^2}s(s-c). \tag{31.3}$$

Ist die Transversale t_c die *Schwerelinie* t_c'', so daß die Abschnitte u und v die Werte $u'' = v'' = c/2$ annehmen, so gibt (31.1)

$$t_c''^2 = \frac{u''a^2+v''b^2}{c}-u''v'',$$

also

$$t_c''^2 = \frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}. \tag{31.4}$$

Die Gl. (31.4) kann ebenso wie Gl. (31.1) auch unmittelbar aus Abb. 31.1 abgelesen werden: Mit $u = u'' = c/2$, $v = v'' = c/2$ erhält man z. B. für t_c'' nach dem Kosinussatz:

$$t_c''^2 = \frac{c^2}{4} + b^2 - bc\cos\alpha,$$

$$t_c''^2 = \frac{c^2}{4} + a^2 - ac\cos\beta,$$

also

$$2t_c''^2 = \frac{c^2}{2} + b^2 + a^2 - c(b\cos\alpha + a\cos\beta)$$

oder

$$t_c''^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Ist die Transversale t_c die *Höhe* $h_c = t_c'''$, so werden die Abschnitte u und v

$$u''' = b\cos\alpha, \qquad v''' = a\cos\beta,$$

d. h.

$$\frac{u'''}{v'''} = \frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta} = \frac{\cot\alpha}{\cot\beta}.$$

Ohne auf weitere mögliche Formeln einzugehen, seien noch die Verhältnisse der Abschnitte u und v zusammengestellt: Ist t_c die

Winkelhalbierende, so gilt $\dfrac{u'}{v'} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$,

Schwerelinie, so gilt $\dfrac{u''}{v''} = 1$,

Höhe, so gilt $\dfrac{u'''}{v'''} = \dfrac{\cot\alpha}{\cot\beta} = \dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}$.

32. Der Satz von Morley

Der Satz lautet: Teilt man die Winkel α, β, γ des Dreiecks ABC durch die drei Geradenpaare $(\overline{AY}, \overline{AZ})$, $(\overline{BZ}, \overline{BX})$, $(\overline{CX}, \overline{CY})$ in je drei gleiche Teile, so ist das Dreieck XYZ gleichseitig (Abb. 32.1).

Die folgende Ableitung, die sich auf zwei Hilfsformeln stützt, stammt von H. Dörrie[34]. — Zunächst die beiden *Hilfsformeln*: Die erste folgt aus $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$, wofür sich entweder

$$\sin 3\varphi = 4\sin\varphi\left(\frac{3}{4} - \sin^2\varphi\right) = 4\sin\varphi\,(\sin^2 60^\circ - \sin^2\varphi)$$

[34] H. Dörrie, a.a.O., S. 181.

oder

$$\sin 3\varphi = 4 \sin \varphi \sin (60^\circ+\varphi) \sin (60^\circ-\varphi)$$

schreiben läßt.

Dabei ist noch von der Formel

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin (\alpha+\beta) \sin (\alpha-\beta)$$

Gebrauch gemacht, die einfach nachzuweisen ist. Multipliziert man rechts aus, so wird daraus

$$[\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta]\,[\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta] = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta.$$

Setzt man $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$, so wird schließlich

$$\sin^2 \alpha (1-\sin^2 \beta) - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

Die zweite Hilfsformel besagt, daß für die Winkel α, β, γ eines Dreiecks die Beziehung

$$\sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

gilt.

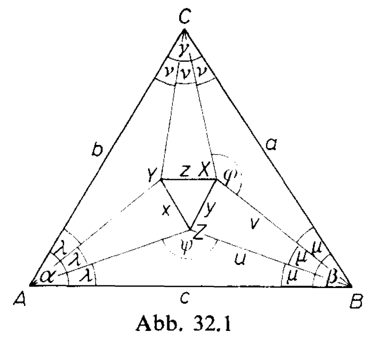


Abb. 32.1

Der Nachweis ist einfach: Ersetzt man im Kosinussatz $c^2 = a^2+b^2-2\,ab \cos \gamma$ die Seiten nach dem Durchmessersatz, so erhält man mit $d = 2r = 1$ für die Seiten $a = \sin \alpha$, $b = \sin \beta$, $c = \sin \gamma$ und somit unmittelbar diese Beziehung.

Für den Beweis des Satzes von Morley seien folgende Winkel und Seitenbezeichnungen eingeführt (Abb. 32.1): $\alpha = 3\lambda$, $\beta = 3\mu$, $\gamma = 3\nu$; $\sphericalangle BXC = \varphi$, $\sphericalangle AZB = \psi$; $\overline{BX} = v$, $\overline{BZ} = u$, $\overline{YZ} = x$, $\overline{XZ} = y$, $\overline{XY} = z$. Wählt man den Umkreisdurchmesser $d = 2r$ des Dreiecks als Längeneinheit, so gilt nach dem Durchmessersatz

$$a = \sin \alpha, \qquad b = \sin \beta, \qquad c = \sin \gamma,$$

also

$$a = \sin 3\lambda, \qquad b = \sin 3\mu, \qquad c = \sin 3\nu.$$

Weiter bestehen die Winkelsummen

$$\varphi+\mu+\nu = 180^\circ, \quad \psi+\lambda+\mu = 180^\circ, \quad \lambda+\mu+\nu = \frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{3} = 60^\circ.$$

Für die Winkel φ und ψ gilt demnach

$$\varphi = 180^\circ-(60^\circ-\lambda) \quad \text{und} \quad \psi = 180^\circ-(60^\circ-\nu);$$

also ist

$$\sin \varphi = \sin (60^\circ-\lambda) \quad \text{und} \quad \sin \psi = \sin (60^\circ-\nu).$$

Der Sinussatz liefert für das Dreieck BCX:

$$\frac{v}{a} = \frac{\sin \nu}{\sin \varphi} \quad \text{bzw.} \quad v = \frac{\sin 3\lambda}{\sin (60^\circ - \lambda)} \sin \nu,$$

und mit der ersten Hilfsformel wird daraus

$$v = 4 \sin \lambda \sin \nu \sin (60^\circ + \lambda).$$

In derselben Weise liefert der Sinussatz für das $\triangle ABZ$

$$\frac{u}{c} = \frac{\sin \lambda}{\sin \psi} \quad \text{bzw.} \quad u = \frac{\sin 3\nu}{\sin (60^\circ - \nu)} \sin \lambda$$

und mit der ersten Hilfsformel

$$u = 4 \sin \lambda \sin \nu \sin (60^\circ + \nu).$$

Werden die Ausdrücke für u und v in den Kosinussatz

$$y^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \mu$$

eingesetzt ($\triangle BXZ$), so wird

$$y^2 = 16 \sin^2 \lambda \sin^2 \nu \cdot K$$

mit

$$K = \sin^2 (60^\circ + \nu) + \sin^2 (60^\circ + \lambda) - 2 \sin (60^\circ + \nu) \sin (60^\circ + \lambda) \cos \mu.$$

Beachtet man, daß die Winkel $60^\circ + \nu$, $60^\circ + \lambda$ und μ die Winkel eines Dreiecks sind, weil ihre Summe gleich 180° ist, dann vereinfacht sich K nach der zweiten Hilfsformel zu $K = \sin^2 \mu$. Also wird

$$y^2 = 16 \sin^2 \lambda \sin^2 \nu \sin^2 \mu.$$

Ebenso findet man, daß

$$x^2 = z^2 = 16 \sin^2 \lambda \sin^2 \nu \sin^2 \mu$$

ist. Folglich ist

$$x = y = z = 4 \sin \lambda \sin \nu \sin \mu = 4 \sin \frac{\alpha}{3} \sin \frac{\beta}{3} \sin \frac{\gamma}{3}, \qquad (32.1)$$

womit die Gleichseitigkeit des MORLEYschen Dreiecks nachgewiesen ist.

Der DÖRRIEsche Beweis zeigt auch, daß jede Seite des MORLEYschen Dreiecks gleich dem $2m$-fachen Produkt des Umkreisradius r ist mit

$$m = 4 \sin \frac{\alpha}{3} \sin \frac{\beta}{3} \sin \frac{\gamma}{3}.$$

Die Möglichkeiten, Dreieckssätze trigonometrisch herzuleiten, sind damit keinesfalls erschöpft; auch der *Satz von* FEUERBACH, wonach die drei Fußpunkte der Höhen, die drei Halbierungspunkte der Seiten und die drei Halbierungspunkte der oberen Höhenabschnitte auf einem Kreis

liegen, läßt sich trigonometrisch ableiten. — Schließlich seien noch die von I. PAASCHE angegebenen merkwürdigen Dreiecksformeln erwähnt, die sich bei *Einführung der vierten Stücke des Dreiecks* ergeben und ebenfalls trigonometrisch nachgewiesen werden können: Ist F die Fläche und r der Umkreisradius des Dreiecks mit den Winkeln α, β, γ, den Seiten a, b, c, den Höhen h_a, h_b, h_c und sind ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c die Radien, s_a, s_b, s_c die Berührstrecken der Ankreise des Dreiecks, so erhält man mit der vierten Dreiecksseite $d = F/r$, der vierten Höhe $h = 2r$, dem Radius ϱ des 4. Berührkreises (Inkreis) und der 4. Berührstrecke $s = (a+b+c)/2$ die Formelketten

$$\begin{aligned} 2F &= \sqrt{abcd} = \sqrt{h_a h_b h_c h} \\ &= dh = ah_a = ab \sin\gamma = h_c h \sin\gamma \\ &= h_a h_b/\sin\gamma = cd/\sin\gamma = d^2/\sin\delta = h^2 \sin\delta \\ &\quad \text{mit } \sin\delta = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{\varrho_a \varrho_b \varrho_c \varrho} = \sqrt{s_a s_b s_c s} = \varrho s \\ &= \varrho_a s_a = \varrho_a \varrho_b \tan\frac{\gamma}{2} = s_c s \tan\frac{\gamma}{2} \\ &= \frac{s_a s_b}{\tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{\varrho_c \varrho}{\tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{\varrho^2}{\tan\frac{\Delta}{2}} = s^2 \tan\frac{\Delta}{2} \\ &\quad \text{mit } \tan\frac{\Delta}{2} = \tan\frac{\alpha}{2} \tan\frac{\beta}{2} \tan\frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Statt der Bezeichnungen 4. Stücke — PAASCHE spricht auch von Quasi- oder Pseudostücken — könnten auch Begriffe wie $d = F/r$, ebener Polareckensinus, und $h = 2F/d$, ebener Modul, benützt werden. Für eine eingehende Information sei auf I. PAASCHE, Die vierte Dreiecksseite, Praxis der Mathematik 1963, S. 113–123 verwiesen.

33. Einige Sonderfälle der Dreiecksberechnung, der Dreiwinkelsatz, Ungleichungen für das Dreieck

I. Hier zunächst einige Sonderfälle der Dreiecksberechnung:

1. Sind für ein Dreieck zwei Winkel und die Summe $2s$ der Seiten gegeben, so erhält man, weil mit zwei Winkeln auch der dritte gegeben ist, nach dem Sinussatz

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

also

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

woraus für die Seite a nach einiger Umformung folgt:

$$a = \frac{s\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Ebenso wird

$$b = \frac{s\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}, \quad c = \frac{s\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

2. Sind eine Seite, z. B. a und der anliegende Winkel β, sowie die Summe $m = b+c$ der beiden anderen Seiten gegeben, so liefert das Produkt der Halbwinkelsätze

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}, \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

sofort

$$\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{s-a}{s}, \text{ und mit } \quad s = \frac{a+m}{2}, \quad s-a = \frac{m-a}{2} \text{ schließlich}$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{m-a}{m+a}\cot\frac{\beta}{2}.$$

Der Sinussatz liefert noch die Seiten b und c. — Eine zweite Lösung liefern die MOLLWEIDEschen Gleichungen.

3. Sind zwei Winkel und der Umkreisradius r gegeben, so liefert die Tangensformel

$$(s-a) = r\cot\frac{\alpha}{2}, \quad (s-b) = r\cot\frac{\beta}{2}, \quad (s-c) = r\cot\frac{\gamma}{2}.$$

Bildet man daraus die Summe $(s-a)+(s-b)+(s-c) = s$, so lassen sich auch die Seiten a, b, c bestimmen.

4. Sind der Flächeninhalt F und zwei Winkel, z. B. α und β gegeben, so erhält man nach (27.2c) für die Seite c

$$2F = \frac{c^2}{\cot\alpha+\cot\beta} = c^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

also

$$c = \sqrt{\frac{2F \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}}\,.$$

Die Seiten a und b können nach dem Sinussatz bestimmt werden.

5. Interessant ist die Dreiecksberechnung auch für den Fall, daß eine Seite, z. B. c, der gegenüberliegende Winkel γ und die Länge der Winkelhalbierenden t_c' gegeben sind (Abb. 33.1). Die Teilabschnitte u', v' ergeben sich zu

$$u' = \frac{t_c' \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha}, \quad v' = \frac{t_c' \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta}.$$

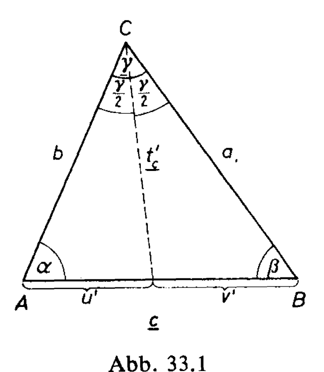


Abb. 33.1

Die Winkel α und β sind also aus den Beziehungen

$$u'+v' = \frac{t_c' \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha} + \frac{t_c' \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta} = c$$

bzw.

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} = \frac{c}{t_c' \sin\frac{\gamma}{2}}$$

und $\alpha+\beta = 180° - \gamma$ zu bestimmen. Die Aufgabe ist gelöst, wenn außer der halben Summe $(\alpha+\beta)/2 = \varphi$ auch die halbe Differenz $(\alpha-\beta)/2 = \psi$ der Winkel α und β bekannt ist. Dann wird $\alpha = \varphi+\psi$ und $\beta = \varphi-\psi$. Unbekannt ist nur noch der Winkel ψ, der aus

$$\frac{1}{\sin(\varphi+\psi)} + \frac{1}{\sin(\varphi-\psi)} = \frac{c}{t_c' \sin\frac{\gamma}{2}}$$

zu bestimmen ist; mit $\sin(\varphi+\psi)\sin(\varphi-\psi)$ multipliziert, wird daraus

$$\sin(\varphi+\psi) + \sin(\varphi-\psi) = \frac{c}{t_c' \sin\frac{\gamma}{2}} \sin(\varphi+\psi)\sin(\varphi-\psi).$$

Die Verwandlungsformeln geben dafür

$$2\sin\varphi\cos\psi = \frac{c}{2t_c' \sin\frac{\gamma}{2}} (\cos 2\psi - \cos 2\varphi).$$

9

Da $\varphi = 90° - \frac{\gamma}{2}$, also $\sin\varphi = \cos(\gamma/2)$ ist, wird daraus, wenn man rechts in der Klammer noch auf die einfachen Winkel übergeht,

$$2\cos\psi = \frac{c}{t_c'\sin\gamma}(\cos 2\psi - \cos 2\varphi) = \frac{2c}{t_c'\sin\gamma}(\cos^2\psi - \cos^2\varphi).$$

Also ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\cos^2\psi - \frac{t_c'\sin\gamma}{c}\cos\psi - \cos^2\varphi = 0,$$

die nach $\cos\psi$ aufgelöst werden kann: Setzt man $(t_c'\sin\gamma)/2c = m$, so wird

$$\cos^2\psi - 2m\cos\psi - \cos^2\varphi = 0, \quad \text{oder} \quad \cos\psi = m \pm \sqrt{m^2 + \cos^2\varphi}.$$

Da $\psi = (\alpha - \beta)/2$ stets ein spitzer Winkel und somit $\cos\psi$ stets positiv sein muß, ist nur das positive Vorzeichen der Wurzel brauchbar[35]. Die Seiten a und b können wieder nach dem Sinussatz bestimmt werden.

II. Weiter sollen noch einige Dreiecksaufgaben behandelt werden, für deren Lösung der Dreiwinkelsatz gute Dienste leistet. Er lautet: Summe und Produkt der Sinusse, der positiven Kosinusse und der positiven Tangens von drei Winkeln konstanter konkaver Summe erreichen bei Gleichheit der Winkel ihre Extremwerte, und zwar die Sinus- und Kosinusausdrücke nur Maxima, die Tangenssumme ein Minimum, das Tangensprodukt ein Maximum oder Minimum, je nachdem die Winkelsumme spitz oder stumpf ist. Dabei gilt 180° als konkaver und stumpfer Winkel. Vor dem Beweis des Dreiwinkelsatzes gleich einige Aufgaben:

1. Welches von allen einem Kreis einbeschriebenen Dreiecken hat den größten Umfang? Sind α, β, γ die Winkel des Dreiecks, so lauten die Seiten nach dem Durchmessersatz

$$a = d\sin\alpha, \quad b = d\sin\beta, \quad c = d\sin\gamma.$$

Mit $d = 1$ wird der Umfang $2s$ des Dreiecks

$$2s = a + b + c = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma.$$

Nach dem Dreiwinkelsatz erreicht $2s$ für $\alpha = \beta = \gamma = 60°$ ein Maximum, d. h. das dem Kreis einbeschriebene gleichseitige Dreieck hat den größten Umfang.

2. Nun soll dem Kreis mit dem Durchmesser $d = 1$ das flächengrößte Dreieck einbeschrieben werden. Ausgehend von der Flächenformel $F = (1/2)ab\sin\gamma$ erhält man wegen $d = 1$ wieder $a = \sin\alpha$ und $b = \sin\beta$, also

$$2F = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

[35] Vgl. hierzu Abschnitt [48] über goniometrische Gleichungen.

d. h. das Produkt $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ soll zu einem Maximum werden. Nach dem Dreiwinkelsatz für den Sinus wird $2F$ ein Maximum, wenn $\alpha = \beta = \gamma = 60°$ ist, d. h. von allen einem Kreis einbeschriebenen Dreiecken hat das gleichseitige auch die größte Fläche.

Weitere, ebenfalls mit Hilfe des Dreiwinkelsatzes zu lösende Aufgaben findet der interessierte Leser bei H. DÖRRIE, a.a.O. Seite 155 f., dem auch der folgende Beweis des Dreiwinkelsatzes entnommen ist.

Für den Beweis des Dreiwinkelsatzes werden *drei Hilfssätze* benötigt:

a) Summe und Produkt der Sinusse zweier positiver Winkel mit konstanter, 180° nicht übersteigender Summe sind um so größer, je weniger die beiden Winkel voneinander abweichen, und werden am größten, wenn die Winkel gleich sind. Die beiden Winkel seien φ und ψ, ihre Summe $2k \leqq 180°$ und ihre Differenz $d = \varphi - \psi$. Dann gilt für die Summes der Sinusse

$$s = \sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} = 2\sin k\cos\frac{d}{2}$$

und für das Produkt p der Sinusse

$$p = \sin\varphi\sin\psi,\ 2p = 2\sin\varphi\sin\psi = \cos(\varphi-\psi) - \cos(\varphi+\psi) = \cos d - \cos 2k.$$

Sowohl s als auch p werden um so größer, je kleiner $|d|$ ist; beide Größen, s und p, werden zu einem Maximum für $d = 0$, d. h. wenn $\varphi = \psi$ ist.

b) In gleicher Weise ist der Hilfssatz zu beweisen, wonach Summe und Produkt der Kosinusse zweier spitzer Winkel von konstanter Summe um so größer sind, je weniger die beiden Winkel voneinander abweichen, und am größten werden, wenn beide Winkel gleich sind.

c) Die Summe der Tangens zweier spitzer Winkel konstanter Summe ist um so kleiner, je weniger die beiden Winkel voneinander abweichen, und erreicht ein Minimum bei Gleichheit der Winkel. Beweis:

$$s = \tan\varphi + \tan\psi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\varphi\cos\psi}$$
$$= \frac{2\sin(\varphi+\psi)}{\cos(\varphi-\psi)+\cos(\varphi+\psi)} = \frac{2\sin 2k}{\cos d + \cos 2k}.$$

Da s und $\sin 2k$ positiv sind, ist auch der Nenner des letzten Ausdruckes positiv. Der rechtsstehende Bruch wird um so kleiner, je kleiner $|d|$ ist, und erreicht ein Minimum für $d = 0$, d. h. $\varphi = \psi$.

Für das Produkt der Tangens, $p = \tan\varphi\tan\psi$, das in der Form

$$p = \tan\varphi\tan\psi = \frac{\sin\varphi\sin\psi}{\cos\varphi\cos\psi} = \frac{\cos(\varphi-\psi)-\cos(\varphi+\psi)}{\cos(\varphi-\psi)+\cos(\varphi+\psi)}$$
$$= 1 - \frac{2\cos 2k}{\cos d + \cos 2k}$$

geschrieben werden kann, sind zwei Fälle zu unterscheiden: Ist die Summe der spitzen Winkel $\varphi+\psi > 90°$, so ist $2\cos 2k$ negativ, d. h. das Produkt verhält sich wie die Summe: Das Produkt wird um so kleiner, je weniger sich φ und ψ unterscheiden, und wird ein Minimum für $d = 0$, d. h. $\varphi = \psi$. Ist $\varphi+\psi < 90°$, dann ist $2\cos 2k$ positiv, also wird p um so größer, je kleiner $|d|$ ist, und erreicht ein Maximum für $\varphi = \psi$.

Mit diesen Hilfssätzen können jetzt zwei wichtige Aufgaben gelöst werden.

1. Aufgabe: Zu bestimmen ist das Maximum der Funktion

$$s = \sin\varphi + \sin\psi + \sin\lambda,$$

wenn φ, ψ, λ drei positive Winkel mit einer konstanten Summe von $3\varepsilon \leqq 180°$ sind. Lösung: Hat nicht jeder der drei Winkel den Wert ε, dann muß mindestens einer größer und mindestens einer kleiner sein als ε, also etwa $\varphi > \varepsilon$, $\psi < \varepsilon$; die Winkel $\varphi, \psi, \varepsilon$ seien auf der Zahlengeraden aufgetragen (Abb. 33.2).

$\frac{\varphi+\psi}{2}$

$\psi<\varepsilon$ ω ε $\varphi>\varepsilon$

Abb. 33.2

Für das Spiegelbild ω von ε am Mittelpunkt von φ und ψ gilt offenbar

$$\omega+\varepsilon = \varphi+\psi \quad \text{und} \quad |\omega-\varepsilon| < \varphi-\psi,$$

und nach dem ersten Hilfssatz

$$\sin\varphi+\sin\psi < \sin\varepsilon+\sin\omega.$$

Daraus ergibt sich, daß auch

$$s = \sin\varphi+\sin\psi+\sin\lambda < \sin\varepsilon+\sin\omega+\sin\lambda$$

ist. Da nun $\varphi+\psi+\lambda = \omega+\varepsilon+\lambda = 3\varepsilon$ ist, ist $\omega+\lambda = 2\varepsilon$, und somit nach dem ersten Hilfssatz

$$\sin\omega+\sin\lambda \leqq \sin\varepsilon+\sin\varepsilon,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $\omega = \lambda = \varepsilon$ ist. Folglich ist

$$s < 3\sin\varepsilon,$$

und nur im Ausnahmefall $\varphi = \psi = \lambda = \varepsilon$ wird $s = 3\sin\varepsilon$. Also: Die Summe der Sinus dreier Winkel mit konstanter, 180° nicht überschreitender Summe wird ein Maximum, wenn die drei Winkel gleich sind.

2. Aufgabe: Zu bestimmen ist das Maximum der Funktion

$$p = \sin\varphi\sin\psi\sin\lambda$$

der drei positiven Winkel φ, ψ, λ mit der Summe $3\varepsilon \leqq 180°$. Mit den vorhin benützten Annahmen $\varphi > \varepsilon$, $\psi < \varepsilon$ und dem Spiegelbild ω von ε am Punkt $(\varphi+\psi)/2$ der Zahlenachse findet man wieder (Abb. 33.2) $\omega+\varepsilon = \varphi+\psi$, $|\omega-\varepsilon| \leqq \varphi-\psi$, so daß nach dem 1. Hilfssatz für Sinusprodukte

$$\sin\varphi\sin\psi < \sin\varepsilon\sin\omega$$

gilt. Mit $\sin\lambda$ multipliziert, wird daraus

$$p = \sin\varphi\sin\psi\sin\lambda < \sin\varepsilon\sin\omega\sin\lambda.$$

Da wieder $\omega+\lambda = 2\varepsilon$ ist, ergibt sich nach dem Hilfssatz für Sinusprodukte

$$\sin\omega\sin\lambda < \sin\varepsilon\sin\varepsilon,$$

d. h. es ist

$$p = \sin\varphi\sin\psi\sin\lambda < \sin^3\varepsilon.$$

Nur im Sonderfall $\varphi = \psi = \lambda = \varepsilon$ wird $p = \sin^3\varepsilon$, d. h. das Produkt der Sinus dreier Winkel mit konstanter, 180° nicht übersteigender Winkelsumme wird ein Maximum, wenn die drei Winkel gleich sind.

In genau derselben Weise läßt sich mit dem 2. Hilfssatz für die Kosinusfunktion zeigen: Summe und Produkt der Kosinus dreier spitzer Winkel mit konstanter, 180° nicht übersteigender Summe, erreichen ihre Maximalwerte bei Gleichheit der Winkel.

Und mittels des 3. Hilfssatzes findet man: Summe und Produkt der Tangens dreier spitzer Winkel mit konstanter, 180° nicht übersteigender Summe, erreichen bei Gleichheit der Winkel Extremwerte, und zwar die Summe ein Minimum, das Produkt ein Minimum oder Maximum, je nachdem die Winkelsumme stumpf oder spitz ist. Die so abgeleiteten Ergebnisse ergeben zusammengefaßt den eingangs formulierten Dreiwinkelsatz.

III. Schließlich sollen noch einige Ungleichungen für das Dreieck angegeben werden (vgl. H. DÖRRIE, a.a.O., S. 161), für deren Herleitung teilweise ebenfalls der Dreiwinkelsatz benötigt wird. Hier zunächst einige *Ungleichungen zwischen den Winkeln nichtregulärer Dreiecke:*

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma < \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma, \tag{33.1}$$

$$\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma > 1. \tag{33.2}$$

Für den Beweis von (33.1) ersetzt man die linke Seite nach (20.11) durch

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

und die rechte Seite nach (20.9) durch

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

so daß jetzt die Ungleichung

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma < \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

zu beweisen ist. Setzt man

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} \text{ usf.},$$

so wird daraus

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} < \frac{1}{8}.$$

Diese Ungleichung ist aber richtig, weil nach dem Dreiwinkelsatz

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{1}{8}$$

ist und hier das Gleichheitszeichen nur im Falle $\alpha=\beta=\gamma=60°$ gilt.

Für den Nachweis von (33.2) ist von (20.7)

$$\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta = 1$$

auszugehen. Da das Dreieck nicht regelmäßig sein soll, können die Differenzen $\cot\beta-\cot\gamma$, $\cot\gamma-\cot\alpha$, $\cot\alpha-\cot\beta$ nicht alle verschwinden,

d. h. sicher ist $(\cot\beta-\cot\gamma)^2+(\cot\gamma-\cot\alpha)^2+(\cot\alpha-\cot\beta)^2>0$. Ausmultipliziert gibt dies

$$\{2[\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma]-2(\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta)\}>0.$$

Beachtet man, daß die Rundklammer nach (20.7) den Wert $+1$ hat, so ist damit die Ungleichung bewiesen.

Für jedes nichtreguläre Dreieck gilt auch die Ungleichung

$$2\varrho<r, \tag{33.3}$$

d. h. der Inkreisdurchmesser 2ϱ ist kleiner als der Umkreisradius. Für den Nachweis von (33.3) sind in (27.7)

$$\varrho=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

die Stücke $(s-a)$, $(s-b)$, $(s-c)$ und s durch die Winkel auszudrücken. Wählt man den Umkreisdurchmesser als Längeneinheit, also $d=2r=1$, dann gilt nach der Durchmesserregel für die Seiten $a=\sin\alpha$, $b=\sin\beta$, $c=\sin\gamma$, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}2(s-a)&=b+c-a=\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha\\&=2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\&=2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right]\\&=2\cos\frac{\alpha}{2}\,2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},\end{aligned}$$

also

$$(s-a)=2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ebenso findet man

$$(s-b)=2\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$(s-c)=2\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Drückt man noch s durch die Winkel aus,

$$2s=a+b+c=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma,$$

so erhält man nach (20.9)

$$s=2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Der Inkreisradius ϱ lautet damit

$$\varrho = 2 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Nun ist nach dem Dreiwinkelsatz

$$\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} < \frac{1}{8},$$

folglich $\varrho < \frac{1}{4}$ oder $2\varrho < \frac{1}{2} = r$, was zu beweisen war.

Mit der zuletzt gewonnenen Ungleichung läßt sich auch noch zeigen, daß für jeden Winkel eines spitzwinkligen Dreiecks die Ungleichung

$$\cos\alpha + \sin\alpha - 1 < \varrho/r$$

gilt. Für den Beweis, den der Leser selbst versuchen mag, ist wieder $d = 1$ zu setzen. Dann lautet mit $\varrho = 2\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)$ die zu beweisende Ungleichung

$$\cos\alpha + \sin\alpha - 1 < 4\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2).$$

Für nichtreguläre Dreiecke kann noch *eine weitere Ungleichung* angegeben werden: Sind X, Y, Z die Abstände eines im Innern des Dreieckes ABC liegenden Punktes P von den Ecken, x, y, z seine Abstände von den Seiten, so gilt (Abb. 33.3)

$$X+Y+Z > 2(x+y+z). \tag{33.4}$$

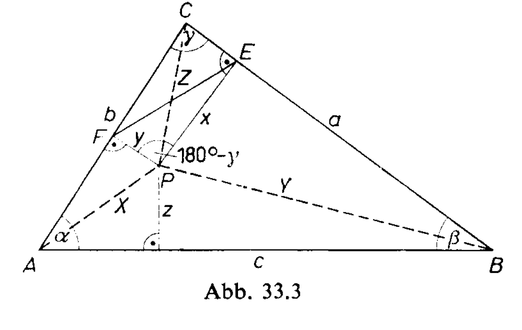


Abb. 33.3

Sind E und F die Fußpunkte der auf die Seiten a und b gefällten Lote x und y, so ist das Viereck $FPEC$ ein Sehnenviereck mit dem Winkel $180° - \gamma$ in P und dem Durchmesser $\overline{CP} = Z$. Nach der Durchmesserregel ist $\overline{EF} = Z\sin\gamma$, und der Kosinussatz im $\triangle EPF$ gibt

$$\overline{EF} = \sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\gamma};$$

also ist

$$Z = \frac{\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\gamma}}{\sin\gamma}.$$

Aus der Identität

$$x^2+y^2+2xy\cos\gamma = (x\sin\beta+y\sin\alpha)^2+(x\cos\beta-y\cos\alpha)^2$$

folgt

$$\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\gamma} \geqq x\sin\beta+y\sin\alpha$$

oder

$$Z \geqq x \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + y \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

In gleicher Weise findet man

$$X \geqq y \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + z \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad Y \geqq z \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + x \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$X+Y+Z \geqq x\left[\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right]+y\left[\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right]$$
$$+z\left[\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right].$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn die Differenzen

$$x\cos\beta - y\cos\alpha,\ y\cos\gamma - z\cos\beta,\ z\cos\alpha - x\cos\gamma$$

alle verschwinden. Jede der Klammern hat als Summe reziproker Werte einen Wert $\geqq 2$; also ist die rechte Seite der Ungleichung $\geqq 2x+2y+2z$. Dabei gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn jede Klammer den Wert 2 hat, d. h. wenn die Winkel $\alpha = \beta = \gamma$ gleich sind. Also kann die Gleichung

$$X+Y+Z = 2x+2y+2z$$

nur dann gelten, wenn ein gleichseitiges Dreieck vorliegt und außerdem $x = y = z$ ist, also der Punkt P im Mittelpunkt des Dreiecks liegt. In allen anderen Fällen gilt die Ungleichung (33.4).

34. Polygonzüge

Die Berechnung von Polygonzügen, eine wichtige Aufgabe der Vermessungskunde, stellt eine interessante Anwendung der ebenen Trigonometrie dar. Geometrisch handelt es sich um die Berechnung ebener Figuren, wobei aber durch die Verwendung rechtwinkliger Koordinaten auf eine Zerlegung in Teildreiecke verzichtet werden kann.

Polygonzüge bilden u. a. die Grundlage für die sogenannte Stückvermessung. Sie werden, ausgehend von den trigonometrisch bestimmten Punkten, durch Winkel- und Seitenmessung festgelegt.

Setzt man n gerichtete Strecken mit den Längen $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ und mit den auf die positive x-Achse bezogenen Richtungswinkeln $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ aneinander, den Anfangspunkt einer jeden in den Endpunkt der vorher-

gehenden, so entsteht ein Polygon mit den Ecken P_0, P_1, $P_2, \ldots, P_n$ und den Seiten $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$. Abb. 34.1 zeigt einen *offenen Polygonzug;* fallen Anfangs- und Endpunkt zusammen, so liegt ein *geschlossener Polygonzug* vor.

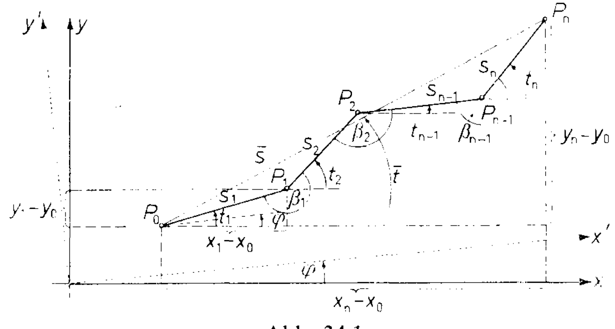


Abb. 34.1

Der Begriff der gerichteten Strecke wurde schon erläutert (vergl. [29]). Unter dem Richtungswinkel ist der Winkel zu verstehen, um den die positive x-Achse im positiven Sinn zu drehen ist, damit sie in die Richtung der gerichteten Strecke übergeht. – In der vermessungstechnischen Praxis spielt der offene, beidseitig an Dreieckspunkte angeschlossene Polygonzug die bedeutendere Rolle. Außer dem angeschlossenen Zug kennt man noch den freien Zug (ohne Kontrollanschluß), der aber nur für untergeordnete Arbeiten in Frage kommt.

Ohne auf die Anlage und Beobachtung der Polygonzüge einzugehen, seien die *Grundformeln der Polygonzugsberechnung* angegeben.

Zu messen sind die *Horizontalentfernungen* $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ und die z. B. rechts liegenden *Brechungswinkel* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$. Ist t_1 gegeben, so erhält man die übrigen Richtungswinkel zu $t_2 = t_1 \pm 180° + \beta_1, \ldots, t_n = t_{n-1} \pm 180° + \beta_{n-1}$.

Um den Polygonzug zu konstruieren, hat man, von $\overline{P_0P_1}$ ausgehend, in den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ entweder die Brechungswinkel $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ oder die Differenzen der Richtungswinkel $t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}$, um die jede Seite gegen die vorhergehende gedreht ist, und die entsprechenden Seitenlängen $s_2, s_3, \ldots, s_n$ abzutragen.

Kommt es nur auf die Gestalt des Zuges an, so kann der Richtungswinkel t_1 von $\overline{P_0P_1}$ beliebig, z. B. zu 0°, gewählt werden.

Bildet man die Projektionen der einzelnen Seiten auf die x- bzw. y-Achse,

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= s_1 \cos t_1, & y_1 - y_0 &= s_1 \sin t_1, \\ x_2 - x_1 &= s_2 \cos t_2, & y_2 - y_1 &= s_2 \sin t_2, \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n - x_{n-1} &= s_n \cos t_n, & y_n - y_{n-1} &= s_n \sin t_n, \end{aligned} \tag{34.1}$$

so erhält man, ausgehend von den Koordinaten x_0, y_0 von P_0, für die *Koordinaten der übrigen Zugpunkte*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0+s_1\cos t_1, & y_1 &= y_0+s_1\sin t_1,\\ x_2 &= x_1+s_2\cos t_2, & y_2 &= y_1+s_2\sin t_2,\\ &\vdots & &\vdots\\ x_n &= x_{n-1}+s_n\cos t_n, & y_n &= y_{n-1}+s_n\sin t_n. \end{aligned} \tag{34.2}$$

Ist P_n (x_n, y_n) ein der Lage nach bekannter Dreieckspunkt, so ergibt sich nach (34.2) eine Kontrolle für die Beobachtung und Berechnung. Die dabei wegen der Winkel- und Streckenmeßfehler auftretenden Anschlußwidersprüche werden nach den Regeln der Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung verteilt.

Für die Länge $\bar{s}$ und Richtung $\bar{t}$ der *Schlußseite* $\overline{P_0P_n}$ folgt aus Abb. 34.1

$$\bar{s} = \frac{x_n-x_0}{\cos\bar{t}} = \frac{y_n-y_0}{\sin\bar{t}} \quad \text{und} \quad \tan\bar{t} = \frac{y_n-y_0}{x_n-x_0} \tag{34.3a}$$

oder, wenn die Koordinatenunterschiede durch Summierung von (34.1) in der Form

$$x_n-x_0 = \sum_1^n s_i\cos t_i, \quad y_n-y_0 = \sum_1^n s_i\sin t_i \tag{34.3b}$$

geschrieben werden,

$$\bar{s} = \frac{\sum_1^n s_i\cos t_i}{\cos\bar{t}} = \frac{\sum_1^n s_i\sin t_i}{\sin\bar{t}}, \quad \tan\bar{t} = \frac{\sum_1^n s_i\sin t_i}{\sum_1^n s_i\cos t_i}. \tag{34.3c}$$

Ist der Polygonzug geschlossen, d. h. fällt P_n auf P_0, so muß nach (34.3b) $x_n-x_0 = y_n-y_0 = 0$, d. h. auch $\sum_1^n s_i\cos t_i = \sum_1^n s_i\sin t_i = 0$ werden. — Wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler werden sich aber Widersprüche zeigen, die meist proportional den Seitenlängen verteilt werden. — Übrigens muß im Falle des geschlossenen Polygons die Summe der beobachteten Polygonwinkel auf die theoretische Winkelsumme $(n\mp2)\,180°$ abgeglichen werden, wobei das Minuszeichen für Innenwinkel, das Pluszeichen für Außenwinkel gilt.

Aus dem Vergleich von (34.3a) mit (34.3b) folgen noch die Beziehungen

$$x_n-x_0 = \bar{s}\cos\bar{t} = \sum_1^n s_i\cos t_i,$$

$$y_n-y_0 = \bar{s}\sin\bar{t} = \sum_1^n s_i\sin t_i.$$

Demnach lassen sich Ausdrücke der Form

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \ldots + a_n \cos \alpha_n = \sum_1^n a_i \cos \alpha_i$$

und (34.4a)

$$a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \ldots + a_n \sin \alpha_n = \sum_1^n a_i \sin \alpha_i$$

durch eingliedrige Ausdrücke der Form $c \cos \sigma$ bzw. $c \sin \sigma$ ersetzen:

$$\sum_1^n a_i \cos \alpha_i = c \cos \sigma, \quad \sum_1^n a_i \sin \alpha_i = c \sin \sigma$$

mit (34.4b)

$$\tan \sigma = \frac{\sum_1^n a_i \sin \alpha_i}{\sum_1^n a_i \cos \alpha_i} \quad \text{und} \quad c = \frac{\sum_1^n a_i \cos \alpha_i}{\cos \sigma} = \frac{\sum_1^n a_i \sin \alpha_i}{\sin \sigma}.$$

Eine interessante Beziehung ergibt sich noch, wenn das Koordinatensystem aus seiner Ausgangslage um den Winkel φ herausgedreht wird, die Richtungswinkel also übergehen in $t_1 - \varphi$, $t_2 - \varphi, \ldots, t_n - \varphi$. Bildet man wieder die Projektionen auf die Koordinatenachsen, so geht (34.1) über in

$$\begin{aligned} x_1' - x_0' &= s_1 \cos(t_1 - \varphi), & y_1' - y_0' &= s_1 \sin(t_1 - \varphi), \\ x_2' - x_1' &= s_2 \cos(t_2 - \varphi), & y_2' - y_1' &= s_2 \sin(t_2 - \varphi), \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n' - x_{n-1}' &= s_n \cos(t_n - \varphi), & y_n' - y_{n-1}' &= s_n \sin(t_n - \varphi) \end{aligned} \tag{34.5a}$$

oder, wenn man summiert,

$$x_n' - x_0' = \sum_1^n s_i \cos(t_i - \varphi), \quad y_n' - y_0' = \sum_1^n s_i \sin(t_i - \varphi). \tag{34.5b}$$

Für die Schlußseite $\overline{P_0 P_n}$ gilt jetzt

$$x_n' - x_0' = \bar{s} \cos(\bar{t} - \varphi), \quad y_n' - y_0' = \bar{s} \sin(\bar{t} - \varphi) \tag{34.5c}$$

bzw.

$$\tan(\bar{t} - \varphi) = \frac{y_n' - y_0'}{x_n' - x_0'}, \quad \bar{s} = \frac{x_n' - x_0'}{\cos(\bar{t} - \varphi)} = \frac{y_n' - y_0'}{\sin(\bar{t} - \varphi)}. \tag{34.5d}$$

Der Vergleich von (34.5b) mit (34.5c) zeigt, daß auch n-gliedrige Ausdrücke der Form

$$\sum_1^n a_i \cos(\alpha_i - \varphi) \quad \text{und} \quad \sum_1^n a_i \sin(\alpha_i - \varphi) \tag{34.6a}$$

durch eingliedrige Ausdrücke dargestellt werden können, nämlich durch

$$\sum_1^n a_i \cos(\alpha_i - \varphi) = c \cos(\sigma - \varphi) \quad \text{und} \quad \sum_1^n a_i \sin(\alpha_i - \varphi) = c \sin(\sigma - \varphi)$$

mit

$$\tan(\sigma - \varphi) = \frac{\sum_1^n a_i \sin(\alpha_i - \varphi)}{\sum_1^n a_i \cos(\alpha_i - \varphi)}, \qquad c = \frac{\sum_1^n a_i \cos(\alpha_i - \varphi)}{\cos(\sigma - \varphi)} = \frac{\sum_1^n a_i \sin(\alpha_i - \varphi)}{\sin(\sigma - \varphi)}. \tag{34.6b}$$

Interessant ist auch die Berechnung der Schlußseite für *regelmäßige Polygonzüge*, d. h. wenn alle Seiten gleich lang sind und jede Seite gegen die vorhergehende um den Winkel α gleichsinnig weitergedreht wird (Abb. 34.2).

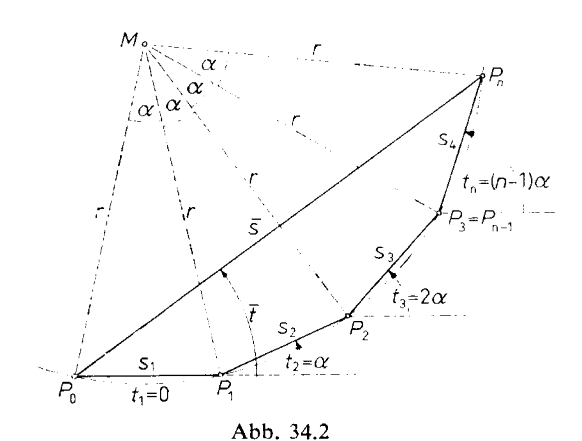


Abb. 34.2

Ist $\overline{P_0P_1} = \overline{P_1P_2} = \ldots = \overline{P_{n-1}P_n} = s$, $t_1 = 0$, $t_2 = \alpha$, $t_3 = 2\alpha, \ldots$ $t_n = (n-1)\alpha$, d. h. liegen die Polygonpunkte $P_0, P_1, \ldots, P_n$ auf einem Kreis vom Radius r um den Mittelpunkt M, so ist der Richtungswinkel der Schlußseite $\overline{P_0P_n}$ als Peripheriewinkel über $\overline{P_1P_n}$ gleich $\bar{t} = (n-1)\alpha/2$; weiter gilt $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 2r \sin(\alpha/2)$ und $\bar{s} = 2r \sin(n\alpha/2)$. Setzt man diese Werte in (34.5b) und (34.5c) ein und ersetzt noch φ durch $-\varphi$, so wird

$$2r \sin\frac{\alpha}{2}\{\cos\varphi + \cos(\alpha+\varphi) + \ldots + \cos[(n-1)\alpha+\varphi]\} =$$

$$= 2r \sin\frac{n\alpha}{2} \cos\left(\frac{n-1}{2}\alpha + \varphi\right) \quad \text{und}$$

$$2r \sin\frac{\alpha}{2} \{\sin\varphi + \sin(\alpha+\varphi) + \ldots + \sin[(n-1)\alpha+\varphi]\} =$$

$$= 2r \sin\frac{n\alpha}{2} \sin\left(\frac{n-1}{2}\alpha+\varphi\right).$$

Dividiert man noch durch $2r \sin(\alpha/2)$, so ergeben sich die *Summenformeln für die quasiarithmetischen Reihen*

$$\cos\varphi + \cos(\alpha+\varphi) + \cos(2\alpha+\varphi) + \ldots + \cos[(n-1)\alpha+\varphi] =$$

$$= \frac{\cos\left(\varphi+\frac{n-1}{2}\alpha\right)\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{34.7a}$$

$$\sin\varphi + \sin(\alpha+\varphi) + \sin(2\alpha+\varphi) + \ldots + \sin[(n-1)\alpha+\varphi] =$$

$$= \frac{\sin\left(\varphi+\frac{n-1}{2}\alpha\right)\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{34.7b}$$

Die auf geometrischem Wege gefundenen Summenformeln (34.7) können auch allein mit Hilfe der Verwandlungsformeln abgeleitet werden: Um die Summe S der quasiarithmetischen Reihe

$$\sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha) + \sin(\varphi+2\alpha) + \ldots + \sin[\varphi+(n-1)\alpha]$$

zu bilden, wird zuerst mit $2\sin(\alpha/2)$ multipliziert; wendet man dann auf die daraus entstehenden Produkte $2\sin(\alpha/2)\sin(\varphi+\nu\alpha)$ die Verwandlungsformeln an,

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(\varphi+\nu\alpha) = \cos\left(\varphi+\frac{2\nu-1}{2}\alpha\right) - \cos\left(\varphi+\frac{2\nu+1}{2}\alpha\right),$$

so ergibt sich für die gesuchte Summe

$$S\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\left\{\cos\left(\varphi+\frac{2\nu-1}{2}\alpha\right) - \cos\left(\varphi+\frac{2\nu+1}{2}\alpha\right)\right\} =$$

$$= \cos\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$+ \cos\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\varphi+\frac{3}{2}\alpha\right)$$

$$+ \cos\left(\varphi+\frac{3}{2}\alpha\right) - \cos\left(\varphi+\frac{5}{2}\alpha\right)$$

$$\ldots$$

$$+ \cos\left(\varphi+\frac{2n-3}{2}\alpha\right) - \cos\left(\varphi+\frac{2n-1}{2}\alpha\right) =$$

$$= \cos\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\varphi+\frac{2n-1}{2}\alpha\right) = 2\sin\left(\varphi+\frac{n-1}{2}\alpha\right)\sin\frac{n\alpha}{2}.$$

Schließlich wird

$$S = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\varphi+\frac{n-1}{2}\alpha\right).$$

In gleicher Weise läßt sich die Summe

$$\cos\varphi+\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi+2\alpha)+\ \dots\ +\cos[\varphi+(n-1)\alpha] = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cos\left(\varphi+\frac{n-1}{2}\alpha\right)$$

ableiten.

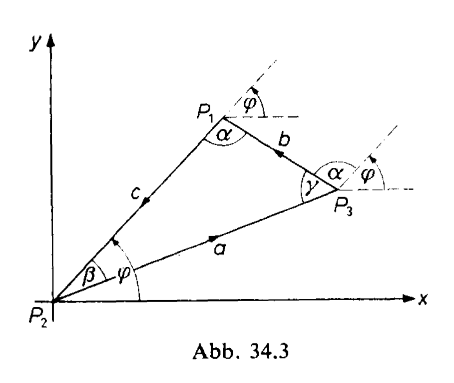


Abb. 34.3

Als weitere Anwendung sei ein geschlossener Polygonzug mit drei Seiten betrachtet. Projiziert man den Linienzug $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_1}$ z. B. auf eine durch P_2 gehende, von $\overline{P_1P_2}$ um den Winkel φ abweichende Abszissenachse (Abb. 34.3), so gilt, wenn die Seiten und Winkel des Polygons wie im Dreieck mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ bezeichnet werden, für die Richtungswinkel $t_{1.2} = 180° + \varphi$, $t_{2.3} = \varphi-\beta$, $t_{3.1} = \varphi+\alpha$ und für die Projektion auf die Abszissenachse

$$c\cos(180°+\varphi)+a\cos(\varphi-\beta)+b\cos(\varphi+\alpha) = 0,$$

oder

$$c\cos\varphi = a\cos(\varphi-\beta)+b\cos(\varphi+\alpha). \qquad (34.8)$$

Interessant ist, daß sich aus (34.8) praktisch der gesamte Formelapparat des ebenen Dreiecks herleiten läßt: Für $\varphi = 90°$ wird daraus $0 = a\sin\beta - b\sin\alpha$, oder $a:b = \sin\alpha:\sin\beta$. Das ist der Sinussatz. Die weiteren Gleichungen des Sinussatzes folgen aus (34.8) für $\varphi = 90°+\beta$ und $90°-\alpha$.

Für $\varphi = 0°$, $\varphi = \beta$, $\varphi = -\alpha$ resultiert der Projektionssatz; für $\varphi = 0$ wird z. B. $c = a\cos\beta+b\cos\alpha$, und endlich liefert (34.8) mit

$$\varphi = -(\alpha-\beta)/2 \text{ bzw. } \varphi = 90°-(\alpha-\beta)/2$$

die MOLLWEIDEschen Gleichungen. Für $\varphi = -(\alpha-\beta)/2$ z. B. wird aus (34.8)

$$c\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = a\cos\left[-\frac{\alpha-\beta}{2}-\beta\right]+b\cos\left[-\frac{\alpha-\beta}{2}+\alpha\right]$$

oder

$$c \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = a \sin \frac{\gamma}{2} + b \sin \frac{\gamma}{2} = (a+b) \sin \frac{\gamma}{2},$$

also

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

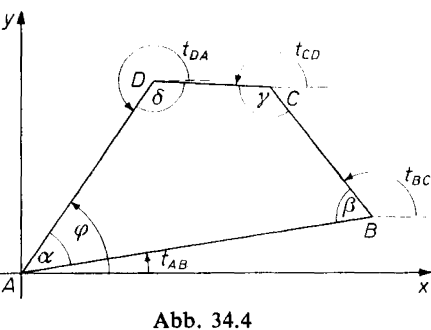


Abb. 34.4

Die Anwendung der Projektionsgleichung (34.8) auf Vier-, Fünf- und Sechsecke liefert in einfacher Weise die schon in [21] angegebenen Sinussätze dieser Figuren. — Die Ableitung soll für das Viereck $ABCD$ (Abb. 34.4) gezeigt werden: Schließt die Seite $\overline{DA}$ mit der durch A laufenden x-Achse den Winkel φ ein, so lauten die Richtungswinkel der vier Seiten offenbar

$$t_{AB} = \varphi-\alpha, \quad t_{BC} = \varphi-\alpha+180^\circ-\beta, \quad t_{CD} = \varphi-\alpha-\beta-\gamma,$$
$$t_{DA} = \varphi-\alpha-\beta-\gamma+180^\circ-\delta = \varphi-180^\circ.$$

Faßt man das Viereck als vierseitigen Polygonzug auf, so gibt die Projektion auf die x-Achse jetzt z. B.

$$\overline{AD} \cos(\varphi-180^\circ) = \overline{AB} \cos(\varphi-\alpha) + \overline{BC} \cos(\varphi-\alpha+180^\circ-\beta) + \overline{CD} \cos(\varphi-\alpha-\beta-\gamma)$$

oder

$$-\overline{AD} \cos\varphi = \overline{AB} \cos(\varphi-\alpha) - \overline{BC} \cos(\varphi-\alpha-\beta) + \overline{CD} \cos(\varphi-\alpha-\beta-\gamma).$$

Wird $\varphi = 90^\circ$ gesetzt, so wird daraus

$$\overline{AB} \sin\alpha - \overline{BC} \sin(\alpha+\beta) + \overline{CD} \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0. \qquad (34.9a)$$

(34.9a) wird als der *Sinussatz des Vierecks* bezeichnet.

Weitere Sinusbeziehungen des Vierecks werden in [36] angegeben. — In gleicher Weise gilt für ein Fünfeck mit den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$ und den Innenwinkeln α, β, γ, δ, ε in den Ecken A, B, C, D, E die Beziehung

$$\overline{AB} \sin\alpha - \overline{BC} \sin(\alpha+\beta) + \overline{CD} \sin(\alpha+\beta+\gamma) - \overline{DE} \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0. \qquad (34.9b)$$

Für ein Sechseck analoger Bezeichnungsweise läßt sich die Beziehung

$$\overline{AB} \sin \alpha - \overline{BC} \sin (\alpha+\beta) + \overline{CD} \sin (\alpha+\beta+\gamma) - \overline{DE} \sin (\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$
$$+ \overline{EF} \sin (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) = 0 \qquad (34.9c)$$

angeben, woraus auch das Bildungsgesetz des Sinussatzes für ein n-Eck mit den Seiten $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ und den inneren Eckenwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ erkennbar wird.

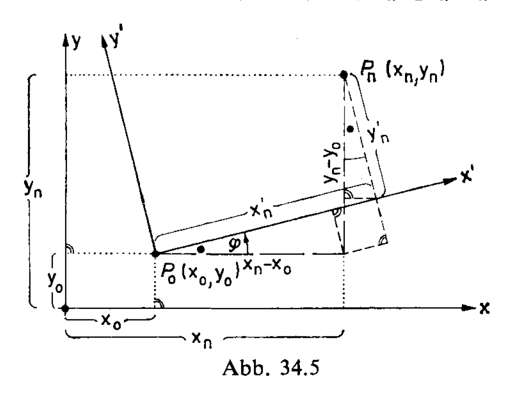


Abb. 34.5

Schließlich seien noch die Formeln für die *Transformation ebener rechtwinkliger Koordinaten* angegeben. Die Aufgabe kann wie folgt formuliert werden: Gegeben ist die Lage von $P_n(x_n, y_n)$ im Koordinatensystem x, y; gesucht sind die Koordinaten x'_n, y'_n von P_n im neuen System x', y', dessen Ursprung in $P_0(x_0, y_0)$ liegt und das aus seiner Ausgangslage um den Winkel φ gedreht ist (Abb. 34.5).

Die *Transformationsformeln* ergeben sich zu

$$\begin{aligned} x'_n &= (x_n - x_0) \cos \varphi + (y_n - y_0) \sin \varphi, \\ y'_n &= (y_n - y_0) \cos \varphi - (x_n - x_0) \sin \varphi, \end{aligned} \qquad (34.10a)$$

und die *Umkehrung* der Aufgabe lautet

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + x'_n \cos \varphi - y'_n \sin \varphi, \\ y_n &= y_0 + y'_n \cos \varphi + x'_n \sin \varphi. \end{aligned} \qquad (34.10b)$$

Kapitel 7: Trigonometrie des Vierecks

Vorweg sei bemerkt, daß die Berechnung der Vielecke, insbesondere des Vierecks — mitunter spricht man von einer *Polygonometrie* bzw. *Tetragonometrie* —, keinen selbständigen Zweig neben der Trigonometrie, vielmehr eine interessante Anwendung und Ergänzung der für das schiefwinklige Dreieck abgeleiteten trigonometrischen Sätze darstellt: Denn jede geradlinige Figur läßt sich ja in Dreiecke unterteilen. — Ohne hier eine vollständige Theorie des Vierecks zu entwickeln, sollen einige Viereckssätze betrachtet und Aufgaben der Vierecksberechnung behandelt werden.

35. Die Teildreiecke

Ein beliebiges Viereck P_0, P_1, P_2, P_3 bestimmt vier Teildreiecke, die mit $\triangle_0$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ bezeichnet seien, wobei der Index jeweils der dem Teildreieck nicht angehörenden Gegenecke entspricht (Abb. 35.1): Also ist $\triangle_0 = P_1P_2P_3$, $\triangle_1 = P_0P_2P_3$, $\triangle_2 = P_0P_3P_1$, $\triangle_3 = P_0P_2P_1$. — Die Seiten von $\triangle_0$ bezeichnet man am besten der Reihe nach so, wie sie den Teildreiecken $\triangle_1$, $\triangle_2$ und $\triangle_3$ angehören, mit a, b, c, und die Gegenseiten, die alle von P_0 auslaufen, mit a', b', c'. Entsprechend können die Winkel des Dreiecks $\triangle_i$ mit α_i, β_i, γ_i bezeichnet werden, so wie sie den Seiten a, b, c bzw. a', b', c', gegenüberliegen.

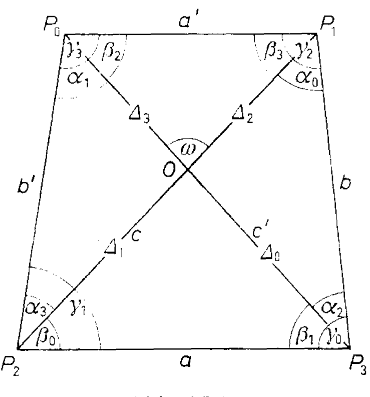


Abb. 35.1

Ein *ebenes Viereck* ist durch fünf unabhängige Stücke geometrisch bestimmt; es muß also möglich sein, die übrigen Stücke trigonometrisch zu berechnen. Sind zwei Teildreiecke bekannt, so kennt man in jedem der beiden anderen Teildreiecke zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kann also die weiteren Stücke berechnen. Bei passender Bezeichnung kennt man dann entweder die Dreiecke $\triangle_0$ und $\triangle_1$ (Abb. 35.2a) oder $\triangle_0$ und

$\triangle_3$ (Abb. 35.2b), d. h. für die übrigen Dreiecke $\triangle_2$ und $\triangle_3$ bzw. $\triangle_1$ und $\triangle_2$:

$$\triangle_2 : b,\ c',\quad \alpha_2 = \gamma_0 - \beta_1,$$
$$\triangle_3 : b',\ c,\quad \alpha_3 = \gamma_1 - \beta_0,$$

bzw.

$$\triangle_1 : a,\ b',\quad \gamma_1 = \beta_0 + \alpha_3,$$
$$\triangle_2 : a',\ b,\quad \gamma_2 = \alpha_0 + \beta_3.$$

Da zwei Teildreiecke stets eine Seite gemeinsam haben, genügen also für die schrittweise Berechnung des Viereckes aus den Teildreiecken insgesamt fünf Stücke, die allerdings unabhängig sein müssen.

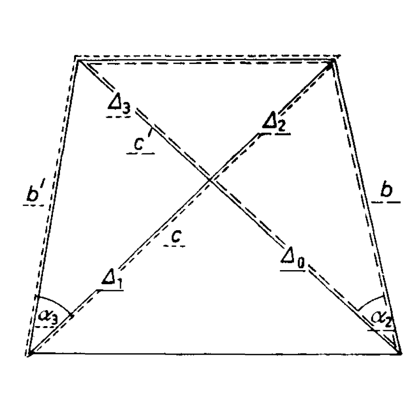


Abb. 35.2a

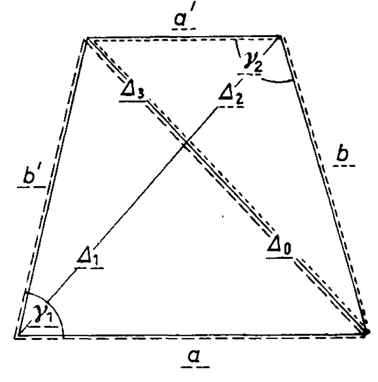


Abb. 35.2b

Hat das Viereck eine Eigenschaft, die ein Stück ersetzen kann, so genügen für die Berechnung vier Stücke: Solche Vierecke sind das *Trapez*, das *Sehnen-* und *Tangentenviereck*. Beim *Parallelogramm* liegen zwei Eigenschaften vor, die je ein Stück ersetzen so daß nur noch drei Stücke vorgegeben werden müssen. Beim *Rechteck* genügen zwei Stücke, beim *Quadrat* schließlich eines.

Im Falle der Kombination $\triangle_0$ und $\triangle_1$ genügen also
drei unabhängige Stücke von $\triangle_0$: $a, b, c, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$,
und zwei Stücke von $\triangle_1$: $b', c', \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$;
bei der Kombination $\triangle_0$ und $\triangle_3$ noch
zwei Stücke von $\triangle_3$: $a', b', \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Die Berechnung des Vierecks aus fünf unabhängigen Stücken ist aber keinesfalls stets durch schrittweise Auflösung der Teildreiecke möglich; sind z. B. drei unabhängige Stücke von $\triangle_0$, also $\triangle_0$ und c', γ_3 gegeben, so sind in keinem der Dreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ mehr als zwei Stücke bekannt. Dasselbe gilt, wenn außer $\triangle_0$ noch jeweils die Stücke (a', α_1), (b', β_2), (α_1, β_3) (α_3, β_2), (α_2, γ_3) und (α_1, β_2) gegeben sind. Sind a', b', c' und α_0, β_0 gegeben, so kennt man in keinem der Teildreiecke mehr als zwei unabhängige Stücke.

Offenbar sind somit sechs beliebige Stücke des Vierecks abhängig und mindestens durch eine Gleichung miteinander verbunden. Fünf Stücke dagegen können unabhängig sein; natürlich sind nicht irgendwelche fünf Stücke unabhängig, von den sechs Stücken eines Teildreiecks ja höchstens drei.

Von den Seitenverhältnissen und Winkeln sind höchstens vier unabhängig: Kennt man in $\triangle_0$ und $\triangle_1$ die Winkel $\beta_0, \gamma_0, \beta_1$ und γ_1, so kennt man auch α_0, α_1 und auch die Seitenverhältnisse

$$a : b : c \quad \text{und} \quad a : b' : c',$$

also in $\triangle_2$ auch $\alpha_2 = \gamma_0 - \beta_1$, $b/c = (b/a)\cdot(a/c)$, in $\triangle_3$ den Winkel $\alpha_3 = \gamma_1 - \beta_0$ $b'/c = (b'/a)\cdot(a/c)$ und damit $\beta_2, \gamma_2, \beta_3, \gamma_3$ und a'/b usw., also sämtliche Winkel und Seitenverhältnisse.

36. Winkelbeziehungen und goniometrische Formeln für das allgemeine Viereck

Von den insgesamt zwölf Winkeln eines Vierecks sind höchstens vier unabhängig. Zwischen den zwölf Winkeln müssen also acht unabhängige Gleichungen bestehen, die nun abgeleitet werden sollen. Für die Ecken des Vierecks gelten die *Winkelsummen*

$$\begin{aligned} P_0 &: \alpha_1+\beta_2 = \gamma_3, \quad & P_1 &: \alpha_0+\beta_3 = \gamma_2, \\ P_2 &: \alpha_3+\beta_0 = \gamma_1, \quad & P_3 &: \alpha_2+\beta_1 = \gamma_0. \end{aligned} \tag{36.1}$$

Die *Winkelsummen der Teildreiecke* ergeben:

$$\begin{aligned} \triangle_0 &: \alpha_0+\beta_0+\gamma_0 = 180^\circ; \quad & \triangle_1 &: \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = 180^\circ; \\ \triangle_2 &: \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 = 180^\circ; \quad & \triangle_3 &: \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 = 180^\circ. \end{aligned} \tag{36.2}$$

Damit liegen jetzt acht Winkelgleichungen vor, die aber nicht voneinander unabhängig sind: Schreibt man (36.1) in der Form

$$(\alpha_1+\beta_2-\gamma_3)-(\alpha_0+\beta_3-\gamma_2)-(\alpha_3+\beta_0-\gamma_1)+(\alpha_2+\beta_1-\gamma_0) = 0, \tag{36.3}$$

so erhält man daraus mit je drei Gleichungen von (36.1) jeweils die vierte Gleichung von (36.1). — Bringt man (36.3) in die Form

$$-(\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)+(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)+(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)-(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3) = 0, \tag{36.4}$$

so zeigt sich, daß man (36.4) und (36.3) auch aus (36.2) erhält und daß (36.3) mit je drei Gleichungen von (36.2) jeweils die vierte liefert. Mit anderen Worten: Je sieben Gleichungen von (36.1) und (36.2) haben also die achte zur Folge, die abhängig ist. Es fehlt somit noch eine von den acht Gleichungen zwischen den zwölf Viereckswinkeln. Auch die Summe für die vier Eckenwinkel

$$\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 360^\circ, \tag{36.5}$$

die Beziehungen für die Schnittwinkel ψ bzw. $\varkappa$ zwischen den Gegenseiten a und a' bzw. b' und b (vgl. Abb. 36.1)

$$\psi = 180^\circ - \gamma_1 - \gamma_3 = 180^\circ - (180^\circ - \gamma_2) - (180^\circ - \gamma_0) \tag{36.6}$$

bzw.

$$\varkappa = 180^\circ - \gamma_3 - \gamma_2 = 180^\circ - (180^\circ - \gamma_1) - (180^\circ - \gamma_0) \tag{36.7}$$

und auch die aus dem Schnittwinkel ω der Diagonalen c und c' folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} 180^\circ - \beta_0 - \beta_1 = 180^\circ - \beta_2 - \beta_3 &= 180^\circ - \{180^\circ - \alpha_0 - \alpha_2\} \\ &= 180^\circ - \{180^\circ - \alpha_1 - \alpha_3\} \end{aligned} \tag{36.8}$$

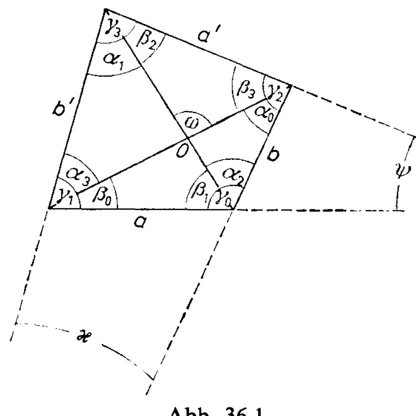


Abb. 36.1

können durch lineare Kombination aus (36.1) und (36.2) gewonnen werden. — Die achte Gleichung zwischen den Winkeln kann also keine Winkelsumme sein, sondern muß — wie der erweiterte Satz von CEVA (S. 121) zeigt — eine *Sinusgleichung* sein. Aus Gl. (30.2b) folgt, wenn der Diagonalschnittpunkt als Ausgangspunkt O der transversalen $\overline{OP_0}$, $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$ und $\overline{OP_3}$ benützt wird (vergl. Abb. 35.1), unmittelbar

$$\sin\alpha_0 \sin\alpha_3 \sin\beta_1 \sin\beta_2 = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\beta_0 \sin\beta_3. \tag{36.9}$$

Weitere Formen für die Sinusgleichung ergeben sich aus den Verhältnissen der von den Ecken P_0, P_1, P_2, und P_3 ausgehenden Seiten. Bildet man z. B. für die Ecke P_0

$$\frac{a'}{b'} \cdot \frac{b'}{c'} \cdot \frac{c'}{a'} = 1,$$

so erhält man, da je zwei dieser Seiten einem Teildreieck angehören, also ihr Quotient durch die Sinusverhältnisse der Gegenwinkel dargestellt werden kann,

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sin\alpha_3}{\sin\beta_3}, \qquad \frac{b'}{c'} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_1}, \qquad \frac{c'}{a'} = \frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_2},$$

eine Sinusgleichung der Form

$$\sin\alpha_3 \sin\beta_1 \sin\gamma_2 = \sin\alpha_2 \sin\beta_3 \sin\gamma_1. \tag{36.10}$$

In derselben Weise erhält man für die übrigen Ecken

$$\sin\alpha_2 \sin\beta_0 \sin\gamma_3 = \sin\alpha_3 \sin\beta_2 \sin\gamma_0, \tag{36.11}$$

$$\sin\alpha_1 \sin\beta_3 \sin\gamma_0 = \sin\alpha_0 \sin\beta_1 \sin\gamma_3, \tag{36.12}$$

$$\sin\alpha_0 \sin\beta_2 \sin\gamma_1 = \sin\alpha_1 \sin\beta_0 \sin\gamma_2. \tag{36.13}$$

Aus der seitenweisen Multiplikation je zweier dieser sechsgliedrigen Ausdrücke (36.10)×(36.11), (36.10)×(36.12), (36.10)×(36.13) erhält man drei weitere Gleichungen, worin auch (36.9) enthalten ist:

$$\sin\beta_0 \sin\beta_1 \sin\gamma_2 \sin\gamma_3 = \sin\beta_2 \sin\beta_3 \sin\gamma_0 \sin\gamma_1, \qquad (36.14)$$

$$\sin\gamma_0 \sin\gamma_2 \sin\alpha_3 \sin\alpha_1 = \sin\gamma_3 \sin\gamma_1 \sin\alpha_0 \sin\alpha_2, \qquad (36.15)$$

$$\sin\alpha_0 \sin\alpha_3 \sin\beta_1 \sin\beta_2 = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\beta_0 \sin\beta_3. \qquad (36.16)$$

Jede dieser sechs- bzw. achtgliedrigen Sinusgleichungen ergänzt die Gleichungen (36.1) und (36.2) zu dem vollständigen System der acht voneinander unabhängigen Beziehungen zwischen den zwölf Winkeln des Vierecks.

Sind alle zwölf Winkel eines Diagonalvierecks beobachtet, so sind diese so zu verbessern, daß sie diesem System von Bedingungsgleichungen genügen. Die rechentechnische Behandlung ist Aufgabe der Ausgleichungsrechnung.

Mitunter sind noch die *goniometrischen Formeln für die Winkel des Vierecks* von Bedeutung. Für die Winkel der Teildreiecke $\triangle_0$, $\triangle_1$, $\triangle_2$ und $\triangle_3$ gelten unmittelbar die in [20] abgeleiteten Dreieckswinkelbeziehungen. Mit Hilfe der Additionstheoreme lassen sich aber auch noch für die Eckenwinkel γ_0, γ_1, γ_2 und γ_3 goniometrische Formeln angeben, wovon einige, nämlich die Summen der Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens mitgeteilt werden sollen:

$$\sin\gamma_0 + \sin\gamma_1 + \sin\gamma_2 + \sin\gamma_3 = 4 \sin\frac{\gamma_0+\gamma_3}{2} \sin\frac{\gamma_1+\gamma_3}{2} \sin\frac{\gamma_2+\gamma_3}{2}, \qquad (36.17)$$

$$\cos\gamma_0 + \cos\gamma_1 + \cos\gamma_2 + \cos\gamma_3 = -4 \cos\frac{\gamma_0+\gamma_3}{2} \cos\frac{\gamma_1+\gamma_3}{2} \cos\frac{\gamma_2+\gamma_3}{2}, \qquad (36.18)$$

$$\tan\gamma_0 + \tan\gamma_1 + \tan\gamma_2 + \tan\gamma_3 = \frac{\sin(\gamma_0+\gamma_3)\sin(\gamma_1+\gamma_3)\sin(\gamma_2+\gamma_3)}{\cos\gamma_0 \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \cos\gamma_3}, \qquad (36.19)$$

$$\cot\gamma_0 + \cot\gamma_1 + \cot\gamma_2 + \cot\gamma_3 = \frac{\sin(\gamma_0+\gamma_3)\sin(\gamma_1+\gamma_3)\sin(\gamma_2+\gamma_3)}{\sin\gamma_0 \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \sin\gamma_3}. \qquad (36.20)$$

Hier als Beispiel der Nachweis von (36.17): Für drei beliebige Winkel γ_0, γ_1, γ_2 gilt, wie leicht nachzuweisen ist, die Beziehung

$$\sin\gamma_0 + \sin\gamma_1 + \sin\gamma_2 - \sin(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2) = 4 \sin\frac{\gamma_0+\gamma_1}{2} \sin\frac{\gamma_0+\gamma_2}{2} \sin\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}.$$

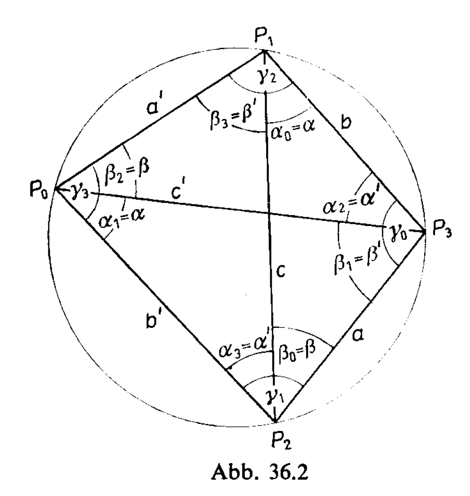


Abb. 36.2

Sind γ_0, γ_1, γ_2 die Winkel eines Vierecks, so ergibt sich der vierte γ_3 aus $360°-\gamma_3 = \gamma_0+\gamma_1+\gamma_2$, also gilt $\sin(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2) = \sin(360°-\gamma_3) = -\sin\gamma_3$. Beachtet man, daß

$$\frac{\gamma_0+\gamma_1}{2} = 180° - \frac{\gamma_2+\gamma_3}{2},$$

$$\frac{\gamma_0+\gamma_2}{2} = 180° - \frac{\gamma_1+\gamma_3}{2},$$

$$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 180° - \frac{\gamma_0+\gamma_3}{2}$$

ist, so bestätigt sich unmittelbar die Gleichung (36.17).

Mit Hilfe dieser Überlegungen läßt sich gleich noch das *Sehnenviereck* darstellen[36]: Tritt zu den acht Bedingungen noch die Forderung $\alpha_0 = \alpha_1$, so liegen nach dem Peripheriewinkelsatz die vier Ecken P_0, P_1, P_2, P_3 auf einem Kreis, d. h. es liegt ein Sehnenviereck vor (Abb. 36.2). Werden die Winkel des Sehnenvierecks mit α, β, α', β' bezeichnet, so gilt

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha, \quad \beta_0 = \beta_2 = \beta, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha', \quad \beta_1 = \beta_3 = \beta'. \tag{36.21}$$

Danach lassen sich sämtliche Winkel ohne trigonometrische Rechnung durch drei unabhängige Winkel, z. B. α, α' und β ausdrücken. Für die Ecken gilt:

$$\begin{aligned} P_0 &: \gamma_3 = \alpha+\beta; & P_1 &: \gamma_2 = \alpha+\beta'; \\ P_2 &: \gamma_1 = \alpha'+\beta; & P_3 &: \gamma_0 = \alpha'+\beta'; \end{aligned} \tag{36.22}$$

weiter gilt wegen $\alpha_0+\beta_0+\gamma_0 = 180°$ auch $\alpha+\beta+\alpha'+\beta' = 180°$, also

$$\beta' = 180°-\alpha-\beta-\alpha', \tag{36.23}$$

womit auch β' bekannt ist. Weiter folgt, daß

$$\gamma_0+\gamma_3 = \gamma_1+\gamma_2 = 180° \tag{36.24}$$

ist, womit alle Gleichungen identisch erfüllt sind.

Schließlich ist noch die Berechnung der Viereckswinkel aus vier gegebenen darzustellen[37]. Es gibt insgesamt sieben verschiedene Möglichkeiten, je vier unabhängige Winkel auszuwählen, die sich aber auf vier prinzipielle Anordnungen zurückführen lassen.

---

[36] Darauf ist in [38] nochmals zurückzukommen.

[37] Diese Aufgabe ist für einige Triangulationsaufgaben in der Vermessungskunde und Landesvermessung von Bedeutung, wie Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden, HANSEN-Aufgabe, etc.

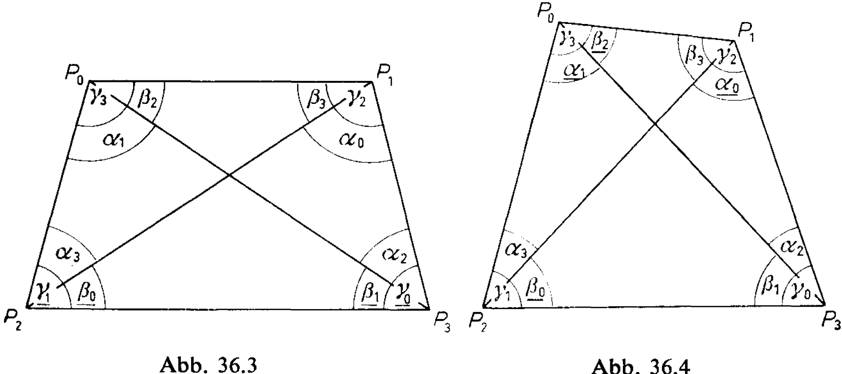


Abb. 36.3 Abb. 36.4

Die HANSEN- *oder* SNELLIUS-*Aufgabe* liegt vor, wenn z. B. in P_2 und P_3 die Winkel β_0, γ_0, β_1, γ_1 nach den Punkten P_0 und P_1 gegeben sind.

Offenbar handelt es sich um ein gleichzeitiges *Vorwärtseinschneiden* nach zwei Punkten: P_0 und P_1 können durch Messung der Winkel β_0, γ_0, β_1, γ_1 von den Festpunkten P_2 und P_3 aus lagemäßig bestimmt werden.

Nach Abb. 36.3 sind dann auch die Winkel $\alpha_0 = 180° - \beta_0 - \gamma_0$, $\alpha_1 = 180° - \beta_1 - \gamma_1$, $\alpha_2 = \gamma_0 - \beta_1$ und $\alpha_3 = \gamma_1 - \beta_0$ bekannt. Bei den restlichen Winkeln β_2, β_3, γ_2, γ_3 kennt man für je zwei ihre Summe sowie das Verhältnis ihrer Sinus: Für β_2 und γ_2 z. B. hat man nach Abb. 36.3 einmal die Summe $\beta_2 + \gamma_2 = 180° - \alpha_2$ und nach (36.13) das Sinusverhältnis

$$\frac{\sin\beta_2}{\sin\gamma_2} = \frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_0}{\sin\alpha_0 \sin\gamma_1};$$

die gesuchten Winkel β_2 und γ_2 sind also aus zwei Gleichungen zu bestimmen[38]. Für β_3 und γ_3 lauten die beiden Gleichungen nach Abb. 36.3 bzw. Gl. (36.12)

$$\beta_3 + \gamma_3 = 180° - \alpha_3 \quad \text{und} \quad \frac{\sin\beta_3}{\sin\gamma_3} = \frac{\sin\alpha_0 \sin\beta_1}{\sin\alpha_1 \sin\gamma_0}.$$

Natürlich genügt es, entweder β_2 und γ_2 oder β_3 und γ_3 zu bestimmen. Ebenso ist zu verfahren, wenn die Winkel α_0, β_0, α_3, β_3 gegeben sind.

Vom *Rückwärtseinscheiden*[39] spricht man, wenn z. B. die Winkel α_0, β_0, α_1, β_2 gegeben sind (Abb. 36.4). Denkt man sich P_1, P_2, P_3 als koordinatenmäßig gegebene Festpunkte, so sind auch die Winkel α_0, β_0, γ_0 bekannt, und für die Bestimmung von P_0 durch Rückwärtseinschneiden genügt die Beobachtung der Winkel α_1 und β_2.

Wie Abb. 36.4 zeigt, kennt man mit den vier gegebenen Winkeln auch

$$\gamma_0 = 180° - \alpha_0 - \beta_0 \quad \text{und} \quad \gamma_3 = \alpha_1 + \beta_2.$$

[38] Die Lösung goniometrischer Gleichungen ist in [48] dargestellt.
[39] Auch POTHENOTsche Aufgabe genannt, jedoch ebenfalls schon von SNELLIUS gelöst.

Bestimmt man noch α_2 und α_3, so sind alle Winkel des Vierecks bekannt. Nach Abb. 36.4 ist nun

$$180^\circ - \alpha_3 - \alpha_1 = 180^\circ - \alpha_0 - \alpha_2$$

oder

$$\alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_0 - \alpha_1.$$

Zusammen mit dem aus (36.11) folgenden Sinusverhältnis

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} = \frac{\sin \beta_2 \sin \gamma_0}{\sin \beta_0 \sin \gamma_3}$$

liegen wieder zwei Gleichungen vor, woraus α_2 und α_3 bestimmt und schließlich noch die Winkel γ_1 und γ_2 berechnet werden können.

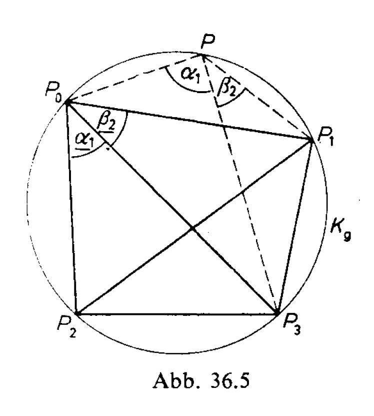


Abb. 36.5

Die Lösung der Aufgabe wird im Falle $\alpha_0 = \alpha_1$ unmöglich, weil dann ein Sehnenviereck vorliegt, also nach (36.21) auch $\beta_0 = \beta_2$ sein muß, so daß nur zwei der gegebenen Winkel unabhängig sind.

Die Lösung des Rückwärtseinschneidens mit Hilfe der gemessenen Winkel α_1 und β_2 wird demnach allgemein unbestimmt, wenn der Neupunkt P_0 auf dem Umkreis K_g der gegebenen Festpunkte P_1, P_2 und P_3 liegt: Die Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$ erscheinen dann nicht nur von dem zu bestimmenden Punkt P_0, sondern von jedem auf dem Umkreis K_g liegenden Punkt P unter denselben Peripheriewinkeln α_1 und β_2 (Abb. 36.5), so daß der Ort P_0 nicht mehr eindeutig festgelegt werden kann. Wegen der bedenklichen Eigenschaft des Umkreises K_g spricht man in der geodätischen Praxis von einem *gefährlichen Kreis*.

In ähnlicher Weise lassen sich Lösungen finden, wenn die gegebenen Winkel in den Anordnungen $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_3$ oder $\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \gamma_3$ vorliegen.

Sind die Winkel in den Kombinationen $\alpha_0, \beta_1, \beta_2, \alpha_3$ oder $\gamma_0, \gamma_1, \beta_2, \beta_3$ gegeben, so gibt es keine elementare Lösung der Aufgabe, vielmehr ergeben sich biquadratische Gleichungen.

37. Gleichungen zwischen Seiten und Diagonalen im Viereck; Flächenformeln für das allgemeine Viereck

Aus der Elementargeometrie ist bekannt, daß zwischen den sechs Stücken a, b, c, a', b', c' des allgemeinen Vierecks (Abb. 35.1) die Beziehung

$$(a^2+a'^2)(-a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2)+(b^2+b'^2)(+a^2a'^2-b^2b'^2+c^2c'^2)$$
$$+(c^2+c'^2)(+a^2a'^2+b^2b'^2-c^2c'^2) = (abc)^2+(ab'c')^2+(a'bc')^2+(a'b'c)^2 \qquad (37.1)$$

besteht. Gl. (37.1) stellt für das Quadrat jedes einzelnen der sechs Stücke eine quadratische Gleichung dar und ist elementar auflösbar. Da sie keine Winkel enthält, kann sie — wenn auch mühsam — geometrisch hergeleitet werden. Einfacher wird die Ableitung bei Zuhilfenahme der Winkel:

Dafür ist zunächst das Kosinusadditionstheorem für den Winkel $\gamma_3 = \alpha_1+\beta_2$ (vgl. Abb. 35.1) in der Form

$$\sin\alpha_1 \sin\beta_2 = \cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\gamma_3$$

anzuschreiben. Quadriert man und ersetzt links

$$\sin^2\alpha_1 = 1-\cos^2\alpha_1, \quad \sin^2\beta_2 = 1-\cos^2\beta_2,$$

so wird daraus

$$2\cos\alpha_1 \cos\beta_2 \cos\gamma_3 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\beta_2 - \cos^2\gamma_3 + 1 = 0.$$

Berechnet man die Kosinus mittels des Kosinussatzes aus den Dreiecken $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, so erhält man

$$\cos\alpha_1 = \frac{b'^2+c'^2-a^2}{2b'c',}, \quad \cos\beta_2 = \frac{a'^2+c'^2-b^2}{2a'c'}, \quad \cos\gamma_3 = \frac{a'^2+b'^2-c^2}{2a'b'};$$

setzt man dies in die vorige Gleichung ein und multipliziert mit dem Hauptnenner $4a'^2b'^2c'^2$, so ergibt sich nach geschickter Zusammenfassung die Gleichung (37.1).

Jetzt zu den *Flächenformeln des allgemeinen Vierecks:* Um die Fläche F durch die Seiten auszudrücken, ist von den Teildreiecken auszugehen. Nach Abb. 35.1 gilt z. B.

$$2F = 2\triangle_0 + 2\triangle_3 = ab\sin\gamma_0 + a'b'\sin\gamma_3. \tag{37.2}$$

(37.2) läßt sich durch einen Kunstgriff umformen. Bildet man aus den Kosinussätzen

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma_0 = a'^2+b'^2-2a'b'\cos\gamma_3$$

die Hilfsgröße

$$G = a^2+b^2-a'^2-b'^2 = 2ab\cos\gamma_0 - 2a'b'\cos\gamma_3,$$

so gewinnt man, wenn (37.2) in der Form

$$4F = 2ab\sin\gamma_0 + 2a'b'\sin\gamma_3$$

geschrieben wird, durch Quadrieren und Addieren

$$\begin{aligned} G^2+(4F)^2 &= 4a^2b^2\cos^2\gamma_0 + 4a'^2b'^2\cos^2\gamma_3 - 8aba'b'\cos\gamma_0\cos\gamma_3 \\ &\quad + 4a^2b^2\sin^2\gamma_0 + 4a'^2b'^2\sin^2\gamma_3 + 8aba'b'\sin\gamma_0\sin\gamma_3 \\ &= 4a^2b^2 + 4a'^2b'^2 - 8aba'b'(\cos\gamma_0\cos\gamma_3 - \sin\gamma_0\sin\gamma_3). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Beziehung

$$\cos\gamma_0\cos\gamma_3 - \sin\gamma_0\sin\gamma_3 = \cos(\gamma_0+\gamma_3) = 2\cos^2\frac{\gamma_0+\gamma_3}{2} - 1$$

und bringt G^2 auf die rechte Seite, so ergibt sich

$$16F^2 = [(2ab+2a'b')^2-G^2]-16aba'b' \cos^2 \frac{\gamma_0+\gamma_3}{2}.$$

Mit den Abkürzungen

$$s = \frac{1}{2}(a+b+a'+b'), \quad s_a = s-a, \quad s_b = s-b, \quad s_a' = s-a', \quad s_b' = s-b'$$

wird nach einiger Umformung endlich

$$F^2 = s_a s_b s_a' s_b' - aba'b' \cos^2 \frac{(\gamma_0+\gamma_3)}{2}. \tag{37.3}$$

Die Gleichung (37.3) drückt das Quadrat der Fläche durch die Seiten und die Halbsumme zweier Eckenwinkel aus. Natürlich läßt sich $(\gamma_0+\gamma_3)/2$ durch $(\gamma_1+\gamma_2)/2$ ersetzen, denn es ist

$$\cos^2 \frac{\gamma_0+\gamma_3}{2} = \cos^2 \left[180° - \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right] = \cos^2 \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}.$$

Gl. (37.3) enthält auch die Lösung der Extremalaufgabe, welchem Viereck mit gegebenen Seiten die größte Fläche zukommt: Offenbar wird F^2 ein Maximum, wenn der Subtrahend auf der rechten Seite verschwindet, also $aba'b' \cos^2 \{(\gamma_0+\gamma_3)/2\} = 0$ wird. Dies ist nur möglich, wenn $(\gamma_0+\gamma_3)/2 = (\gamma_1+\gamma_2)/2 = 90°$, d. h. wenn $\gamma_0+\gamma_3 = \gamma_1+\gamma_2 = 180°$, also die Summe zweier Gegenwinkel gleich 180°, das Viereck also ein Sehnenviereck ist. Von allen Vierecken mit gegebenen Seiten hat also das Sehnen- oder Kreisviereck die größte Fläche, nämlich

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-a')(s-b')}. \tag{37.4}$$

Um die Fläche durch die Diagonalen auszudrücken, ist der Winkel ω im Diagonalenschnittpunkt O einzuführen. Aus Abb. 35.1 ist abzulesen:

$$\begin{aligned} 2F = \overline{OP_0}\,\overline{OP_1} \sin\omega + \overline{OP_1}\,\overline{OP_3} \sin(180°-\omega) + \overline{OP_3}\,\overline{OP_2} \sin\omega \\ + \overline{OP_2}\,\overline{OP_0} \sin(180°-\omega) = \sin\omega\left[\overline{OP_0}\left(\overline{OP_1}+\overline{OP_2}\right) + \overline{OP_3}\left(\overline{OP_1}+\overline{OP_2}\right)\right] \\ = \sin\omega \cdot c\left(\overline{OP_0}+\overline{OP_3}\right) = cc' \sin\omega, \end{aligned}$$

also

$$F = \frac{cc'}{2} \sin\omega. \tag{37.5}$$

Die Gl. (37.5) läßt sich auch auf andere Weise ableiten, wobei sich noch eine merkwürdige Besonderheit ergibt. Aus Abb. 37.1 liest man

$$c \sin \omega = b \sin \alpha_2 + a \sin \beta_1$$

ab. Multipliziert mit $2c'$ wird daraus

$$2cc' \sin \omega = 2bc' \sin \alpha_2 + 2ac' \sin \beta_1.$$

Wegen $2bc' \sin \alpha_2 = 4\triangle_2$, $2ac' \sin \beta_1 = 4\triangle_1$ folgt sofort

$$4F = 2cc' \sin \omega. \tag{37.6}$$

Ebenso liest man aus Abb. 37.1

$$c \cos \omega = a \cos \beta_1 - b \cos \alpha_2$$

ab; multipliziert mit $2c'$ gibt dies

$$2cc' \cos \omega = 2ac' \cos \beta_1 - 2bc' \cos \alpha_2.$$

Ersetzt man die rechte Seite mittels der Kosinussätze

$$b'^2 = a^2 + c'^2 - 2ac' \cos \beta_1, \quad a'^2 = c'^2 + b^2 - 2bc' \cos \alpha_2,$$

so wird daraus

$$2cc' \cos \omega = a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2. \tag{37.7}$$

Denkt man sich die Seiten a, b, a', b' als Stäbe ausgeführt, die in den Ecken gelenkig verbunden sind, so entsteht ein *Gelenkviereck*, das durch seine Bewegung alle aus a, b, a', b' konstruierbaren Vierecke darstellt. Die Gleichung (37.7) liefert nun den merkwürdigen Satz: Sind in irgendeiner Stellung eines Gelenkvierecks seine Diagonalen zueinander senkrecht, so bleiben sie es bei allen Bewegungen des Vierecks, wie leicht einzusehen ist.

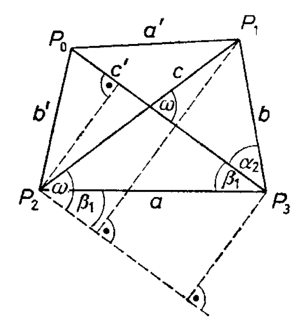


Abb. 37.1

(37.6) und (37.7) liefern auch noch, je nachdem, ob man cc' oder ω eliminiert,

$$4F = (a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2) \tan \omega, \tag{37.8}$$

$$(4F)^2 + (a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2)^2 = (2cc')^2, \tag{37.9}$$

wobei (37.8) allerdings im Falle zueinander senkrecht stehender Diagonalen sinnlos wird.

38. Trapez, Parallelogramm, Sehnen- und Tangentenviereck

Quadrat und Rechteck bieten trigonometrisch wenig; es werden daher nur noch für die oben genannten speziellen Vierecke einige Besonderheiten dargestellt.

Werden die Seiten a und a' des allgemeinen Vierecks parallel, so liegt ein *Trapez* vor (Abb. 38.1). Für die Winkel gilt dann

$$\beta_0 = \beta_3, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_0+\gamma_2 = \gamma_1+\gamma_3 = 180°. \tag{38.1}$$

Die sechsgliedrigen Ausdrücke (36.11) und (36.13) der für das allgemeine Viereck aufgestellten Sinusgleichungen werden gleichbedeutend mit (36.10) und (36.12); von den achtgliedrigen Sinusgleichungen ist (36.14) identisch erfüllt, und (36.15) und (36.16) lassen sich schreiben zu

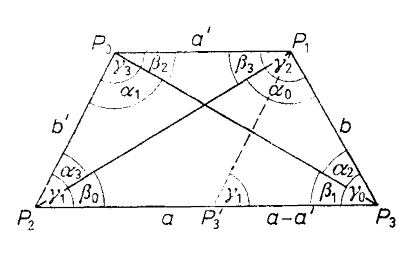


Abb. 38.1

$$\sin^2\gamma_0 \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 = \\ = \sin^2\gamma_1 \sin\alpha_0 \sin\alpha_2, \tag{38.2}$$

$$\sin^2\beta_0 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = \\ = \sin^2\beta_1 \sin\alpha_0 \sin\alpha_3. \tag{38.3}$$

Im Trapez sind je vier Winkel abhängig. Zu drei unabhängigen Winkeln kennt man nach (38.1) stets einen vierten, ausgenommen dann, wenn α_0, α_1, α_2 und somit auch $\alpha_3 = \alpha_0+\alpha_2-\alpha_1$ gegeben sind. In diesem Fall hat man β_0 und β_1 aus der Winkelsumme $\beta_0+\beta_1 = 180° - \alpha_0-\alpha_2$ und dem nach (38.3) gegebenen Sinusverhältnis $\sin\beta_0/\sin\beta_1$ zu bestimmen. — Ebenso wie in der Elementargeometrie ist es für eine Reihe von Trapezaufgaben nützlich, die Parallele zu den Seiten b oder b' einzuführen. Sind z. B. a, a', γ_0, γ_1 gegeben und zieht man $P_1P_3' \parallel P_0P_2$, so sind für $\triangle P_1P_3'P_3$ die Stücke $a-a'$, γ_1, γ_0 gegeben, woraus die fehlenden Seiten b, b' und alle übrigen Stücke des Trapezes abgeleitet werden können. — Die Trapezfläche läßt sich nach (37.3) oder (37.5) rechnen, doch wird man, wenn a, a', γ_0, γ_1 gegeben sind, besser von der Beziehung $F = (a+a')h/2$ ausgehen; dabei ist die Höhe h noch durch die gegebenen Stücke auszudrücken: Für die Fläche von $\triangle P_1P_3'P_3$ gilt

$$2F = h(a-a') = (a-a')b \sin\gamma_0.$$

Mit

$$b = \frac{(a-a')\sin\gamma_1}{\sin(\gamma_0+\gamma_1)}$$

folgt daraus für die *Höhe*

$$h = \frac{(a-a')\sin\gamma_0 \sin\gamma_1}{\sin(\gamma_0+\gamma_1)},$$

und die *Trapezfläche* wird schließlich

$$F = \frac{1}{2}\,\frac{(a+a')(a-a')\sin\gamma_0\sin\gamma_1}{\sin(\gamma_0+\gamma_1)}. \tag{38.4}$$

Sind im Viereck P_0, P_1, P_2, P_3 außer a und a' auch b und b' parallel, so liegt ein *Parallelogramm* vor. Aus Abb. 38.2 folgt dann für die Winkel

$$\begin{aligned}\beta_0 = \beta_3, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \alpha_0 = \alpha_3, \\ \gamma_0+\gamma_1 = \gamma_1+\gamma_3 = \gamma_3+\gamma_2 = \gamma_2+\gamma_0 = 180°.\end{aligned} \tag{38.5}$$

Von den Sinusgleichungen werden (36.10) und (36.13) gleichbedeutend mit (36.11) und (36.12); (36.14) und (36.15) sind identisch erfüllt, und (36.16) läßt sich in der Form

$$\sin^2 \alpha_0 \sin^2 \beta_1 = \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \beta_0 \tag{38.6}$$

schreiben. — Je drei Winkel des Parallelogramms sind abhängig; aus zwei unabhängigen Winkeln läßt sich stets ein dritter berechnen. Für die Fläche liefert z. B. (37.2) wegen $a' = a, b' = b$ und $\gamma_0 = \gamma_3$ sofort

$$F = ab \sin \gamma_0. \tag{38.7}$$

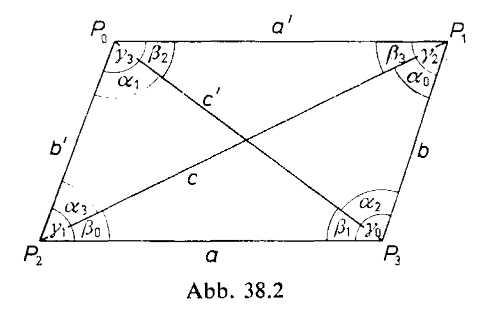


Abb. 38.2

Für das *Sehnenviereck* ist, nachdem die Winkelbeziehungen und die Flächenformel schon bekannt sind [vgl. (36.21) und (37.4)], nur noch die Berechnung der Winkel aus den Seiten darzustellen: Ausgehend von der in [37] benützten Hilfsgröße

$$G = a^2+b^2-a'^2-b'^2 = 2ab \cos \gamma_0 - 2a'b' \cos \gamma_3$$

und der Flächenformel (37.2)

$$4F = 2ab \sin \gamma_0 + 2a'b' \sin \gamma_3$$

des allgemeinen Vierecks, erhält man wegen

$$\gamma_0+\gamma_3 = 180°, \quad \cos \gamma_0 = -\cos \gamma_3, \quad \sin \gamma_0 = \sin \gamma_3$$

zunächst

$$G = 2 \cos \gamma_0 (ab+a'b') \text{ und } 4F = 2 \sin \gamma_0 (ab+a'b').$$

Nach $\cos \gamma_0$ und $\sin \gamma_0$ aufgelöst wird daraus

$$\cos \gamma_0 = \frac{a^2+b^2-a'^2-b'^2}{2(ab+a'b')}, \quad \sin \gamma_0 = \frac{2F}{ab+a'b'}. \tag{38.8}$$

Beide Ausdrücke in (38.8) lassen sich vereinfachen. Bildet man aus dem ersten

$$2\left(2 \cos^2 \frac{\gamma_0}{2} - 1\right)(ab+a'b') = a^2+b^2-a'^2-b'^2,$$

also

$$4 \cos^2 \frac{\gamma_0}{2}(ab+a'b') = a^2+b^2-a'^2-b'^2+2ab+2a'b' = 4s_a's_b',$$

so wird

$$\cos\frac{\gamma_0}{2} = \sqrt{\frac{s'_a s'_b}{ab+a'b'}}. \tag{38.9a}$$

In gleicher Weise liefert der zweite Ausdruck

$$\sin\frac{\gamma_0}{2} = \sqrt{\frac{s_a s_b}{ab+a'b'}}, \tag{38.9b}$$

woraus sich

$$\tan\frac{\gamma_0}{2} = \cot\frac{\gamma_3}{2} = \sqrt{\frac{s_a s_b}{s'_a s'_b}} \tag{38.10}$$

ergibt. — Ebenso findet man die analoge Formel

$$\tan\frac{\gamma_1}{2} = \cot\frac{\gamma_2}{2} = \sqrt{\frac{s_a s'_b}{s'_a s_b}}. \tag{38.11}$$

Mit (38.10) und (38.11) ist eine bequeme Berechnung der Winkel γ_0, γ_1, γ_2, γ_3 aus den Seiten a, b, a', b' möglich.

Um die Diagonalen aus den Seiten zu bestimmen, ist von dem Kosinussatz $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma_0$ auszugehen; eliminiert man daraus $\cos\gamma_0$ nach (38.8), so wird

$$c^2(ab+a'b') = a'b'(a^2+b^2)+ab(a'^2+b'^2)$$

oder nach weiterer Umformung der rechten Seite schließlich

$$c^2 = \frac{(ab'+a'b)(aa'+bb')}{(ab+a'b')}. \tag{38.12}$$

Ganz entsprechend findet man

$$c'^2 = \frac{(ab+a'b')(aa'+bb')}{(ab'+a'b)}. \tag{38.13}$$

Für den Umkreisradius r des Sehnenvierecks folgt aus $c = 2r\sin\gamma_0$ (Abb. 36.2) mit (38.8) und (38.12)

$$r = \frac{c}{2\sin\gamma_0} = \sqrt{\frac{(ab'+a'b)(aa'+bb')}{ab+a'b'}}\cdot\frac{(ab+a'b')}{4F},$$

also

$$4Fr = \sqrt{(ab+a'b')(ab'+a'b)(aa'+bb')}. \tag{38.14}$$

Setzt man links nach (37.4) noch die Fläche des Sehnenvierecks ein, so ergibt sich schließlich die bekannte Formel

$$4r = \sqrt{\frac{(ab'+a'b)(aa'+bb')(ab+a'b')}{(s-a)(s-b)(s-a')(s-b')}}. \tag{38.15}$$

Mit den in Abb. 36.2 benützten Bezeichnungen endlich lassen sich die Winkel auch darstellen durch

$$\sin\alpha = \frac{a}{2r}, \quad \sin\alpha' = \frac{a'}{2r}, \quad \sin\beta = \frac{b}{2r}, \quad \sin\beta' = \frac{b'}{2r}. \tag{38.16}$$

Übrigens enthalten die Gleichungen (38.12) und (38.13) unmittelbar auch den *Satz von* PTOLEMÄUS, wonach in einem Sehnenviereck das Diagonalprodukt gleich der Summe der Gegenseitenprodukte ist:

$$cc' = aa' + bb'. \tag{38.17}$$

Eine Verallgemeinerung des PTOLEMÄUSschen Satzes findet sich bei H. DÖRRIE, a.a.O. S. 140: Im Nichtkreisviereck ist jedes Gegenseitenprodukt kleiner als die Summe der beiden anderen Gegenseitenprodukte.

Werden im allgemeinen Viereck die Summen zweier Gegenseiten gleich, wird also

$$a + a' = b + b', \tag{38.18}$$

so liegt ein *Tangentenviereck* vor. Für die Berechnung sind ebenfalls vier unabhängige Stücke notwendig, worunter wegen (38.18) höchstens drei Seiten sein dürfen. Für die Winkel gelten die für das allgemeine Viereck aufgestellten Summen- und Sinusgleichungen. Sind z. B. die Seiten a, b, a' und der Winkel γ_1 gegeben, so kennt man im Dreieck $\triangle P_0P_2P_3$ (Abb. 38.3) die Seiten a, $b' = a + a' - b$ und den Winkel γ_1. Ist c' berechnet, so liegen in $\triangle P_0P_1P_3$ alle Seiten vor, woraus sich alle übrigen Stücke bestimmen lassen. Die Aufgabe ist also auf die Berechnung zweier Dreiecke zurückgeführt. Für die Fläche F erhält man aus (37.3) wegen $s_a = a'$, $s_b = b'$, $s_a' = a$, $s_b' = b$ zunächst

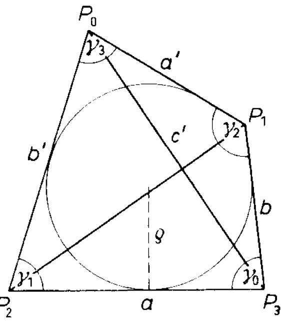


Abb. 38.3

$$F^2 = aba'b'\left(1 - \cos^2\frac{\gamma_0+\gamma_3}{2}\right)$$

und schließlich

$$F = \sqrt{aba'b'}\,\sin\frac{\gamma_0+\gamma_3}{2} = \sqrt{aba'b'}\,\sin\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}. \tag{38.19}$$

Der Radius des Inkreises endlich ist, wie leicht bestätigt werden kann,

$$\varrho = \frac{F}{a+a'} = \frac{F}{b+b'}. \tag{38.20}$$

Kapitel 8: Ergänzungen zu den trigonometrischen Funktionen, weitere algebraische und geometrische Anwendungen

39. Trigonometrische Deutung der komplexen Zahlen, Binomialformel von Moivre, Anwendungen

Faßt man die Zeichenebene als Ebene der komplexen Zahlen auf, ist also die x-Achse die Achse der reellen, die y-Achse die Achse der imaginären Zahlen, dann repräsentiert der auf dem Einheitskreis liegende Punkt P mit den Polarkoordinaten $r = 1$ und φ (vgl. Abb. 39.1) mit den rechtwinkligen Koordinaten $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ die *komplexe Zahl*

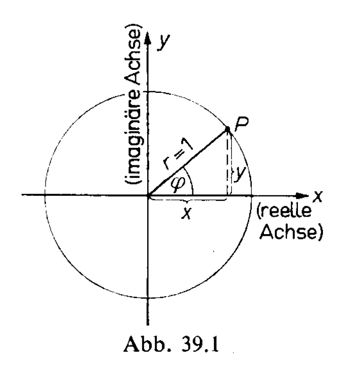


Abb. 39.1

$$x + \mathrm{i}y = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi. \qquad (39.1)$$

Unter einer komplexen Zahl versteht man den aus einer reellen und einer imaginären Zahl gebildeten Ausdruck $a \pm ib$, wobei a und b reell sind und $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit bedeutet. Für die Multiplikation mit komplexen Zahlen ist zu beachten, daß $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = +1$, oder allgemein $\mathrm{i}^{4n} = 1$ (n ganzzahlig), $\mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^{4n+m} = \mathrm{i}^m$ usf. ist. Also wird $(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) = ac + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}ad - bd = (ac-bd) + \mathrm{i}(bc+ad)$. Zwei Zahlen $a+ib$, $a-ib$ heißen konjugiert komplex, die reelle Zahl a^2+b^2, die durch $(a+ib)$ und durch $(a-ib)$ teilbar ist, heißt die Norm der konjugiert Komplexen $a+ib$ und $a-ib$. Die Division durch eine komplexe Zahl gibt

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2},$$

ist also gleich der Multiplikation mit ihrer Konjugierten, dividiert durch die Norm.

Komplexe Zahlen, deren Realteil der Kosinus, deren Imaginärteil der Sinus eines Winkels ist, nennt man Gauss-Zahlen.

Für die *Multiplikation zweier* Gauss-*Zahlen* $(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ und $(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ erhält man bei Beachtung der Rechenregeln für komplexe Zahlen

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) &= \\ = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + \mathrm{i}[\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi] &= \\ = \cos(\varphi+\psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\psi). \qquad (39.2a)\end{aligned}$$

Entsprechend findet man

$$(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\psi - \mathrm{i}\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi) - \mathrm{i}\sin(\varphi+\psi). \quad (39.2\mathrm{b})$$

Zur Vorbereitung der Division ist zunächst der Reziprokwert

$$\frac{1}{\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi} = \frac{\cos\psi-\mathrm{i}\sin\psi}{(\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi)(\cos\psi-\mathrm{i}\sin\psi)} = \cos\psi - \mathrm{i}\sin\psi \quad (39.3\mathrm{a})$$

zu bilden, womit man für die *Division zweier* GAUSS-*Zahlen* erhält

$$\frac{\cos\varphi\pm\mathrm{i}\sin\varphi}{\cos\psi\pm\mathrm{i}\sin\psi} = \cos(\varphi-\psi)\pm\mathrm{i}\sin(\varphi-\psi). \quad (39.3\mathrm{b})$$

Mit Hilfe der Produktregel (39.2) kann auch die *Potenzierung und Radizierung* gelöst werden. Für das *Produkt dreier* GAUSS-*Zahlen* $(\cos\varphi\pm \mathrm{i}\sin\varphi)$, $(\cos\psi\pm\mathrm{i}\sin\psi)$ und $(\cos\omega\pm\mathrm{i}\sin\omega)$ folgt aus (39.2) zunächst

$$(\cos\varphi\pm\mathrm{i}\sin\varphi)\ (\cos\psi\pm\mathrm{i}\sin\psi)\ (\cos\omega\pm\mathrm{i}\sin\omega) = \\ = \cos(\varphi+\psi+\omega)\pm\mathrm{i}\sin(\varphi+\psi+\omega),$$

und für die *Potenzierung* folgt daraus

$$(\cos\varphi\pm\mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos(\varphi+\varphi+\varphi+\ldots)\pm\mathrm{i}\sin(\varphi+\varphi+\varphi+\ldots) \\ = \cos n\varphi\pm\mathrm{i}\sin n\varphi. \quad (39.4)$$

Nun soll die n-te Wurzel aus $\cos\varphi\pm\mathrm{i}\sin\varphi$ bestimmt werden, also eine Zahl, deren n-te Potenz $\cos\varphi\pm\mathrm{i}\sin\varphi$ ergibt; sie lautet

$$\cos\frac{\varphi}{n}\pm\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{n}.$$

Tatsächlich ist nach (39.4)

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n}\pm\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n = \cos\varphi\pm\mathrm{i}\sin\varphi.$$

Für das *Radizieren* gilt also

$$\sqrt[n]{\cos\varphi\pm\mathrm{i}\sin\varphi} = (\cos\varphi\pm\mathrm{i}\sin\varphi)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\varphi}{n}\pm\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{n}, \quad (39.5)$$

und für einen gebrochenen Exponenten gilt dann nach (39.4) und (39.5)

$$(\cos\varphi\pm\mathrm{i}\sin\varphi)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^m} = (\cos m\varphi\pm\mathrm{i}\sin m\varphi)^{\frac{1}{n}} = \\ = \cos\frac{m}{n}\varphi\pm\mathrm{i}\sin\frac{m}{n}\varphi. \quad (39.6\mathrm{a})$$

(39.6a) ist die berühmte *Binomialformel von* MOIVRE, die in der Form

$$(\cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi)^r = \cos r\varphi \pm \mathrm{i}\sin r\varphi \tag{39.6b}$$

geschrieben wird, wobei r eine beliebige rationale Zahl sein kann.

Aus (39.6b) folgen noch die Beziehungen

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^r + (\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)^r &= 2\cos r\varphi,\\ (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^r - (\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)^r &= 2\mathrm{i}\sin r\varphi.\end{aligned} \tag{39.7}$$

Die Formel von MOIVRE gestattet zahlreiche Anwendungen, wovon einige hier angegeben werden sollen. Zunächst sei die Aufgabe behandelt, Sinus und Kosinus des mehrfachen Winkels durch Sinus und Kosinus des einfachen Winkels auszudrücken. Zunächst zum doppelten Winkel: Nach (39.6b) ist

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi + 2\mathrm{i}\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi,$$

woraus man durch Vergleich der Realteile und der Imaginärteile für den doppelten Winkel findet:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, \quad \sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi. \tag{39.8}$$

Ebenso findet man aus dem Vergleich von

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\mathrm{i}\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - \mathrm{i}\sin^3\varphi$$

und

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + \mathrm{i}\sin 3\varphi$$

für den dreifachen Winkel

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,\\ \sin 3\varphi &= 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.\end{aligned} \tag{39.9}$$

Um die Aufgabe für den n-fachen Winkel zu lösen, ist $(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n$ nach dem Binomialsatz zu entwickeln,

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi &+ \mathrm{i}\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi + \mathrm{i}^2\binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi\\ &+ \mathrm{i}^3\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \mathrm{i}^4\binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + \ldots,\end{aligned} \tag{39.10}$$

worin $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots$ oder allgemein $\binom{n}{p}$ die Binomialkoeffizienten bedeuten.

Man berechnet diese Binomialkoeffizienten (sprich n über 1, n über p usf.) nach der Formel

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots p}.$$

Es wird festgesetzt $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{0}{0} = 1$. Für positive ganze Zahlen n gelten folgende Formeln:

$\binom{n}{p} = 0,\quad$ wenn p eine positive ganze Zahl und größer als n ist;

$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}\quad$ für alle positiven ganzen Zahlen $p < n$

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p} + \ldots + \binom{p}{p};$$

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1};$$

$$\binom{m+n}{p} = \binom{m}{p}\binom{n}{p} + \binom{m}{p-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{p-2}\binom{n}{2} + \ldots + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \binom{m}{0}\binom{n}{p},$$

wenn auch m eine positive ganze Zahl ist, und

$$\binom{n}{n} = 1.$$

Aus dem Vergleich von (39.10) mit

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi$$

folgt jetzt für den n-fachen Winkel

$$\begin{aligned} \cos n\varphi &= \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots, \\ \sin n\varphi &= \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \ldots. \end{aligned} \tag{39.11}$$

Gl. (39.11) wird auch als das *Multiplikationstheorem der Kreisfunktionen* bezeichnet. — Auf die Bedeutung von (39.11) ist in [46] nochmals zurückzukommen.

Als weitere Anwendung sei noch die Auflösung binomischer Gleichungen dargestellt, wofür die *kanonische* oder polare Form der allgemeinen komplexen Zahl einzuführen ist: Der Punkt P mit den Polarkoordinaten r, φ und rechtwinkligen Koordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ repräsentiert die komplexe Zahl $x+\mathrm{i}y$, die in Anlehnung an (39.1) in die Form

$$x + \mathrm{i}y = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \tag{39.12}$$

gebracht werden kann. (39.12) stellt die *kanonische Form der allgemeinen komplexen Zahl* dar. Mit der erweiterten Form für Sinus und Kosinus

$$\cos\varphi = \cos(\varphi + k \cdot 360°) = \cos(\varphi + 2k\pi),$$
$$\sin\varphi = \sin(\varphi + k \cdot 360°) = \sin(\varphi + 2k\pi),$$

wobei k eine ganze Zahl bedeutet, erhält man daraus, wenn auch noch der Vorzeichenwechsel mitgeführt wird, die *Normalform der komplexen Zahl* zu

$$x \pm \mathrm{i}y = r[\cos(\varphi + 2k\pi) \pm \mathrm{i}\sin(\varphi + 2k\pi)]. \tag{39.13}$$

Die Anwendung der MOIVREschen Binomialformel auf (39.13) gibt:

$$(x \pm \mathrm{i}y)^n = r^n[\cos n(\varphi + 2k\pi) \pm \mathrm{i}\sin n(\varphi + 2k\pi)]. \tag{39.14}$$

Die für GAUSSsche Zahlen aufgestellten Rechenregeln lassen sich ohne Mühe auf allgemeine komplexe Zahlen übertragen[40]. Für die Multiplikation bzw. Division zweier komplexer Zahlen $r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ und $s(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ folgt aus (39.2a) und (39.3b)

$$r(\cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi)\, s(\cos\psi \pm \mathrm{i}\sin\psi) = rs[\cos(\varphi + \psi) \pm \mathrm{i}\sin(\varphi + \psi)],$$
$$\frac{r(\cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi)}{s(\cos\psi \pm \mathrm{i}\sin\psi)} = \frac{r}{s}[\cos(\varphi - \psi) \pm \mathrm{i}\sin(\varphi - \psi)].$$

In gleicher Weise sind die Potenzierung und Radizierung zu lösen.

Damit lassen sich nun binomische Gleichungen auflösen. Sind die Gleichungen

$$x^m = a, \quad x^m = -a$$

gegeben, so lauten die Lösungen $x = \sqrt[m]{a}$ bzw. $x = \sqrt[m]{-a}$. Die Lösungen sind unvollständig, denn nach dem *Hauptsatz der Algebra* (Lehre von den Gleichungen) sind für jede der beiden Gleichungen m Wurzeln als Lösungen zu fordern. Die Angabe der m Wurzeln wird durch den Satz von MOIVRE ermöglicht: Ist $\sqrt[m]{a}$ der arithmetisch bestimmte Wert der m-ten Wurzel, so lauten die Lösungen

$$x = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{+1} \quad \text{und} \quad x = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{-1},$$

d. h. die Aufgabe ist auf die Bestimmung der m-ten Einheitswurzel oder m-ten Wurzel aus der positiven und negativen Einheit zurückgeführt.

Für $\sqrt[m]{+1}$ erhält man, wenn die positive Einheit nach (39.12) in der Form

$$+1 = 1 + 0 \cdot \mathrm{i} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \quad \text{mit} \quad r = 1, \quad \varphi = k \cdot 360°,$$

---

[40] Eine Darstellung der Rechenregeln für GAUSSsche bzw. allgemeine komplexe Zahlen mit Hilfe des Vektorbegriffes findet sich bei G. HESSENBERG, a.a.O. S. 148.

also

$$+1 = (\cos k\cdot 360^\circ + \mathrm{i}\sin k\cdot 360^\circ)$$

dargestellt wird, nach der MOIVREschen Formel die Lösungen

$$\sqrt[m]{+1} = \cos\frac{k\cdot 360^\circ}{m} + \mathrm{i}\sin\frac{k\cdot 360^\circ}{m} \tag{39.15}$$

mit $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$.

Die Gleichung $x^m = 1$ bzw. $x = \sqrt[m]{1}$ wird auch als Kreisteilungsgleichung bezeichnet. Hier zwei Beispiele:

$$\begin{aligned}
m = 2:\quad & x_1 = \cos 0^\circ + \mathrm{i}\sin 0^\circ = +1;\\
& x_2 = \cos 180^\circ + \mathrm{i}\sin 180^\circ = -1;\\
m = 3:\quad & x_1 = \cos 0^\circ + \mathrm{i}\sin 0^\circ = +1;\\
& x_2 = \cos 120^\circ + \mathrm{i}\sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3};\\
& x_3 = \cos 240^\circ + \mathrm{i}\sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Die Lösungen von $\sqrt[m]{a}$ lauten mit (39.15)

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[m]{a}\left(\cos\frac{k\cdot 360^\circ}{m} + \mathrm{i}\sin\frac{k\cdot 360^\circ}{m}\right)\\
&= \sqrt[m]{a}\left(\cos 2k\cdot\frac{180^\circ}{m} + \mathrm{i}\sin 2k\cdot\frac{180^\circ}{m}\right).
\end{aligned} \tag{39.16}$$

Beispiel: Die Lösungen von $x^3 = 8$ lauten: $x_1 = +2$, $x_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $x_3 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

In gleicher Weise erhält man mit

$$-1 = -1 + 0\cdot\mathrm{i} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \quad \text{mit} \quad r = 1, \quad \varphi = (2k+1)180^\circ$$

jetzt

$$\sqrt[m]{-1} = \cos\frac{2k+1}{m}180^\circ + \mathrm{i}\sin\frac{2k+1}{m}180^\circ, \tag{39.17}$$

wobei $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$ ist, und schließlich

$$x = \sqrt[m]{-a} = \sqrt[m]{a}\left(\cos\frac{2k+1}{m}\cdot 180^\circ + \mathrm{i}\sin\frac{2k+1}{m}\cdot 180^\circ\right). \tag{39.18}$$

40. Die Kreisbogen- oder Arcusfunktionen

Darunter versteht man die *Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen.* Um $y = \sin x$ (x im Bogenmaß) umzukehren, vertauscht man die Veränderlichen, also $x = \sin y$, und löst nach y auf. Dann ist y der Bogen des Einheitskreises, dessen Sinus gleich x ist; abgekürzt schreibt man dafür

$$y = \arcsin x. \tag{40.1}$$

Ist $y = f(x)$ eine Funktion von x, so heißt allgemein die Funktion $x = F(y)$ die *Umkehrfunktion* oder inverse Funktion von $f(x)$.[41)]

Um $y = \arcsin x$ geometrisch darzustellen, wird von einem Punkt S auf dem Einheitskreis E um O die Senkrechte $\overline{FS} = x$ auf $\overline{OA}$ gefällt (Abb. 40.1); dann ist der Bogen $AS = y = \arcsin x$. — In gleicher Weise ergeben sich die Umkehrungen der übrigen Kreisfunktionen $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

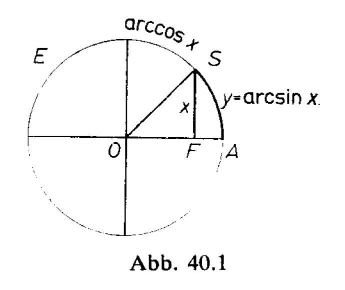


Abb. 40.1

Im folgenden werden für die *Kreisbogenfunktionen,* die auch *zyklometrische Funktionen* genannt werden, die wichtigsten Beziehungen, insbesondere die Analogien zu den trigonometrischen Funktionen aufgezeigt.

A r c u s s i n u s f u n k t i o n : Eine der wichtigsten Beziehungen ist ihr *Additionstheorem oder ihre Funktionalgleichung,* die aus dem Additionstheorem des Sinus hergeleitet werden kann: x und y seien zwei beliebige Argumentwerte, $\xi = \arcsin x$ und $\eta = \arcsin y$ die zugehörigen Funktionswerte, also $x = \sin \xi$, $y = \sin \eta$.

Aus

$$\sin(\xi+\eta) = \sin\xi \cos\eta + \cos\xi \sin\eta$$

folgt wegen $\cos\xi = \sqrt{1-\sin^2\xi} = \sqrt{1-x^2}$ und $\cos\eta = \sqrt{1-\sin^2\eta} = \sqrt{1-y^2}$ die Beziehung

$$\sin(\xi+\eta) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2},$$

woraus sich durch Umkehrung

$$\xi+\eta = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

Im Englischen schreibt man für die Umkehrfunktion von $x = \sin y$ meist $y = \sin^{-1} x$ (inverse sine of x), d.h. y ist die *inverse Funktion* von $x = \sin y$; dagegen wü rde der Ausdruck $y = \sin^{-1} x$ bei uns für $y = 1/\sin x$ gelesen werden.

ergibt, oder schließlich

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right). \qquad (40.2)$$

Dies ist das *Additionstheorem der Arcussinusfunktion.*

Das Schaubild von $y = \arcsin x$ ist eine zur Mediane $y = x$ symmetrische Sinuswelle der Wellenlänge 2π, die sich längs der y-Achse erstreckt. Also ist $y = \arcsin x$ eine unendlich vieldeutige Funktion, die (reell) nur für $-1 \leqq x \leqq +1$ existiert, weil ja die dazu inverse Sinusfunktion mit den y-Werten nur das Intervall $-1 \leqq y \leqq +1$ überdeckt. Mit Beschränkung auf $-\pi/2 \leqq y \leqq \pi/2$ erhält man die *Hauptwerte* $y = \overline{\arcsin}\, x$ der Funktion. Alle übrigen Werte von $y = \arcsin x$ sind die *Nebenwerte*, die sich durch die Hauptwerte darstellen lassen zu

$$\begin{aligned} y &= \overline{\arcsin}\, x \pm 2n\pi, && \text{mit } n = 1, 2, 3, \ldots, \\ y &= \pi - \overline{\arcsin}\, x \pm 2n\pi, && \text{mit } n = 0, 1, 2, 3 \ldots. \end{aligned} \qquad (40.3)$$

Diese Beziehungen können unmittelbar aus Abb. 40.1 abgeleitet werden: Bleibt y im Bereich $-\pi/2 \leqq y \leqq \pi/2$, so ist der Bogen AS der Hauptwert. Die Nebenwerte erhält man, wenn beliebige Vielfache des Umfanges 2π des Einheitskreises hinzugefügt oder weggenommen werden. Man erhält aber noch andere Nebenwerte, nämlich $\pi - \overline{\arcsin}\, x$, deren Sinus gleichfalls x ist, und ferner die um ganze Vielfache von 2π veränderten Werte.

In derselben Weise ergibt sich als Umkehrung von $y = \cos x$ die Arcuskosinusfunktion

$$y = \arccos x. \qquad (40.4)$$

Die geometrische Bedeutung von $\arccos x$ ist ebenfalls aus Abb. 40.1 zu ersehen. Das *Additionstheorem der Arcuskosinusfunktion*, das ebenso wie (40.2) abzuleiten ist, lautet

$$\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right). \qquad (40.5)$$

Auch $y = \arccos x$ ist unendlich vieldeutig mit Intervallen von 2π. Das Schaubild ist das an $y = x$ gespiegelte Bild von $y = \cos x$. Bei Beschränkung auf $0 \leqq y \leqq \pi$ erhält man die Hauptwerte $y = \overline{\arccos}\, x$, und die Nebenwerte lauten (vgl. Abb. 40.1)

$$\left.\begin{aligned} y &= \overline{\arccos}\, x \pm 2n\pi \\ y &= -\overline{\arccos}\, x \pm 2n\pi \end{aligned}\right\} \text{mit } n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (40.6a)$$

Weiter besteht für die Hauptwerte von $\overline{\arcsin}\, x$ und $\overline{\arccos}\, x$ die Beziehung

$$\overline{\arcsin}\, x + \overline{\arccos}\, x = \frac{\pi}{2}. \qquad (40.6b)$$

Die Umkehrfunktion von $y = \tan x$ lautet

$$y = \arctan x; \qquad (40.7)$$

das ist die Arcustangensfunktion. Um sie geometrisch darzustellen, ist an den Einheitskreis E im Punkt A eine Tangente $\overline{AT} = x$ zu legen. Die Verbindung $\overline{OT}$ schneidet den Einheitskreis in S, und es ist der

Bogen $\widehat{AS} = y = \arctan x$ (Abb. 40.2). Auch das *Additionstheorem der Arcustangensfunktion* ist einfach herzuleiten: Sind x und y zwei beliebige Argumentwerte, $\xi = \arctan x$ und $\eta = \arctan y$ die zugehörigen Funktionswerte, dann gilt nach dem Additionstheorem des Tangens

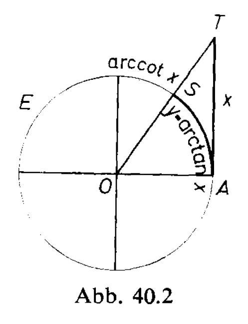


Abb. 40.2

$$\tan(\xi+\eta) = \frac{\tan\xi+\tan\eta}{1-\tan\xi\tan\eta}$$

oder

$$\tan(\xi+\eta) = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Die Umkehrung gibt dafür

$$\xi+\eta = \arctan x+\arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}. \tag{40.8}$$

Die Umkehrfunktion von $y = \cot x$ ist die Arcuskotangensfunktion

$$y = \operatorname{arccot} x. \tag{40.9}$$

Auch $\arctan x$ und $\operatorname{arccot} x$ sind unendlich vieldeutig mit Intervallen von π. Ihre Schaubilder sind die an der Geraden $y = x$ gespiegelten Bilder von $\tan x$ und $\cot x$. Die Hauptwerte lauten

$$\begin{aligned} y &= \overline{\arctan}\, x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}\right), \\ y &= \overline{\operatorname{arccot}}\, x \quad (0 < y < \pi), \end{aligned} \tag{40.10}$$

und die Nebenwerte sind

$$\begin{aligned} \arctan x &= \overline{\arctan}\, x \pm n\pi, \\ \operatorname{arccot} x &= \overline{\operatorname{arccot}}\, x \pm n\pi, \end{aligned} \tag{40.11a}$$

wie unmittelbar aus der Abb. 40.2 abzulesen ist. Ausserdem gilt für die Hauptwerte

$$\overline{\arctan}\, x + \overline{\operatorname{arccot}}\, x = \frac{\pi}{2}. \tag{40.11b}$$

Weiter zeigen die Abbildungen 40.1 und 40.2, daß für die Hauptwerte die Beziehungen

$$\begin{aligned} \overline{\arcsin}\,(-x) &= -\overline{\arcsin}\, x, \\ \overline{\arccos}\,(-x) &= \pi-\overline{\arccos}\, x, \\ \overline{\arctan}\,(-x) &= -\overline{\arctan}\, x, \\ \overline{\operatorname{arccot}}\,(-x) &= \pi-\overline{\operatorname{arccot}}\, x \end{aligned} \tag{40.11c}$$

gelten. Schließlich lassen sich für die Hauptwerte der Arcusfunktionen Formeln ange-

ben, die denen der trigonometrischen Funktionen entsprechen; aus Abb. 40.3 ist mit $\sin y \leqq x$ für $0 \leqq y \leqq \pi/2$ abzuleiten:

$$\cos y = \sqrt{1-x^2}, \qquad \tan y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{also} \quad y = \arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{40.12a}$$

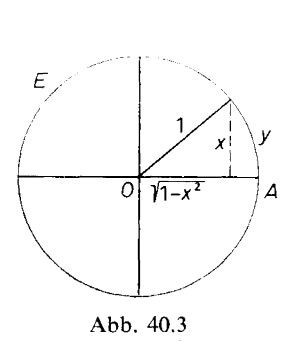


Abb. 40.3

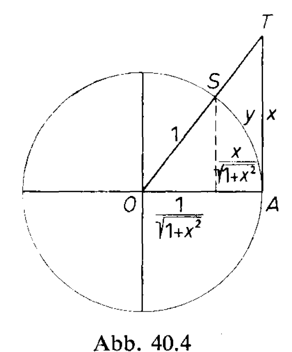


Abb. 40.4

Ebenso findet man aus Abb. 40.4 mit $\tan y = x$ für $0 \leqq y \leqq \pi/2$

$$\sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{also}$$

$$y = \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{40.12b}$$

Die Relationen (40.12a) und (40.12b) können dazu dienen, die Werte der Arcusfunktionen ineinander überzuführen. Dabei ist zu beachten, daß in (40.12) sämtliche Wurzeln positiv zu nehmen sind.

Aus $\tan y = 1/\cot y$ folgt, wenn der gemeinsame Wert beider Größen mit x bezeichnet wird, für $\tan y = x > 0$ und $1/\cot y = x > 0$, daß $\cot y = 1/x > 0$, also auch

$$y = \arctan x = \operatorname{arccot} \frac{1}{x} \quad \text{für} \quad x > 0 \tag{40.12c}$$

gilt.

Reihenentwicklungen der Arcusfunktionen werden in [45] angegeben.

41. Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen und der Arcusfunktionen, Mittelwerte der Kreisfunktionen Sinus und Kosinus

Bei den folgenden Untersuchungen über Kreisfunktionen werden auch die *Ableitungen der Kreisfunktionen* benützt. — Allgemein versteht man unter der Ableitung oder dem Differentialquotienten der Funktion $y = f(x)$ an

der Stelle x den Grenzwert

$$y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (41.1)$$

Für die Bildung der Differentialquotienten der Kreisfunktionen $\sin x$ und $\cos x$, wobei x im Bogenmaß zu verstehen ist, bietet sich eine interessante Lösung, die lediglich die Verwandlungsformeln und den schon in [17] dargestellten Grenzwert $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ benützt.

Setzt man in (41.1) für $x+\Delta x = X$, also $\Delta x = X-x$, so lautet die Ableitung von $\sin x$

$$(\sin x)' = \lim_{(X-x) \to 0} \frac{\sin X - \sin x}{X-x}.$$

Schreibt man

$$\sin X - \sin x = 2 \cos \frac{X+x}{2} \sin \frac{X-x}{2} = 2 \cos \bar{x} \sin \frac{X-x}{2}$$

mit $\bar{x} = (X+x)/2$, $\quad u = (X-x)/2$ und $X-x = 2u$, so wird

$$\frac{\sin X - \sin x}{X-x} = \cos \bar{x} \frac{\sin u}{u}.$$

Um jetzt $(\sin x)'$ zu erhalten, ist noch der Grenzwert von $\cos \bar{x} \sin u/u$ für $X \to x$ zu bilden. Der erste Faktor hat den Grenzwert $\lim\limits_{X \to x} \cos \bar{x} = \cos x$ und der zweite nach (17.3) den Grenzwert $\lim\limits_{X \to x} \sin u/u = 1$; also wird

$$(\sin x)' = \cos x. \qquad (41.2)$$

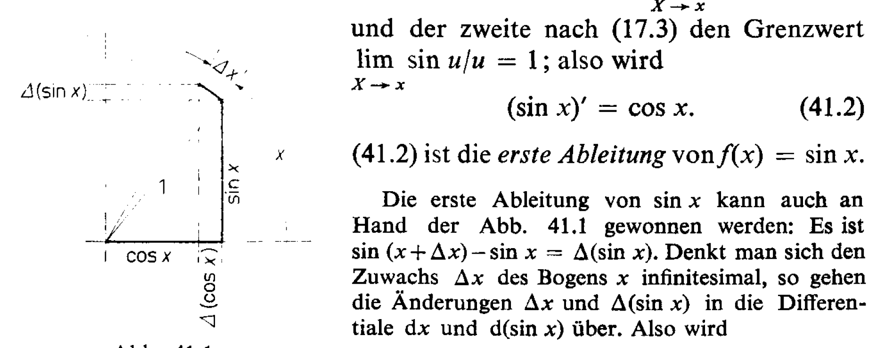


Abb. 41.1

(41.2) ist die *erste Ableitung* von $f(x) = \sin x$.

Die erste Ableitung von $\sin x$ kann auch an Hand der Abb. 41.1 gewonnen werden: Es ist $\sin(x+\Delta x) - \sin x = \Delta(\sin x)$. Denkt man sich den Zuwachs Δx des Bogens x infinitesimal, so gehen die Änderungen Δx und $\Delta(\sin x)$ in die Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}(\sin x)$ über. Also wird

$$\sin(x+\mathrm{d}x) - \sin x = $$
$$= \sin x \cos \mathrm{d}x + \cos x \sin \mathrm{d}x - \sin x = \mathrm{d}(\sin x).$$

Mit $\cos \mathrm{d}x = 1$ und $\sin \mathrm{d}x = \mathrm{d}x$ wird daraus

$$\cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x), \quad \text{also} \quad \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x.$$

Auf das gleiche Ergebnis führt auch die elementar abgeleitete erste Gleichung von (28.1), wenn man von $\Delta\alpha$ auf das Differential $\mathrm{d}\alpha$ übergeht.

In gleicher Weise findet man für die erste Ableitung von $f(x) = \cos x$:

$$(\cos x)' = \lim_{X \to x} \frac{\cos X - \cos x}{X - x}.$$

Schreibt man $\cos X - \cos x = -2 \sin\{(X+x)/2\} \sin\{(X-x)/2\}$, so wird

$$\frac{\cos X - \cos x}{X - x} = -\sin \bar{x} \frac{\sin u}{u}.$$

Geht man wieder zur Grenze über, $X \to x$, so wird der erste Faktor rechts gleich $-\sin x$ und der zweite gleich 1; also ist

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{41.3}$$

Auch die erste Ableitung von $\cos x$ kann aus Abb. 41.1 gewonnen werden; aus

$$\cos(x + \mathrm{d}x) - \cos x = \cos x \cos \mathrm{d}x - \sin x \sin \mathrm{d}x - \cos x = -\sin x\, \mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$$

wird jetzt

$$\sin x\, \mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x), \quad \text{also} \quad \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -\sin x.$$

Aus (41.2) und (41.3) können auch die *höheren Ableitungen* der Kreisfunktionen gebildet werden; die Ableitung der ersten Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ nennt man die zweite Ableitung $f''(x)$, usw. Offenbar ist

$$\begin{aligned} (\sin x)'' &= (\cos x)' = -\sin x, \\ (\cos x)'' &= (-\sin x)' = -\cos x. \end{aligned} \tag{41.4}$$

Sinus und Kosinus sind die einzigen Funktionen, deren zweiter Differentialquotient gleich der ursprünglichen Funktion mit umgekehrtem Vorzeichen ist.

$$\begin{aligned} (\sin x)''' &= -\cos x, \quad & (\cos x)''' &= \sin x, \\ (\sin x)'''' &= +\sin x, \quad & (\cos x)'''' &= \cos x. \end{aligned} \tag{41.5}$$

Um auch die Ableitungen von Ausdrücken der Art $\sin x \cos x$ oder $\tan x = \sin x/\cos x$ bilden zu können, werden die *Differentiationsregeln für Produkte und Quotienten* benötigt. Ist $y = uv$ ein Produkt aus zwei Variablen $u = u(x)$, $v = v(x)$, so wird

$$\begin{aligned} y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = u \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \end{aligned}$$

oder kurz

$$y' = \frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}x} = u \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{41.6a}$$

In gleicher Weise findet man für $y = \frac{u}{v}$

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}. \tag{41.6b}$$

Beispiele:

$$(\sin x \cos x)' = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x; \tag{41.7}$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x. \tag{41.8}$$

Auch die *Ableitungen der Kreisbogenfunktionen* lassen sich jetzt leicht bilden. Nach [40] ist $y = \arcsin x$ die inverse Funktion von $x = \sin y$; der Differentialquotient der letzteren Funktion ist $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$, also wird

$$y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{41.9a}$$

Ebenso findet man für $y = \arccos x$

$$y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{41.9b}$$

Dies folgt auch unmittelbar aus $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Für $y = \arctan x$ folgt aus $x = \tan y$ zunächst $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = 1/\cos^2 y = 1+\tan^2 y = 1+x^2$, also

$$y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}. \tag{41.9c}$$

Für die Ableitung von $y = \operatorname{arccot} x$ folgt auf dieselbe Weise oder unmittelbar aus $\operatorname{arccot} x = \pi/2 - \arctan x$

$$y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{41.9d}$$

In (41.9c, d) ist noch von der Differentiationsregel für Summen Gebrauch gemacht: Für $y = a + mf(x)$ lautet die Ableitung

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a + mf(x+\Delta x) - a - mf(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} = m\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Schließlich sollen noch die *Mittelwerte der Kreisfunktionen Sinus und Kosinus* dargestellt werden.

Unter dem Mittelwert einer stetigen Funktion $f(x)$ im Intervall $(0, x)$ versteht man den Grenzwert des Quotienten

$$\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)+f\left(2\frac{x}{n}\right)+f\left(3\frac{x}{n}\right)+\ \dots\ +f\left(n\frac{x}{n}\right)}{n}$$

für unbegrenzt wachsendes n; man schreibt dafür

$$\overset{x}{\underset{0}{\mathrm{M}}} f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f\left(j\frac{x}{n}\right) : n. \tag{41.10}$$

Der Mittelwert von $\sin x$ im Intervall $(0, x)$ ist also der Grenzwert

$$\overset{x}{\underset{0}{\mathrm{M}}} (\sin x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{x}{n}+\sin 2\frac{x}{n}+\sin 3\frac{x}{n}+\ \dots\ +\sin n\frac{x}{n}}{n}.$$

Der Grenzwert ist mit Hilfe der Summenformel (34.7b)

$$\sin\varphi+\sin(\varphi+\alpha)+\sin(\varphi+2\alpha)+\ \dots\ +\sin[\varphi+(n-1)\alpha]$$

$$=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\varphi+\frac{n-1}{2}\alpha\right)$$

zu bilden. Mit $\varphi = x/n, \alpha = x/n, n\alpha/2 = x/2, \alpha/2 = x/2n$ und

$$\varphi+\frac{n-1}{2}\alpha = \frac{n+1}{n}\frac{x}{2}$$

wird

$$\overset{x}{\underset{0}{\mathrm{M}}} (\sin x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2n}}\sin\dfrac{n+1}{n}\dfrac{x}{2}}{n}.$$

Formt man rechts um,

$$\overset{x}{\underset{0}{\mathrm{M}}} (\sin x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}\sin\frac{n+1}{n}\frac{x}{2} : \frac{\sin\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}},$$

und geht zur Grenze $n \to \infty$ über, so geht $\sin\frac{n+1}{n}\frac{x}{2}$ gegen $\sin\frac{x}{2}$, und der Divisor wird nach (17.1) gleich 1.

Also wird

$$\overset{x}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\sin x) = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \frac{1-\cos x}{x}. \tag{41.11}$$

In gleicher Weise findet man für

$$\overset{x}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\cos x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{x}{n} + \cos 2\frac{x}{n} + \cos 3\frac{x}{n} + \ldots + \cos n\frac{x}{n}}{n}$$

mit der Summenformel (34.7a)

$$\cos\varphi + \cos(\varphi+\alpha) + \cos(\varphi+2\alpha) + \ldots + \cos[\varphi+(n-1)\alpha]$$

$$= \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(\varphi + \frac{n-1}{2}\alpha\right)$$

die Gleichung

$$\overset{x}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\cos x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2n}}\cos\frac{n+1}{n}\frac{x}{2}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}\cos\frac{n+1}{n}\frac{x}{2} : \frac{\sin\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}}.$$

Für $n \to \infty$ strebt der Faktor $\cos\frac{n+1}{n}\frac{x}{2}$ gegen $\cos\frac{x}{2}$, der Divisor gegen 1, also ist

$$\overset{x}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(\cos x) = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{x} = \frac{\sin x}{x}. \tag{41.12}$$

42. Kreisfunktionen und Exponentialfunktion

Ohne auf Einzelheiten der Theorie der Exponentialfunktion einzugehen, sollen die Zusammenhänge zwischen der Exponentialfunktion und den Kreisfunktionen aufgezeigt werden. Die *natürliche Exponentialfunktion* $E(x) = \mathrm{e}^x$, wobei die EULERsche Zahl e bzw. e^x durch die Grenzwerte

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{42.1a}$$

und

$$E(x) = \mathrm{e}^x = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{42.2a}$$

definiert sind, steht in merkwürdigem Zusammenhang mit den Kreisfunktionen. Für den Nachweis dieser Zusammenhänge wird der Satz benötigt, wonach die Exponentialfunktion für jedes komplexe Argument $z = x + \mathrm{i}y$ in eine konvergente Potenzreihe

$$\mathrm{e}(z) = \mathrm{e}^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots \tag{42.3a}$$

entwickelt werden kann.

Außerdem wird die *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion* benötigt, die sich in Form eines Additionstheorems

$$E(z_1)\cdot E(z_2) = \mathrm{e}^{z_1}\cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2} = E(z_1+z_2) \tag{42.4a}$$

schreiben läßt.

Der bequemste Zugang zur EULERschen Zahl e führt über den binomischen Satz. Danach ist

$$(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{p}x^p+\ldots$$
$$+\binom{n}{n-2}x^{n-2}+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n,$$

wobei die $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\ldots$, $\binom{n}{p}$ usf. die Binomialkoeffizienten darstellen.

Ist x ein echter Bruch, so wird in der Reihe für $(1+x)^n$ von einer bestimmten Stelle an jedes Glied kleiner sein als das vorhergehende, so daß man davon für die Berechnung der Zahl e Gebrauch machen kann: Bildet

man aus der obigen Reihe mit $x = 1/n$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n^4}+\ldots$$
$$= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+$$
$$+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+\ldots,$$

so erhält man daraus

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}. \tag{42.1b}$$

Schon die ersten fünf Glieder geben e $= 2{,}71828$ auf fünf Dezimalstellen genau.

Um die Exponentialfunktion e^x in einer nach x fortschreitenden Potenzreihe darzustellen, setzt man in (42.1a) $n = mx$ und erhält

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{mx}\right)^{mx} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx} = \mathrm{e}^x = E(x) \tag{42.2b}$$

oder schließlich die unendliche Reihe

$$E(x) = \mathrm{e}^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots, \tag{42.2c}$$

die als *Exponentialreihe* bezeichnet wird und für jedes endliche x konvergiert.

Mit Hilfe von (42.2c) können sofort auch die *Ableitungen der Exponentialfunktion* gebildet werden: Differenziert man jedes Glied der Reihe, so wird

$$E'(x) = 1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\frac{4x^3}{4!}+\ldots$$
$$= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots = E(x),$$

d. h. die Ableitung der Exponentialfunktion ist die Funktion selbst. — Dabei ist noch von der Differentiationsregel für die Funktion $y = ax^n$ Gebrauch gemacht, wonach $y' = nax^{n-1}$ ist. Die Herleitung dieser Regel erfolgt ebenso wie die der übrigen nach den in [41] angegebenen Regeln.

Ohne auf eine analytische Diskussion einzugehen — der Verlauf von $E(x)$ ist in Abb. 42.1 dargestellt —, sei noch eine wichtige Ungleichung angegeben, die unmittelbar aus der Definition der EULERschen Zahl e folgt. Nach (42.1b) gilt sicher die Ungleichung

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1},$$

gleichgültig welchen positiven Wert k auch hat. Setzt man $k = 1/x$, wobei $x > 0$ sein soll, so wird einmal

$$\mathrm{e} > (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{oder} \quad \mathrm{e}^x > 1+x.$$

Andererseits ist $\mathrm{e} < (1+1/k)^{k+1}$ oder mit $k+1 = 1/\xi$, wobei ξ ein echter positiver Bruch sein soll, also $0 < \xi < 1$,

$$\mathrm{e} < \left(\frac{1}{1-\xi}\right)^{\frac{1}{\xi}} \quad \text{oder} \quad \mathrm{e} < \frac{1}{1-\xi}$$

$$\text{oder} \quad \mathrm{e}^{-\xi} > 1-\xi.$$

Setzt man $-\xi = x$, so wird wieder

$$\mathrm{e}^x > 1+x \quad \text{für} \quad -1 < x < 0.$$

Da die Ungleichung auch für $-\infty < x \leqq -1$ gilt — die linke Seite ist stets positiv, die rechte wird negativ oder verschwindet —, gilt also für jedes positive oder negative Argument die Ungleichung $\mathrm{e}^x > 1+x$.

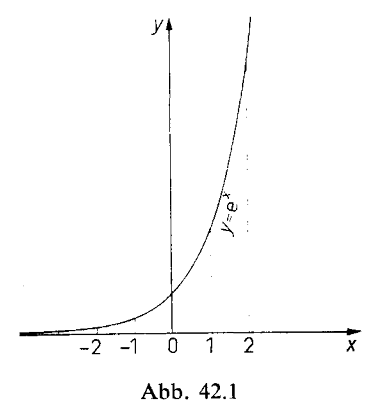


Abb. 42.1

Um die Konvergenz der Reihe (42.2c) zu beurteilen, ist die unendliche Reihe

$$\sum u_n = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

zu betrachten, deren Glieder u_n teils positiv, teils negativ sein mögen. Die zugehörige Reihe

$$\sum |u_n| = |u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$$

der Beträge $|u_n|$ hat dann nur positive Glieder. Nach einem *Satz von* CAUCHY folgt aus der Konvergenz der Betragsreihe $\sum |u_n|$ die Konvergenz der Reihe $\sum u_n$. Konvergiert $\sum |u_n|$, so heißt $\sum u_n$ eine absolut konvergente Reihe. Hinreichend dafür, daß $\sum |u_n|$ absolut konvergiert, ist das *Quotientenkriterium von* D'ALEMBERT: Ist von einem bestimmten Gliede an $\lim\limits_{n\to\infty} |u_{n+1}|/|u_n| \leqq \varepsilon < 1$, so konvergiert die Reihe. Dann ist nämlich

$$|u_{n+1}| < \varepsilon\,|u_n|, \quad |u_{n+2}| < \varepsilon\,|u_{n+1}|, \quad |u_{n+3}| < \varepsilon\,|u_{n+2}| \quad \text{usf.},$$

also

$$|u_{n+1}| < \varepsilon\,|u_n|,$$

$$|u_{n+2}| < \varepsilon\,|u_{n+1}| \quad \text{oder} \quad |u_{n+2}| < \varepsilon^2\,|u_n|,$$

$$|u_{n+3}| < \varepsilon\,|u_{n+2}| \quad \text{oder} \quad |u_{n+3}| < \varepsilon^2\,|u_{n+1}| \quad \text{oder} \quad |u_{n+3}| < \varepsilon^3|u_n|.$$

Damit wird

$$\lim_{n\to\infty} \{|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+|u_{n+3}|+\dots\} \leqq \varepsilon|u_n|+\varepsilon^2|u_n|+\varepsilon^3|u_n|+\dots$$
$$\leqq |u_n|\{\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\dots\}$$
$$\leqq |u_n|\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

wenn noch von der Summe $\varepsilon/(1-\varepsilon)$ der in der Klammer stehenden geometrischen Reihe Gebrauch gemacht wird. Die Reihe $\sum|u_n|$ konvergiert also, wenn von einem bestimmten Glied ab

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqq \varepsilon < 1 \quad \text{ist.} \tag{42.2d}$$

Für die Exponentialreihe (42.2c) ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x^n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0. \tag{42.2e}$$

Also ist die Exponentialreihe (42.2c) für jeden reellen Wert von x eine absolut konvergente Reihe. — Nun ist noch zu zeigen, daß die Exponentialreihe auch für jedes endliche komplexe Argument konvergiert. Auch hier gilt: Eine Reihe $\sum u_n$ mit komplexen Gliedern ist absolut konvergent, wenn die Betragsreihe $\sum|u_n|$ konvergiert, wobei die Reihe $\sum|u_n|$ nur reelle positive Glieder enthält. Ist $u_n = \alpha_n+i\beta_n$, ist also das Glied u_n komplex, so gilt nach den Rechenregeln für komplexe Zahlen

$$|u_n| = \sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}\begin{cases}\geqq |\alpha_n|\\ \geqq |\beta_n|\end{cases}. \tag{42.3b}$$

Umgekehrt gilt nach der Seitenungleichung im Dreieck

$$|\alpha_n|+|\beta_n| \geqq \sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2} \geqq |u_n|. \tag{42.3c}$$

Hier hilft nun folgende Überlegung weiter: Sind bei zwei Reihen $\sum u_n$ und $\sum v_n$ mit reellen positiven Gliedern von einer bestimmten Stelle an die Glieder der einen kleiner als die entsprechenden der anderen, also etwa $v_p < u_p$, so wird die Reihe $\sum v_n$ konvergieren, wenn auch $\sum u_n$ konvergiert. $\sum u_n$ heißt dann eine konvergente Majorante von $\sum v_n$. Nach den obigen Ungleichungen (42.3b) und (42.3c) folgt also aus der Konvergenz von $\sum|u_n|$ die Konvergenz von $\sum|\alpha_n|$ und $\sum|\beta_n|$, d. h. auch die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\alpha_n$ der Realteile und der Reihe $\sum\beta_n$ der Imaginärteile. Umgekehrt folgt aus der absoluten Konvergenz von $\sum\alpha_n$ und $\sum\beta_n$ die absolute

Konvergenz von $\sum u_n$; $\sum |u_n|$ ist eine konvergente Majorante von $\sum |\alpha_n|$ und $\sum |\beta_n|$ und, wenn $\sum |\alpha_n|$ und $\sum |\beta_n|$ konvergieren, $\sum (|\alpha_n|+|\beta_n|)$ eine konvergente Majorante von $\sum |u_n|$. *Also ist die Exponentialreihe*

$$e^z = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots$$

auch für jedes komplexe Argument $z = x+iy$ *eine absolut konvergente Reihe*, womit (42.3a) nachgewiesen ist. Um die *Funktionalgleichung* (42.4a) nachweisen zu können, ist zunächst die *Multiplikation absolut konvergenter Reihen* zu betrachten: Sind $\sum u_i$ und $\sum v_k$ zwei absolut konvergente Reihen, so ist auch die Produktreihe

$$\sum p_n = \sum u_i v_k$$

eine absolut konvergente Reihe. Um die einzelnen Glieder der Reihe

$$\sum p_n = p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n \qquad (42.4b)$$

zu bilden, ordnet man die Produkte in einer Produktentafel z. B. nach Diagonalen an:

	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	p_1	p_2	p_4	p_7	
u_2	p_3	p_5	p_8		usf.
u_3	p_6	p_9			
u_4	p_{10}				

Ist dann an den Faktoren u_i und v_k der n ersten Glieder $p_1, p_2, \ldots, p_n$ dieser Reihe der höchste Index = max (i, k) beteiligt, so ist, wenn $U = \sum |u_i|$ und $V = \sum |v_k|$ die Summen der entsprechenden Betragsreihen sind,

$$|p_1|+|p_2|+\ldots+|p_n| \leqq \sum_{i=1}^{m} |u_i| \sum_{k=1}^{m} |v_k| < U \cdot V, \qquad (42.4c)$$

wenn der Ausdruck in der Mitte alle Glieder der linken Seite enthält. Also ist $\sum |p|$ nach oben begrenzt und somit konvergent.

Jetzt seien die beiden Exponentialreihen

$$E(z_1) = e^{z_1} = \sum \frac{z_1^n}{n!} \quad \text{und} \quad E(z_2) = e^{z_2} = \sum \frac{z_2^n}{n!}$$

betrachtet, wobei jetzt $u_n = \frac{z_1^n}{n!}$ und $v_n = \frac{z_2^n}{n!}$ ist.

Beide Reihen sind für jedes endliche komplexe Argument absolut konvergent. Ihr Produkt hat also den Wert $E(z_1) \cdot E(z_2)$. Multipliziert man symmetrisch, faßt also in der obigen Produkttafel mit Diagonalenanordnung Produkte $u_i v_i$ gleicher Indexsummen in Klammern zusammen, so wird

$$\begin{aligned} \sum u_i \sum v_k = {} & u_1 v_1 \\ & + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \\ & + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) \\ & + \dots \\ & + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1) + \dots, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} p_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu v_{n-\nu} &= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{z_1^\nu}{\nu!} \cdot \frac{z_2^{n-\nu}}{(n-\nu)!} = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} z_1^\nu z_2^{n-\nu} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\nu}^{n} \binom{n}{\nu} z_1^\nu z_2^{n-\nu} = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}. \end{aligned} \tag{42.4d}$$

Demnach ist

$$E(z_1)\, E(z_2) = E(z_1+z_2) \quad \text{oder} \quad \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2},$$

womit die Funktionalgleichung (42.4a) bewiesen ist. Offenbar ist jetzt die Definition und Bezeichnungsweise der Exponentialfunktion vollends gerechtfertigt.

Die Funktionalgleichung (42.4a) bestätigt übrigens, daß die arithmetischen Regeln konsequent auch für die e-Funktion gelten; es ist nämlich

$$(\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{nz}, \tag{42.5}$$

wenn z eine beliebige komplexe Zahl und n ganzzahlig ist.

Zunächst gilt $\mathrm{e}^z \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{2z}$, $\mathrm{e}^z \mathrm{e}^z \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{2z} \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{3z}$ usf., also $(\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{nz}$, wenn n eine positive ganze Zahl ist. Ist n negativ, also $n = -m$, so ist

$$(\mathrm{e}^z)^{-m} = \frac{1}{(\mathrm{e}^z)^m} = \frac{1}{\mathrm{e}^{mz}}.$$

Nach der Funktionalgleichung ist aber $\mathrm{e}^{mz}\mathrm{e}^{-mz} = \mathrm{e}^0 = 1$, also ist $1/\mathrm{e}^{mz} = \mathrm{e}^{-mz}$ und somit gilt

$$(\mathrm{e}^z)^{-m} = \mathrm{e}^{-mz}.$$

Nun zum *Zusammenhang zwischen Exponential- und Kreisfunktionen*. Wählt man in (42.4a) ein rein imaginäres Argument $z = \mathrm{i}y$, so wird daraus

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = 1 + \mathrm{i}y + \frac{(\mathrm{i}y)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}y)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}y)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}y)^5}{5!} + \frac{(\mathrm{i}y)^6}{6!} + \dots,$$

oder nach Trennung in Real- und Imaginärteil

$$e^{iy} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right),$$

woraus durch Vergleich mit den Potenzreihen für Sinus und Kosinus sofort die *erste* EULER*sche Formel*

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{42.6a}$$

folgt. Ebenso findet man aus (42.4a) für $z = -iy$ die *zweite* EULER*sche Formel*

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y. \tag{42.6b}$$

Die Addition und Subtraktion von (42.6a) und (42.6b) gibt noch

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \text{und} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \tag{42.7a, b}$$

d. h. die Kreisfunktionen Sinus und Kosinus können auch durch die Exponentialfunktion definiert werden.

Umgekehrt läßt sich die Exponentialfunktion durch Sinus und Kosinus ausdrücken: Mit $z = x + iy$ wird

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{42.8a}$$

Schreibt man e^z noch in der Form

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y, \tag{42.8b}$$

so erkennt man, daß der Realteil von e^z gleich $e^x \cos y$ und der Imaginärteil gleich $e^x \sin y$ ist.

43. Periodizität der Exponentialfunktion, Anwendungen

Außer den in [42] gezeigten Beziehungen zwischen der Exponentialfunktion und den Kreisfunktionen besteht auch noch ein interessanter Zusammenhang zwischen der EULERschen Zahl e, der Basis der Exponentialfunktion, und der ARCHIMEDIschen Zahl π, die bei den Kreisfunktionen eine wichtige Rolle spielt: Setzt man in (42.6a) für $y = \pi$, so wird wegen $\cos \pi = -1$ und $\sin \pi = 0$ daraus

$$e^{i\pi} = -1. \tag{43.1a}$$

Quadriert man (43.1a), so erhält man nach (42.5)

$$(e^{i\pi})^2 = e^{2i\pi} = 1 \quad \text{oder} \quad e^{\omega} = 1 \quad \text{mit} \quad \omega = 2i\pi. \tag{43.1b}$$

Damit läßt sich jetzt zeigen, daß die Exponentialfunktion $E(z) = e^z$

periodisch mit der Periode $\omega = 2\mathrm{i}\pi$ ist. Bildet man

$$e^{z+\omega} = e^z e^\omega = e \cdot 1 = e^z,$$

so folgt daraus bei n-facher Wiederholung

$$e^{z+n\omega} = e^z e^n = e^z 1^n = e^z,$$

also

$$E(z+n\omega) = e^z. \tag{43.1c}$$

Schließlich ist noch zu zeigen, daß die mit Hilfe der EULERschen Formel mögliche Definition der trigonometrischen Funktionen und die damit eng verbundene *Periodizitätseigenschaft der Exponentialfunktion* interessante Anwendungen bieten und oft zur Abkürzung trigonometrischer Rechnungen beitragen kann. Dazu drei Beispiele:

1. Nach (42.5) gilt

$$(e^{\mathrm{i}\varphi})^n = e^{n\mathrm{i}\varphi}, \tag{43.2a}$$

woraus in bequemer Weise MOIVREs Formel gewonnen werden kann. Die linke Seite ist nach EULERs Formel gleich $(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n$, die rechte gleich $e^{\mathrm{i}\psi}$, wenn $n\varphi = \psi$ gesetzt wird, oder

$$e^{\mathrm{i}\psi} = \cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi.$$

Der Vergleich liefert

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi. \tag{43.2b}$$

2. Die in [34] abgeleiteten *Summenformeln der quasiarithmetischen Reihen*

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi + \cos(\varphi+\alpha) + \cos(\varphi+2\alpha) + \ldots + \cos[\varphi+(n-1)\alpha],\\ \sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha) + \sin(\varphi+2\alpha) + \ldots + \sin[\varphi+(n-1)\alpha]\end{array}\right. \tag{43.3a}$$

können ebenfalls mit Hilfe der EULERschen Formel abgeleitet werden. Bezeichnet man die Summen mit x bzw. y und bildet $z = x + \mathrm{i}y$, also

$$\begin{aligned} z = {} & \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \\ & + \cos(\varphi+\alpha) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\alpha) \\ & \ldots \\ & + \cos[\varphi+(n-1)\alpha] + \mathrm{i}\sin[\varphi+(n-1)\alpha], \end{aligned} \tag{43.3b}$$

so erhält man nach (42.6a)

$$z = e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{\mathrm{i}(\varphi+\alpha)} + e^{\mathrm{i}(\varphi+2\alpha)} + \ldots + e^{\mathrm{i}[\varphi+(n-1)\alpha]}.$$

Schreibt man dafür

$$z = e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{\mathrm{i}\varphi}e^{\mathrm{i}\alpha} + e^{\mathrm{i}\varphi}e^{\mathrm{i}2\alpha} + \ldots + e^{\mathrm{i}\varphi}e^{\mathrm{i}(n-1)\alpha}, \tag{43.3c}$$

so erkennt man, daß die rechte Seite eine geometrische Reihe mit der

Summe

$$z = e^{i\varphi} \frac{e^{ni\alpha}-1}{e^{i\alpha}-1} \tag{43.3d}$$

ist.

Unter einer *geometrischen Reihe* versteht man eine Zahlenfolge der Art

$$a, \quad av, \quad av^2, \quad av^3, \ldots, av^{n-1}, \quad av^n, \ldots,$$

bei der das Verhältnis zweier aufeinanderfolgenden Zahlen gleich v, also konstant ist. Die Summe s von n Gliedern der Reihe ergibt sich auf folgende Weise: Man bildet

$$s = a+av+av^2+ \ldots +av^{n-1}$$

$$\text{und } sv = \quad av+av^2+ \ldots +av^{n-1}+av^n$$

und erhält aus $sv-s = a(v^n-1)$ schließlich

$$s = a\frac{v^n-1}{v-1}.$$

Für die Reihe (43.3c) ist $a = e^{i\varphi}$, $v = e^{i\alpha}$; also wird die Summe der n ersten Glieder

$$s = z = e^{i\varphi} \frac{e^{in\alpha}-1}{e^{i\alpha}-1}.$$

Bringt man (43.3d) in die Form

$$z = \frac{e^{i\varphi} e^{\frac{ni\alpha}{2}}}{e^{\frac{i\alpha}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{ni\alpha}{2}}-e^{-\frac{ni\alpha}{2}}}{e^{\frac{i\alpha}{2}}-e^{-\frac{i\alpha}{2}}}, \tag{43.3e}$$

so läßt sich für den ersten Bruch

$$\frac{e^{i\varphi} e^{\frac{ni\alpha}{2}}}{e^{\frac{i\alpha}{2}}} = e^{i\varphi+\frac{ni\alpha}{2}-\frac{i\alpha}{2}} = e^{i\left[\varphi+(n-1)\frac{\alpha}{2}\right]}$$

schreiben oder nach (42.6a)

$$\cos\left[\varphi+(n-1)\frac{\alpha}{2}\right]+i\sin\left[\varphi+(n-1)\frac{\alpha}{2}\right].$$

Der zweite Bruch ist nach (42.7b) gleich

$$\frac{\sin n\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

also wird aus (43.3e) jetzt

$$z = x+\mathrm{i}y = \left\{\cos\left[\varphi+(n-1)\frac{\alpha}{2}\right]+\mathrm{i}\sin\left[\varphi+(n-1)\frac{\alpha}{2}\right]\right\}\frac{\sin n\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{43.3f}$$

woraus nach Trennung in Real- und Imaginärteil die schon in [34] angegebenen Summen der beiden quasiarithmetischen Reihen folgen:

$$\cos\varphi+\cos(\varphi+\alpha)+\ \dots\ +\cos[\varphi+(n-1)\alpha] = \cos\left[\varphi+(n-1)\frac{\alpha}{2}\right]\cdot\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$\sin\varphi+\sin(\varphi+\alpha)+\ \dots\ +\sin[\varphi+(n-1)\alpha] = \sin\left[\varphi+(n-1)\frac{\alpha}{2}\right]\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

3. Die in [39] mittels der MOIVREschen Formel dargestellten *Lösungen der Kreisteilungsgleichung* $x = \sqrt[m]{+1}$ können mit Hilfe der Periodizität der Exponentialfunktion dargestellt werden: Offenbar ist

$$x = \mathrm{e}^{\frac{k}{m}\omega} \tag{43.4a}$$

eine Lösung, wenn m eine ganze Zahl ist, weil $x^m = \left(\mathrm{e}^{\frac{k}{m}\omega}\right)^m = \mathrm{e}^{k\omega} = 1$ ist mit $\omega = 2\,\mathrm{i}\pi$; setzt man nacheinander $k = 1, 2, 3, \dots, m$, so erhält man die m Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ als Lösungen der Kreisteilungsgleichung. Schreibt man die Lösung nach (42.6a) noch in der Form

$$x = \mathrm{e}^{\frac{k}{m}2\mathrm{i}\pi} = \cos\frac{\mathrm{k}\cdot 2\pi}{m}+\mathrm{i}\sin\frac{\mathrm{k}\cdot 2\pi}{\mathrm{m}}, \tag{43.4b}$$

so ist der Zusammenhang mit (39.15) hergestellt.

44. Kreisfunktionen und Hyperbelfunktionen

Die *Hyperbelfunktionen* sind durch die rationalen Verbindungen

$$\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2} = \sinh x, \qquad \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh x, \tag{44.1a}$$

$$\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \tanh x, \qquad \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}} = \coth x \tag{44.1b}$$

der Exponentialfunktionen e^x und e^{-x} definiert.

Statt der hier benützten Schreibweise, $\sinh x$ = Sinus hyperbolicus und $\cosh x$ = = Kosinus hyperbolicus usf. findet man auch noch $\mathfrak{Sin}\, x$, $\mathfrak{Cos}\, x$, $\mathfrak{Tan}\, x$ und $\mathfrak{Cot}\, x$.

Ohne den Verlauf dieser Funktionen näher zu diskutieren ($\sinh x$ und $\cosh x$ z. B. ergeben sich als Additions- bzw. Subtraktionskurven der Exponentiallinien $y_1 = e^x/2$ und $y_2 = e^{-x}/2$), sollen wieder die *Analogien zu den Kreisfunktionen* aufgezeigt werden.

Zunächst geben die Gleichungen (44.1)

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}, \tag{44.2a,b}$$

und daraus folgt durch Multiplikation

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \tag{44.3}$$

(44.3) zeigt nicht nur die Analogie zu den Kreisfunktionen, sondern erklärt auch die Bezeichnung Hyperbelfunktion: Ebenso wie die Punkte $P(x, y)$ des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$ wegen $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ durch die Parameterdarstellung $x = \cos t$, $y = \sin t$ beschrieben werden können, lassen sich die Punkte $P(x, y)$ (für $x > 0$) der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ wegen $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ parametrisch durch $x = \cosh t$ und $y = \sinh t$ darstellen.

Übereinstimmend mit den Kreisfunktionen sind $\sinh x$, $\tanh x$, $\coth x$ *ungerade*, dagegen ist $\cosh x$ eine *gerade Funktion*. Aus den Definitionsgleichungen (44.1) findet man nämlich unmittelbar

$$\sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x, \tag{44.4a}$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x, \quad \coth(-x) = -\coth x. \tag{44.4b}$$

Auch *Additionstheoreme* lassen sich für die Hyperbelfunktionen angeben. Sind α und β zwei reelle Argumente, so gelten die Formeln:

$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta \pm \cosh \alpha \sinh \beta, \tag{44.5a}$$

$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta \pm \sinh \alpha \sinh \beta, \tag{44.5b}$$

$$\tanh(\alpha \pm \beta) = \frac{\tanh \alpha \pm \tanh \beta}{1 \pm \tanh \alpha \tanh \beta}, \tag{44.5c}$$

$$\coth(\alpha \pm \beta) = \frac{\coth \alpha \coth \beta \pm 1}{\coth \beta \pm \coth \alpha}. \tag{44.5d}$$

Der Nachweis dieser Additionstheoreme ist unmittelbar mit Hilfe der Definitionsgleichungen möglich; so ist zum Beispiel

$$\cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta =$$

$$\frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} = \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}}{2} = \cosh(\alpha + \beta).$$

Für $\alpha = \beta$ folgen aus (44.5) die Funktionen für das doppelte Argument:

$$\sinh 2\alpha = 2 \sinh \alpha \cosh \alpha, \quad \cosh 2\alpha = \cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha, \quad (44.6\text{a, b})$$

$$\tanh 2\alpha = \frac{2 \tanh \alpha}{1+\tanh^2 \alpha}, \quad \coth 2\alpha = \frac{\coth^2 \alpha + 1}{2 \coth \alpha}. \quad (44.6\text{c, d})$$

Ebenso wie die Kreisfunktionen lassen sich auch die Hyperbelfunktionen als rationale Funktionen eines Parameters darstellen. Mit $u = \tanh (t/2)$ wird aus (44.1), wie leicht nachzuweisen ist,

$$\sinh t = \frac{2u}{1-u^2}, \quad \cosh t = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \quad \tanh t = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \coth t = \frac{1+u^2}{2u}. \quad (44.7)$$

Auch eine MOIVREsche *Formel* läßt sich angeben: Ist n eine ganze Zahl, so gelten, wie an Hand der Definitionsgleichungen nachgewiesen werden kann, die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cosh n\alpha + \sinh n\alpha &= (\cosh \alpha + \sinh \alpha)^n, \\ \cosh n\alpha - \sinh n\alpha &= (\cosh \alpha - \sinh \alpha)^n. \end{aligned} \quad (44.8)$$

Mit Hilfe der EULERschen Formel können die Hyperbelfunktionen auch unmittelbar zu den Kreisfunktionen in Beziehung gesetzt werden: Faßt man in

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

z als komplexes Argument $z = x+iy$ auf, so sind zunächst die Kreisfunktionen auch für den komplexen Bereich definiert. Für ein rein imaginäres Argument $z = iy$ folgt daraus

$$\cos iy = \frac{e^y+e^{-y}}{2}, \quad \sin iy = i\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

oder

$$\cos iy = \cosh y, \quad \sin iy = i \sinh y$$

und ebenso

$$\tan iy = i \tanh y, \quad \cot iy = -i \coth y. \quad (44.9)$$

Umgekehrt ergibt sich

$$\begin{aligned} \sinh (iy) &= i \sin y, & \cosh (iy) &= \cos y, \\ \tanh (iy) &= i \tan y, & \coth (iy) &= -\cot y, \end{aligned} \quad (44.10)$$

d. h. abgesehen von konstanten Faktoren stimmen die Hyperbelfunktionen des rein imaginären Arguments iy mit den Kreisfunktionen des reellen Arguments y überein, ebenso die Kreisfunktionen des rein imaginären Arguments iy mit den Hyperbelfunktionen des reellen Arguments y.

Die Gleichungen (44.10) folgen übrigens auch aus den im Komplexen gültigen Potenzreihen

$$e^z = z+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\dots$$

und

$$e^{-z} = 1-\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^5}{5!}+\dots.$$

Gemäß (44.2) findet man daraus zunächst die konvergenten Potenzreihen

$$\cosh z = 1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\dots,$$

$$\sinh z = z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\dots,$$

woraus für ein rein imaginäres Argument $z = iy$ die Reihen

$$\cosh(iy) = 1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\dots = \cos y,$$

$$\sinh(iy) = i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\dots\right) = i\sin y$$

folgen. Ersetzt man noch y durch iy, so wird

$$\cosh(-y) = \cosh y = \cos(iy),$$

$$\sinh(-y) = -\sinh y = i\sin(iy),$$

usf.

Selbstverständlich gelten die *Additionstheoreme* der Kreis- und Hyperbelfunktionen auch *für komplexe Argumente;* daher ist

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+i\beta) &= \sin\alpha\cos i\beta+\cos\alpha\sin i\beta\\ &= \sin\alpha\cosh\beta+i\cos\alpha\sinh\beta.\end{aligned} \tag{44.11a}$$

Ebenso wird

$$\begin{aligned}\sinh(\alpha+i\beta) &= \sinh\alpha\cosh i\beta+\cosh\alpha\sinh i\beta\\ &= \sinh\alpha\cos\beta+i\cosh\alpha\sin\beta.\end{aligned} \tag{44.12a}$$

In gleicher Weise findet man

$$\cos(\alpha+i\beta) = \cos\alpha\cosh\beta - i\sin\alpha\sinh\beta, \tag{44.11b}$$

$$\cosh(\alpha+i\beta) = \cosh\alpha\cos\beta + i\sinh\alpha\sin\beta, \tag{44.12b}$$

$$\tan(\alpha+i\beta) = \frac{\sin 2\alpha + i\sinh 2\beta}{\cos 2\alpha + \cosh 2\beta}, \tag{44.11c}$$

$$\tanh(\alpha+i\beta) = \frac{\sinh 2\alpha + i\sin 2\beta}{\cosh 2\alpha + \cos 2\beta}, \tag{44.12c}$$

$$\cot(\alpha+i\beta) = -\frac{\sin 2\alpha - i\sinh 2\beta}{\cos 2\alpha - \cosh 2\beta}, \tag{44.11d}$$

$$\coth(\alpha+i\beta) = \frac{\sinh 2\alpha - i\sin 2\beta}{\cosh 2\alpha - \cos 2\beta}. \tag{44.12d}$$

Sämtliche Gleichungen in (44.11) und (44.12) folgen einmal aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, zum anderen aus der Darstellung der Kreis- und Hyperbelfunktionen mit Hilfe der Exponentialfunktion. Hier als Beispiel der Nachweis von (44.12b):

$$\cosh(\alpha+i\beta) = \frac{e^{\alpha+i\beta}+e^{-(\alpha+i\beta)}}{2} = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2} +$$

$$+ i\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i} = \cosh\alpha\cos\beta + i\sinh\alpha\sin\beta.$$

Endlich folgt aus der Periode $\omega = 2i\pi$ der Exponentialfunktion e^z, daß auch die *Hyperbelfunktionen im Komplexen periodisch* sind. Ersetzt man in $\sinh(\alpha+i\beta)$ und $\cosh(\alpha+i\beta)$ den Winkel β durch $\beta+2n\pi$ (n eine ganze Zahl), so bleiben die Beziehungen in (44.12a) und (44.12b) unverändert, sinh und cosh sind also im Komplexen mit $2i\pi$ periodisch. Ebenso findet man aus (44.12c) und (44.12d), daß tanh und coth im Komplexen die Periode $i\pi$ aufweisen.

Ebenso wie für die Kreisfunktionen gibt es auch für die Hyperbelfunktionen *Tafeln*[42]. Bei geeigneter Bezifferung lassen sich aber auch die trigonometrischen Tafeln als Hyperbelfunktionstafeln benutzen. Setzt man $\tanh(t/2) = \tan(\varphi/2)$, so bewegt sich, wenn t alle reellen Zahlen durchläuft, $\tanh(t/2)$ von -1 bis $+1$ und φ von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$; die Parameter t und φ

[42] Vgl. z. B. K. HAYASHI: Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument, Neudruck, Berlin 1955. E. JAHNKE und F. EMDE: Tafeln höherer Funktionen, Tables of higher functions, neubearbeitet von F. LÖSCH, 6. Aufl. Teubner Verlag, Stuttgart 1960.

sind also einander umkehrbar eindeutig zugeordnet. φ wird als *Hyperbelamplitude*, oft auch als der GUDERMANNsche *Winkel*[43] von t bezeichnet. Schreibt man die Werte von t neben die Winkel einer trigonometrischen Tafel, so kann man aus ihnen auch alle Hyperbelfunktionen ablesen: Mit $\tanh(t/2) = \tan(\varphi/2)$ erhält man nämlich die Beziehungen

$$\cosh t = \sec\varphi, \quad \sinh t = \tan\varphi, \quad \coth t = \operatorname{cosec}\varphi, \quad \tanh t = \sin\varphi, \tag{44.13}$$

die leicht nachzuweisen sind. Zum Beispiel wird

$$\tan\varphi = \frac{2\tan\frac{\varphi}{2}}{1-\tan^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\tanh\frac{t}{2}}{1-\tanh^2\frac{t}{2}} = \frac{2\sinh\frac{t}{2}\cosh\frac{t}{2}}{\cosh^2\frac{t}{2}-\sinh^2\frac{t}{2}} = \sinh t.$$

45. Fortsetzung der Reihenentwicklungen der trigonometrischen Funktionen, die Reihen der Arcusfunktionen, Konvergenzfragen

Eine erste Herleitung der Potenzreihen für Sinus, Kosinus und Tangens wurde in [18] gegeben. Hier sollen noch einige weitere Möglichkeiten für deren Ableitung aufgezeigt und dann die Konvergenz dieser Reihen beurteilt werden. Schließlich sollen die Potenzreihen der Kreisbogenfunktionen angedeutet werden.

Eine einfache Herleitung der Potenzreihen für Sinus und Kosinus, die sofort auch die Konvergenz beurteilen läßt, bietet die MOIVRE*sche Formel* (39.6a); danach ist

$$\cos x + \mathrm{i}\sin x = \left(\cos\frac{x}{m} + \mathrm{i}\sin\frac{x}{m}\right)^m;$$

ist m eine große Zahl, so ist x/m ein kleiner Winkel und im Grenzfall ($m \to \infty$) wird somit

$$\cos x + \mathrm{i}\sin x = \lim_{m\to\infty}\left(1+\mathrm{i}\frac{x}{m}\right)^m.$$

Nach (42.2b) ist aber

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\mathrm{i}\frac{x}{m}\right)^m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1 + \frac{\mathrm{i}x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{\mathrm{i}x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{\mathrm{i}x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

---

[43] Christoph GUDERMANN, 1798–1852.

eine unendliche konvergente Reihe, aus der man durch Trennen der reellen von den imaginären Gliedern die konvergenten unendlichen Reihen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

erhält.

A u c h d a s M u l t i p l i k a t i o n s t h e o r e m d e r K r e i s f u n k t i o n e n b i e t e t e i n e e l e g a n t e A b l e i t u n g d e r P o t e n z r e i h e n f ü r S i n u s u n d K o s i n u s. Schreibt man in (39.10) für $\varphi = \alpha/n$, wobei α ein beliebiger Winkel und n eine so große Zahl sei, daß mit genügender Genauigkeit für $\cos\varphi = 1$ und $\sin\varphi = \widehat{\varphi} = \widehat{\alpha}/n$ gesetzt werden kann, so läßt sich das $(k+1)$te Glied von (39.10) näherungsweise ersetzen durch

$$\mathrm{i}^k \binom{n}{k} \cos^{n-k}\varphi \sin^k\varphi = \mathrm{i}^k \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot \left(\frac{\widehat{\alpha}}{n}\right)^k$$

$$= \mathrm{i}^k \frac{(n-1)}{n} \frac{(n-2)}{n} \dots \frac{(n-k+1)}{n} \frac{(\widehat{\alpha})^k}{k!}.$$

Je größer nun n gegenüber k ist, um so weniger werden die Brüche $(n-1)/n = 1 - 1/n$ $(n-2)/n = 1-2/n$ usf. von der Einheit abweichen, so daß sie näherungsweise durch 1 ersetzt werden können. Dann entstehen durch Vergleich der reellen und imaginären Anteile die Reihen

$$\cos n\varphi = \cos\alpha = 1 - \frac{\widehat{\alpha}^2}{2!} + \frac{\widehat{\alpha}^4}{4!} - \dots,$$

$$\sin n\varphi = \sin\alpha = \widehat{\alpha} - \frac{\widehat{\alpha}^3}{3!} + \frac{\widehat{\alpha}^5}{5!} - \dots.$$

A m e i n f a c h s t e n e r g e b e n s i c h d i e P o t e n z r e i h e n d e r K r e i s f u n k t i o n e n m i t H i l f e d e r MACLAURIN*schen Reihe*

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + \dots, \tag{45.1}$$

die immer gültig ist, wenn $f(x)$ mit sämtlichen Ableitungen in dem Intervall 0 bis x endlich und stetig bleibt.

(45.1) kann übrigens sehr rasch gewonnen werden: Ist eine Funktion $f(x)$ in einer konvergenten Potenzreihe mit positiven ganzen Exponenten in der Form

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \dots$$

dargestellt, so ergeben sich durch sukzessives Differenzieren die Ableitungen

$$\begin{aligned}
f'(x) &= A_1+2A_2x+3A_3x^2+4A_4x^3+\dots,\\
f''(x) &= 2A_2+2\cdot3\cdot A_3x+3\cdot4\cdot A_4x^2+\dots,\\
f'''(x) &= 2\cdot3\cdot A_3+2\cdot3\cdot4\cdot A_4x^3+\dots,\\
&\text{usf.}
\end{aligned}$$

Für $x = 0$ ergeben sich die konstanten Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ zu

$$\begin{aligned}
f(0) &= A_0, & A_0 &= 0,\\
f'(0) &= A_1, & A_1 &= f'(0),\\
f''(0) &= 2A_2, & A_2 &= \frac{1}{2}f'' = \frac{1}{2!}f''(0),\\
f'''(0) &= 2\cdot3A_3, & A_3 &= \frac{1}{2\cdot3}f'''(0) = \frac{1}{3!}f'''(0),\\
&\text{usw.} & &\text{usw.}
\end{aligned}$$

woraus unmittelbar (45.1) gebildet werden kann.

Als Beispiel sei noch die Gewinnung der Potenzreihe für $\cos x$ dargestellt; es ist $f(0) = \cos 0 = 1$; für die Ableitungen findet man

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\cos x)' = -\sin x; & f'(0) &= 0;\\
f''(x) &= (-\sin x)' = -\cos x; & f''(0) &= -1;\\
f'''(x) &= (-\cos x)' = \sin x; & f'''(0) &= 0;\\
f^{(4)}(x) &= (\sin x)' = \cos x; & f^{(4)}(0) &= 1;\\
&\text{usf.}
\end{aligned}$$

Also wird

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots.$$

Um die *Potenzreihen der Arcusfunktionen* zu gewinnen, geht man am besten von den Ableitungen [vgl. (41.9)]

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\arcsin x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
\frac{d}{dx}(\arccos x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
\frac{d}{dx}(\arctan x) &= \frac{1}{1+x^2},\\
\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) &= -\frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

aus.

Entwickelt man $1/\sqrt{1-x^2}$ nach dem Binomialsatz in eine Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)^2+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}x^4$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}(-x^6)+\ \dots$$

$$= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\ \dots,$$

so ergibt sich durch gliedweise Integration

$$\arcsin x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int x^2\,\mathrm{d}x+\frac{3}{8}\int x^4\,\mathrm{d}x+\frac{5}{16}\int x^6\,\mathrm{d}x+\ \dots$$

$$= x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\ \dots\ . \tag{45.2}$$

Für die *arccos-Reihe* folgt daraus wegen $\arccos x = \pi/2-\arcsin x$ auch

$$\arccos x = \frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{2\cdot 3}-\frac{3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}-\frac{3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}-\ \dots\ . \tag{45.3}$$

Für die *arctan-Reihe* verwandelt man die Ableitung $1/(1+x^2)$ in die Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ \dots$$

und erhält daraus durch gliedweise Integration

$$\arctan x = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int \mathrm{d}x-\int x^2\,\mathrm{d}x+\int x^4\,\mathrm{d}x-\int x^6\,\mathrm{d}x+\ \dots$$

$$= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ \dots \tag{45.4}$$

und wegen $\operatorname{arccot} x = \pi/2-\arctan x$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\ \dots\ . \tag{45.5}$$

Bei der Herleitung der Potenzreihe für die Arcusfunktionen wird von der *Integralformel der Potenzfunktion* x^n Gebrauch gemacht: Die Funktion $F(x)$ heißt ein unbestimmtes Integral von $f(x)$, in Zeichen $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, wenn $\mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x = F'(x) = f(x)$ ist. Soll also $F'(x) = f(x) = x^n$ sein, so muß offenbar $F(x) = \int x^n\,\mathrm{d}x = x^{n+1}/(n+1)$ sein. Streng genommen müßte noch eine Konstante C hinzugefügt werden, weil auch $\mathrm{d}[F(x)+C]/\mathrm{d}x = F'(x) = f(x)$ ist.

Alle vier Reihen (45.2) bis (45.5) gelten, der Definition der Hauptwerte der Arcusfunktionen entsprechend, nur für $-1 \leqq x \leqq 1$.

Die Reihen (45.2) und (45.4) bieten noch eine Möglichkeit zur *Berechnung von* π: Aus (45.2) wird mit $x = 1/2$:

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{2\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{24} + \frac{3}{640} + \frac{5}{7168} + \dots\right), \tag{45.6}$$

und (45.4) liefert für $x = 1$ die LEIBNIZsche Reihe

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots . \tag{45.7}$$

Beide Reihen sind wegen ihrer langsamen Konvergenz zur genauen Berechnung von π wenig geeignet. Indessen lassen sich aus (45.7) durch geschickte Umformung auch Formeln für eine raschere Berechnung von π gewinnen: Setzt man nach EULER z. B. $\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta$, $\tan\alpha = 1/2$, so wird $\beta = \pi/4 - \alpha$ und

$$\tan\beta = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Also ist $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ und nach (45.4) wird

$$\pi = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \dots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} \dots\right). \tag{45.8}$$

Eine weitere, noch rascher konvergierende *Reihe zur Berechnung von* π hat MACHIN angegeben: Wählt man einen Hilfswinkel α der Art, daß $\tan\alpha = 1/5$ ist, so wird $\tan 2\alpha = 5/12$ und $\tan 4\alpha = 120/119$. Da $\tan(\pi/4) = 1$ ist, liegt der Winkel 4α nur wenig über $\pi/4$. Setzt man jetzt $\pi/4 = 4\alpha - \beta$, so wird

$$\tan\beta = \tan(4\alpha - \pi/4) = \frac{\tan 4\alpha - 1}{1 + \tan 4\alpha} = \frac{1}{239},$$

und somit

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4 \arctan \alpha - \arctan \beta$$

$$= 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} \cdots\right). \quad (45.9)$$

(45.9) wird als MACHIN*sche Formel* bezeichnet.

Nun soll noch die Konvergenz der bisher abgeleiteten Potenzreihen untersucht werden. Dafür ist es notwendig, die Bemerkungen in [42] über den *Satz von* CAUCHY und zum *Quotientenkriterium von* D'ALEMBERT zu ergänzen.

Unter einer *Potenzreihe* versteht man eine Reihe der Art

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \quad (45.10)$$

deren Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ Konstante sind und deren Glieder nach steigenden Potenzen des Arguments x fortschreiten.

Ein *erstes Konvergenzkriterium* bietet der *Satz von* ABEL: Liegt für $x = p$ jedes Glied der Reihe (45.10) unterhalb einer endlichen Schranke E, so konvergiert die Reihe *absolut* für jedes $|x| < p$. Der Nachweis ist einfach. Setzt man

$$\frac{x}{p} = q \quad \text{und} \quad |q| = Q, \qquad \text{so gilt}$$

$$|a_n x^n| = |a_n p^n q^n| < EQ^n,$$

d. h. der Betrag des Restes

$$R = a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots + a_{n+p}x^{n+p} + \ldots$$

bleibt unterhalb

$$EQ^{n+1} + EQ^{n+2} + EQ^{n+3} + \ldots.$$

Führt man die Summe dieser geometrischen Reihe ein, so gilt also

$$|R| < \frac{EQ^{n+1}}{1-Q}.$$

Also kann der Betrag von R für ein hinreichend hohes n unterhalb eines positiven Wertes ε gehalten werden, und somit konvergiert die Reihe (45.10) für jedes $|x| < p$.

Potenzreihen der Form (45.10) haben vielfach die Eigenschaft, daß $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ einem endlichen Grenzwert g zustrebt. Bildet man also den D'ALEMBERT*schen Quotienten* der Reihe (45.10), so wird

$$\lim_{\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right| = |gx|.$$

Solange $|gx| = \varepsilon < 1$, also der Grenzwert ein endlicher Bruch ist, wird, wie in [42] nachgewiesen, die Reihe konvergieren. Hier eine interessante Ergänzung: Bildet man aus (45.10) durch gliedweise Differentiation die Potenzreihe

$$P'(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots, \tag{45.11}$$

wobei offenbar $b_0 = a_1$, $b_1 = 2a_2$, $b_2 = 3a_3$ oder allgemein $b_n = (n+1)a_{n+1}$ ist, so hat für die Reihe $P'(x)$ der Quotient

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+2}{n+1}\,\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

für unbegrenzt wachsendes n denselben Grenzwert g. Also gilt auch für die Reihe $P'(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |gx|,$$

d. h. $P'(x)$ konvergiert für $|gx| = \varepsilon < 1$. Somit gilt folgender *Satz:* Hat für eine Potenzreihe $P(x)$ der Quotient $|a_{n+1}/a_n|$ einen endlichen Grenzwert g, so konvergiert sowohl $P(x)$ als auch die Ableitung $P'(x)$ im Intervall $|x| < 1/|g|$ absolut. Damit kann für die meisten der bisher abgeleiteten Potenzreihen die Konvergenz beurteilt werden: Sicher ist, daß die *Potenzreihe für Sinus*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

absolut konvergiert und ebenso deren Ableitung, die *Potenzreihe für Kosinus*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots .$$

Das gleiche gilt für die *Exponentialreihe*

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots .$$

Auch die Reihe für *Arcustangens*

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

ist konvergent; es ist nämlich

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2n+1}}{\dfrac{1}{2n-1}} = 1,$$

also konvergiert die Reihe für arctan x für jedes $|x| < 1$. Ebenso kann die Konvergenz der Reihe für arccos x und arccot x nachgewiesen werden.

Bisher wurde ausschließlich die Konvergenz von Potenzreihen mit reellem Argument untersucht. Noch wichtiger sind *Potenzreihen mit komplexen Argumenten* z,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{45.12}$$

wobei auch die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ komplex sein können. Auch für ein komplexes Argument gilt, wie leicht nachzuweisen ist, der ABEL*sche Satz*, der nur sinngemäß zu übertragen ist: Bleibt jedes Glied von (45.12) für $z = p$ dem Betrage nach unterhalb einer endlichen positiven Schranke E, so konvergiert die Reihe für jedes $|z| < |p|$ absolut. Da alle z, deren Beträge die Ungleichung $|z| \leqq |p|$ erfüllen, Punkte des um den Nullpunkt der komplexen Zahlenebene gezeichneten Kreises vom Radius $|p|$ darstellen, läßt sich für jede Potenzreihe $P(z)$ ein Konvergenzkreis vom Radius $R = |z|$ angeben, in dessen Innerem die Reihe konvergiert. Noch deutlicher bringt dies der CAUCHY*sche Konvergenzkreissatz* zum Ausdruck: Zu jeder Potenzreihe $P(z)$ existiert ein *Konvergenzkreis* vom Radius

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

innerhalb dessen die Potenzreihe konvergiert.

Für den Nachweis wird noch das *Wurzelkriterium von* CAUCHY benötigt: Hinreichend für die absolute Konvergenz einer Reihe $\sum u_n$ ist die Existenz einer Zahl $\varepsilon < 1$ von der Art, daß für fast alle n (d. h. für alle $n > N$) die Wurzel

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \varepsilon < 1$$

st. Ist dagegen für fast alle n

$$\sqrt[n]{|u_n|} \geqq 1,$$

so divergiert die Reihe.

Im ersten Fall ist $|u_n| = \varepsilon^n$; wegen $\varepsilon < 1$ ist aber die geometrische Reihe $\sum \varepsilon^n$ konvergent; sie stellt also eine konvergente Majorante von $\sum |u_n|$ dar, d. h. die Reihe $\sum u_n$ konvergiert absolut.

Die Potenzreihe (45.12) konvergiert also, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot z^n|} = |z| \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

ist oder wenn

$$|z| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

ist.

Bei vielen Potenzreihen existiert sogar der Grenzwert $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$; dann lautet der Ausdruck für R

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Existiert auch der Grenzwert des Quotienten $|a_{n+1}/a_n|$, so kann der Radius R des Konvergenzkreises durch die noch einfachere Formel

$$R = \frac{1}{\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

ersetzt werden.

Zur eingehenden Information über Konvergenzkriterien für unendliche Reihen ist auf die einschlägige Literatur zu verweisen[44].

46. Die unendlichen Produkte für Sinus und Kosinus

In [19] wurden für Sinus und Kosinus die *Produktformeln*

$$\frac{\sin\varphi}{\widehat{\varphi}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\widehat{\varphi}^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{46.1}$$

und

$$\cos\varphi = \prod_{1}^{\infty}\left[1 - \frac{\widehat{\varphi}^2}{(2n-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right] \tag{46.2}$$

angegeben, deren Nachweis noch nachzuholen ist. Dazu ist von dem in [39] abgeleiteten *Multiplikationstheorem der Kreisfunktionen* auszugehen

$$\sin n\varphi = n_1 u^{n-1} v - n_3 u^{n-3} v^3 + n_5 u^{n-5} v^5 - n_7 u^{n-7} v^7 + \ldots, \tag{46.3}$$

$$\cos n\varphi = u^n - n_2 u^{n-2} v^2 + n_4 u^{n-4} v^4 - n_6 u^{n-6} v^6 + \ldots, \tag{46.4}$$

---

[44] H. Dörrie: Unendliche Reihen, Oldenbourg-Verlag München, 1951,
K. Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. Aufl. (Grundlehren der Mathem. Wissenschaften Bd. II), Springer Verlag, Berlin und Heidelberg 1947.
J. Lense: Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik, de Gruyter-Verlag, 3. Aufl., Berlin 1953.
K. Strubecker: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. I, Grundlagen, Oldenbourg Verlag, München 1956.

worin zur Abkürzung $\cos\varphi = u$, $\sin\varphi = v$ gesetzt ist, und die Binomialkoeffizienten in der Kurzform $\binom{n}{1} = n_1$, $\binom{n}{2} = n_2$ usf. geschrieben sind.

Die Ableitung von (46.3) und (46.4) war mit Hilfe der MOIVREschen Formel möglich, das Multiplikationstheorem kann aber durch vollständige Induktion auch allein aus dem Additionstheorem der Kreisfunktionen hergeleitet werden: Zunächst überzeugt man sich an Hand der Formel für die Funktionen mehrfacher Winkel, daß (46.3) und (46.4) für $n = 2, 3, 4, 5$ gültig sind.

Nimmt man an, daß auch ein beliebiger Index n eingesetzt werden darf, so bleibt lediglich zu zeigen, daß die Formeln auch für $m = n+1$ gültig bleiben. Für $m = n+1$ wird aus (46.3) und (46.4) nach dem Additionstheorem

$$\sin m\varphi = \sin(n\varphi+\varphi) = \sin n\varphi\cos\varphi+\cos n\varphi\sin\varphi = Vu+Uv,$$
$$\cos m\varphi = \cos(n\varphi+\varphi) = \cos n\varphi\cos\varphi-\sin n\varphi\sin\varphi = Uu-Vv,$$

wenn noch die Abkürzungen $\sin n\varphi = V$ und $\cos n\varphi = U$ benützt werden. Setzt man U und V nach (46.3) und (46.4) ein, so wird z. B. für $\cos m\varphi$

$$\cos m\varphi = u^{n+1}-n_2u^{n-1}v^2+n_4u^{n-3}v^4-n_6u^{n-5}v^6+\ \dots$$
$$-n_1u^{n-1}v^2+n_3u^{n-3}v^4-n_5u^{n-5}v^6+\ \dots$$

oder

$$\cos m\varphi = u^{m}-n_2u^{m-2}v^2+n_4u^{m-4}v^4-n_6u^{m-6}v^6+\ \dots$$
$$-n_1u^{m-2}v^2+n_3u^{m-4}v^4-n_5u^{m-6}v^6+\ \dots.$$

Faßt man die untereinanderstehenden Glieder gleicher Potenzen in u und v zusammen, so wird

$$\cos m\varphi = u^m-(n_1+n_2)u^{m-2}v^2+(n_3+n_4)u^{m-4}v^4-(n_5+n_6)u^{m-6}v^6+\ \dots.$$

Beachtet man die Rechenregeln für die Binomialkoeffizienten, wonach

$$n_\nu+n_\mu = m_\mu, \quad \text{mit } m = n+1 \text{ und } \mu = \nu+1,$$

also $n_1+n_2 = m_2$, $n_3+n_4 = m_4$ usw. ist,

so wird schließlich

$$\cos m\varphi = u^m-m_2u^{m-2}v^2+m_4u^{m-4}v^4-\ \dots.$$

In gleicher Weise läßt sich die Gültigkeit von (46.3) durch vollständige Induktion nachweisen.

Diese Ableitung hat folgenden Vorteil: Die Additionstheoreme gelten, wie in [44] gezeigt, auch für komplexe Winkel; somit gilt jetzt auch das Multiplikationstheorem für jeden reellen oder komplexen Winkel φ.

Um (46.1) zu beweisen, setzt man in (46.3) für $n\varphi = x$, $v = \sin(x/n)$, $u = 1-v^2$ und nimmt, um die Potenzen von $u = \cos\varphi$ beseitigen zu können, statt n die ungerade Zahl m, so daß $\mu = (m-1)/2$ ganzzahlig ist. Dann wird aus (46.3)

$$\sin x = m(1-v^2)^{\mu}v-m_3(1-v^2)^{\mu-1}v^3+m_5(1-v^2)^{\mu-2}v^5-\ \dots,$$

oder

$$\sin x = m\cdot vP(v),$$

wobei $P(v)$ ein Polynom $(m-1)$ten Grades in v bedeutet.

Nach dem *Fundamentalsatz der Algebra* hat jede algebraische Gleichung n-ten Grades

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

(für $a_n \neq 0$, $n > 0$) mit reellen Koeffizienten im Bereich der komplexen Zahlen n Lösungen, wobei neben jeder komplexen Lösung $x = \xi + \mathrm{i}\eta$ notwendigerweise auch die konjugiert komplexe Lösung $x = \xi - \mathrm{i}\eta$ auftritt. — Im Bereich der komplexen Zahlen kann jedes Polynom n-ten Grades $P_n(x)$ eindeutig in das Produkt von n Linearfaktoren zerlegt werden,

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

wobei $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $P_n(x) = 0$ bedeuten. Für diese Produktdarstellung schreibt man nach EULER abgekürzt

$$P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$

Demnach hat das Polynom $vP(v)$ m Wurzeln $v_1, v_2, \ldots, v_m$, die sich ergeben, wenn $vP(v) = \sin x = 0$ gesetzt wird:

$$x = 0, \quad x = \pm\pi, \quad x = \pm 2\pi, \ldots, \quad x = \pm m\pi$$

oder

$$v = 0, \quad v = \pm \sin \alpha, \ldots, \quad v = \pm \sin \mu\alpha,$$

mit $\alpha = \pi/m$. Somit hat das Polynom $P(v)$ die 2μ verschiedenen Wurzeln

$$\begin{array}{lll} v_1 = \sin \alpha, & v_2 = \sin 2\alpha, \ldots, & v_\mu = \sin \mu\alpha, \\ -v_1, & -v_2, & -v_\mu, \end{array}$$

und $P(v)$ kann als das Produkt der insgesamt 2μ linearen Faktoren

$$\left(1 - \frac{v}{v_1}\right), \quad \left(1 - \frac{v}{v_2}\right), \ldots, \quad \left(1 - \frac{v}{v_\mu}\right),$$

$$\left(1 + \frac{v}{v_1}\right), \quad \left(1 + \frac{v}{v_2}\right), \ldots, \quad \left(1 + \frac{v}{v_\mu}\right)$$

in der Form

$$P(v) = \left(1 - \frac{v^2}{v_1^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{v_2^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{v^2}{v_\mu^2}\right)$$

dargestellt werden. Also wird jetzt

$$\frac{\sin x}{m \sin \frac{x}{m}} = \prod_{j=1}^{\mu} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 j\alpha}\right),$$

mit $\alpha = \pi/m$ und $\mu = (m-1)/2$.

Ist x ein gegebener Winkel, m eine positive ganzzahlige Variable, und wird

$$\frac{-\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 j \frac{\pi}{m}} = f_j(m)$$

gesetzt, so gilt jetzt

$$\frac{\sin x}{m \sin \frac{x}{m}} = \prod_{j=1}^{\mu} [1 + f_j(m)].$$

Die linke Seite hat für $m \to \infty$ den Grenzwert $(\sin x)/x$. Die rechte Seite ist ein TANNERY-*Produkt*, die Funktion $f_j(m)$ hat den Grenzwert $\lim\limits_{m\to\infty} f_j(m) = -x^2/\pi^2 j^2$.

Also läßt sich daraus die *Produktformel*

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{j^2\pi^2}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \ldots \quad (46.5)$$

gewinnen.

Unter einem TANNERY-*Produkt* versteht man das Produkt

$$T_n = [1 + v_1(n)]\,[1 + v_2(n)] \ldots [1 + v_\nu(n)],$$

wenn $v_1(n), v_2(n), \ldots, v_\nu(n)$ folgenden Bedingungen genügen:

1. Jedes Glied $v_j(n)$ ist die Funktion eines ganzzahligen positiven Arguments n und strebt bei festem j und unbegrenzt wachsendem n gegen den endlichen Grenzwert w_j.
2. Bei unbegrenzt wachsendem n nimmt auch der Zeiger ν unbegrenzt zu.
3. Für jeden eine gewisse feste natürliche Zahl a überschreitenden Zeiger j liegt $|v_\nu(n)|$ unterhalb einer endlichen von n unabhängigen Schranke V_j, also $|v_j(n)| \leqq V_j$, so daß die Schrankenreihe $V_{a+1} + V_{a+2} + V_{a+3} + \ldots$ konvergiert.

Für das Produkt gilt, wie ohne Ableitung mitgeteilt sei (vgl. z. B. H. DÖRRIE, a.a.O. S. 275 f.) der *Satz von* TANNERY, wonach T_n gegen den endlichen Grenzwert

$$T = [1 + w_1]\,[1 + w_2]\,[1 + w_3] \ldots$$

strebt.

Die *unendliche Produktformel* (46.2) *für den Kosinus* erhält man auf folgende Weise: Nach (46.5) kann das unendliche Produkt für den Sinus der Argumente $2x$ bzw. x in der Form

$$\frac{\sin 2x}{2x} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{j^2 \varkappa^2}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\sin x}{x} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(2j)^2 \varkappa^2}\right)$$

geschrieben werden, wobei $\varkappa = \pi/2$ gesetzt ist. Bildet man daraus die Produkte

$$P_n = \prod_{j=1}^{2n}\left(1-\frac{x^2}{j^2\varkappa^2}\right) \quad \text{und} \quad p_n = \prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{(2j)^2\varkappa^2}\right),$$

wobei das erste $2n$ und das zweite n Faktoren enthält, und durch Division noch das Produkt

$$\frac{P_n}{p_n} = \prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{(2j-1)\varkappa^2}\right),$$

bei dem in den Nennern nur die Quadrate der ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$ auftreten, so erhält man daraus durch Grenzübergang

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{p_n} = \frac{\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{\sin x}{x}} = \cos x$$

und somit das *unendliche Produkt*

$$\cos x = \prod_{j=1}^{\infty}\left[1-\frac{x^2}{(2j-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right] =$$

$$= \left[1-\frac{x^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{3^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{5^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]\cdots.$$

47. Methoden der Hilfswinkel (Trigonometrische Lösung quadratischer und kubischer Gleichungen, trigonometrische Logarithmierung)

I. Quadratische Gleichungen: Vorweg ist zu bemerken, daß die trigonometrische Auflösung quadratischer Gleichungen mit einer Unbekannten gegenüber der gewöhnlichen arithmetischen Lösung kaum praktische Vorteile bietet. Gleichwohl läßt sich dabei die *Methode der Hilfswinkel* anschaulich darstellen. — Ist die Gleichung

$$x^2+px-q = 0 \tag{47.1}$$

mit $p > 0$, $q > 0$ gegeben, so lauten die Lösungen bekanntlich

$$x = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q} = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+(\sqrt{q})^2}, \tag{47.2}$$

wobei sich die Wurzel als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $p/2$ und $\sqrt{q}$ deuten läßt (Abb. 47.1). Für die trigonometrische Lösung führt man den Hilfswinkel φ ein und setzt $\tan\varphi = \sqrt{q}/(p/2)$; wegen $p > 0$ und $q > 0$ ist dabei $\varphi < 90°$, also wird

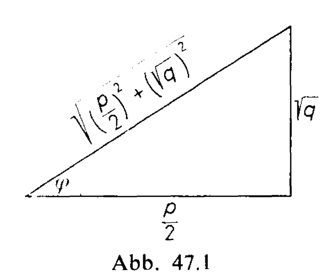


Abb. 47.1

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+(\sqrt{q})^2} = \frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi} = \frac{\frac{p}{2}}{\cos\varphi},$$

und die Unbekannten lauten

$$x = -\sqrt{q}\cot\varphi \pm \frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi} = \pm\sqrt{q}\left(\frac{1\mp\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)$$

oder

$$x_1 = +\sqrt{q}\tan\frac{\varphi}{2}, \quad x_2 = -\sqrt{q}\cot\frac{\varphi}{2}. \tag{47.3}$$

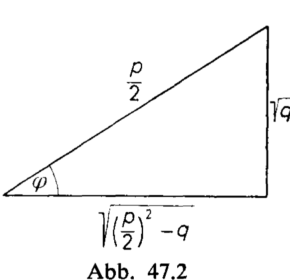


Abb. 47.2

Für $p < 0$ und $q > 0$ ändern sich nur die Vorzeichen von x_1 und x_2.

Ist die Gleichung

$$x^2+px+q = 0 \tag{47.4}$$

gegeben, so erhält man mit $p > 0$, $q > 0$ als Lösung

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-(\sqrt{q})^2}, \tag{47.5}$$

also für $\sqrt{q} < p/2$ zwei reelle Wurzeln und für $\sqrt{q} > p/2$ zwei komplexe Wurzeln. Ist $\sqrt{q} < p/2$, so setzt man für die trigonometrische Lösung $\sin\varphi = \sqrt{q}/(p/2)$ und erhält (Abb. 47.2)

$$x_1 = -\sqrt{q}\tan\frac{\varphi}{2}, \quad x_2 = -\sqrt{q}\cot\frac{\varphi}{2}. \tag{47.6}$$

Ist $\sqrt{q} > p/2$, so bringt man (47.5) in die Form

$$x = -\frac{p}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{(\sqrt{q})^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

und erhält mit $x = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ durch Vergleich der reellen und imaginären Teile

$$r\cos\varphi = -\frac{p}{2}, \quad r\sin\varphi = \sqrt{(\sqrt{q})^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2}, \quad \text{also} \quad \cos\varphi = \frac{-\frac{p}{2}}{\sqrt{q}},$$

und schließlich die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{q}\sin\varphi. \tag{47.7}$$

II. Kubische Gleichungen: Eine große Bedeutung kommt dagegen der trigonometrischen Lösung kubischer Gleichungen mit einer Unbekannten zu[45]. Ist die kubische Gleichung in der Normalform

$$X^3 + AX^2 + BX + C = 0$$

gegeben, so ist sie ebenso wie bei der algebraischen Lösung durch Einführung der neuen Unbekannten $x = X + A/3$ so zu transformieren (HORNER*sches Divisionsverfahren*), daß das zweite Glied verschwindet. Die neue, *reduzierte kubische Gleichung* lautet dann

$$x^3 + px + q = 0. \tag{47.8}$$

Für die Auflösung von (47.8) gilt die *Formel von* CARDANO[46]; mit den Hilfsgrößen

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{q}{2} + \sqrt{R}, \\ b &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{q}{2} - \sqrt{R} \end{aligned}\right\} \tag{47.9a}$$

lauten die drei Wurzeln

$$x_1 = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}, \quad x_{2,3} = -\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{3}\,\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{2}. \tag{47.9b}$$

Durch Addition von $-A/3$ erhält man aus x_1, x_2, x_3 die Wurzeln X_1, X_2, X_3.

Ergänzung: Setzt man in (47.8) statt x den Wert $-x$, so wird daraus $-x^3 - px + q = 0$ oder $x^3 + px - q = 0$. Die beiden Gleichungen, die sich nur im Vorzeichen des absoluten Gliedes unterscheiden, haben also drei entgegengesetzt gleiche Lösungen.

---

[45] In einem Falle, der unter dem Namen *casus irreducibilis* oder *casus goniometricus* bekannt ist, lassen sich die reellen Lösungen nur bei Zuhilfenahme der trigonometrischen Lösung reell darstellen.

[46] GERONIMO CARDANO, ital. Mathematiker, 1501-1576.

Die Natur der Wurzeln ist bedingt durch die Größe

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{47.9c}$$

unter der Quadratwurzel der Formel von CARDANO.

Man unterscheidet drei Fälle:

$R > 0$, dann sind a und b reelle Zahlen, und die Gleichungen (47.9a, b) führen zur Auflösung. Sicher ist $R > 0$ im Falle $p > 0$; ist $p < 0$, so kann R positiv oder negativ werden. Die Lösung ist also für $p \gtrless 0$ zu diskutieren.

Ist $R = 0$ dann ist $a = b = -q/2$, also wird $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$.

Für $R < 0$ sind a und b komplexe Zahlen, d. h. unter den Kubikwurzeln von (47.9b) stehen komplexe Zahlen.

Dieser Fall bereitete vor der Einführung der komplexen Zahlen unüberwindliche Schwierigkeiten und heißt deshalb seither der *Casus irreducibilis.*

Für $R > 0$ ist die trigonometrische Auflösung ebenso wie bei den quadratischen Gleichungen kaum von Vorteil. Wenn sie trotzdem dargestellt wird, dann nur, um die vielfältigen Möglichkeiten der Methode der Hilfswinkel zu zeigen.

Ist $p > 0$, so gilt nach (47.9a)

$$a, b = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} =$$

$$= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left\{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^2}, \tag{47.10a}$$

Abb. 47.3

wobei die Wurzel als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $q/2$ und $(p/3)^{3/2}$ aufgefaßt werden kann (Abb. 47.3). Führt man den Hilfswinkel φ ein,

$$\tan\varphi = \frac{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{q}{2}}, \quad \text{so wird} \quad \frac{q}{2} = \left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cot\varphi \quad \text{und} \quad \sqrt{R} = \frac{\frac{q}{2}}{\cos\varphi}.$$

Also lauten a, b nach (47.9a)

$$a, b = -\frac{q}{2}\left(1 \mp \frac{1}{\cos\varphi}\right) = -\frac{q}{2}\,\frac{\cos\varphi \mp 1}{\cos\varphi} = -\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\cos\varphi \mp 1}{\sin\varphi}$$

oder $\quad a = \left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \tan\frac{\varphi}{2}, \quad b = -\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cot\frac{\varphi}{2}, \quad$ also

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt{\frac{p}{3}}\,\sqrt[3]{\tan\frac{\varphi}{2}}, \quad \sqrt[3]{b} = -\sqrt{\frac{p}{3}}\,\sqrt[3]{\cot\frac{\varphi}{2}}.$$

Damit wird nach (47.9b)

$$x_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\sqrt[3]{\tan\frac{\varphi}{2}} - \sqrt[3]{\cot\frac{\varphi}{2}}\right\}.$$

Um x_1 in Produktform zu erhalten, setzt man noch

$$\sqrt[3]{\tan\frac{\varphi}{2}} = \tan\lambda, \quad \text{also} \quad \sqrt[3]{\cot\frac{\varphi}{2}} = \cot\lambda,$$

und erhält

$$x_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}(\tan\lambda - \cot\lambda) = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\lambda.$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die beiden anderen Wurzeln, so daß die Lösungen lauten

$$\begin{aligned} x_1 &= -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\lambda, \\ x_2 &= \sqrt{\frac{p}{3}}(\cot 2\lambda + \mathrm{i}\sqrt{3}\,\operatorname{cosec} 2\lambda), \\ x_3 &= \sqrt{\frac{p}{3}}(\cot 2\lambda - \mathrm{i}\sqrt{3}\,\operatorname{cosec} 2\lambda). \end{aligned} \tag{47.10b}$$

Für $p < 0$ erhält man mit Hilfe des Ansatzes

$$\sin\varphi = \frac{\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{+\frac{q}{2}}, \quad \sqrt[3]{\tan\frac{\varphi}{2}} = \tan\lambda$$

die Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \mp 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{cosec} 2\lambda, \\ x_2 &= \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\operatorname{cosec} 2\lambda + \mathrm{i}\sqrt{3}\cot 2\lambda\right), \\ x_3 &= \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\operatorname{cosec} 2\lambda - \mathrm{i}\sqrt{3}\cot 2\lambda\right), \end{aligned} \tag{47.11}$$

wobei die oberen Vorzeichen für $q > 0$, die unteren für $q < 0$ gelten.

Ist $R < 0$, wobei stets $p < 0$ sein muß, so können die drei reellen Wurzeln nur trigonometrisch bestimmt werden. Setzt man in (47.9a)

$$\begin{aligned} a &= -\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{q}{2}-\mathrm{i}\sqrt{-\left\{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right\}} \\ &= r(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi), \\ b &= -\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{q}{2}+\mathrm{i}\sqrt{-\left\{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right\}} \\ &= r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi), \end{aligned} \tag{47.12a}$$

d. h. schreibt man die komplexen Zahlen a und b in der kanonischen Form, so findet man aus dem Vergleich der reellen und imaginären Anteile

$$r\cos\varphi = -\frac{q}{2}, \quad r\sin\varphi = \sqrt{-\left\{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right\}}$$

und

$$r^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3, \quad r = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Der Hilfswinkel φ ist eindeutig bestimmt, weil auch das Vorzeichen von $\sin\varphi$ bekannt ist.

Für die Kubikwurzeln aus a und b läßt sich nach dem *Satz von* Moivre schreiben

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a} &= r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{3}\right) = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{3}\right), \\ \sqrt[3]{b} &= r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{3}\right) = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{3}\right), \end{aligned}$$

und somit lauten nach (47.9a,b) die Unbekannten

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \quad x_{2,3} = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3} \mp \sqrt{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\sin\frac{\varphi}{3}. \tag{47.12b}$$

(47.12b) kann noch umgeformt werden. Wegen $\cos 60° = 1/2$ und $\sin 60° = \sqrt{3}/2$ ist

$$\cos\left(60° \pm \frac{\varphi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{3} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\varphi}{3}.$$

Setzt man noch

$$\cos 3\lambda = -\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{und} \quad m = \sqrt{-\frac{p}{3}}, \tag{47.12c}$$

so lassen sich die Unbekannten in der Form

$$x_1 = 2m\cos\lambda, \quad x_2 = -2m\cos(60°+\lambda), \quad x_3 = -2m\cos(60°-\lambda)$$

schreiben, oder symmetrisch angeordnet

$$x_1 = 2m\cos\lambda, \quad x_2 = 2m\cos(120°+\lambda), \quad x_3 = 2m\cos(240°+\lambda). \tag{47.12d}$$

III. Trigonometrische Logarithmierung. Die bei der trigonometrischen Auflösung quadratischer und kubischer Gleichungen gezeigten Methoden der Hilfswinkel leisten auch bei anderen Rechenaufgaben[47], insbesondere bei der Aufbereitung von Formeln für die logarithmische Rechnung gute Dienste. Hierzu einige Beispiele.

1. Ist aus $\lg a$ und $\lg b$ der Wert $\lg(a+b)$ zu bilden, so erhält man mit dem Ansatz

$$b = a\tan^2\varphi, \quad a+b = a + a\tan^2\varphi = \frac{a}{\cos^2\varphi}, \quad \tan^2\varphi = \frac{b}{a}$$

für die logarithmische Rechnung:

$$\lg(a+b) = \lg a - 2\lg\cos\varphi, \quad \text{mit} \quad \lg\tan\varphi = \frac{1}{2}(\lg b - \lg a).$$

Bildet man aus $\lg a$, $\lg b$ die Numeri und schlägt zu $(a+b)$ den Logarithmus auf, so hat man drei Tafelwerte aufzuschlagen, im Falle des Hilfswinkels dagegen nur zwei, die überdies noch auf derselben Seite stehen! Der Leser mag sich auch für die folgenden Aufgaben die Anzahl der Tafelablesungen und -blätterungen überlegen.

[47] Vgl. auch den Abschnitt [48] über goniometrische Gleichungen.

2. Sind $\lg a$ und $\lg b$ gegeben $(a > b)$ und ist $\lg(a-b)$ gesucht, so setzt man $b = a\sin^2\varphi$ und erhält $a-b = a\cos^2\varphi$; in Logarithmen:

$$\lg(a-b) = \lg a + 2\lg\cos\varphi, \quad \text{mit} \quad \lg\sin\varphi = \frac{1}{2}(\lg b - \lg a).$$

3. Ist $\lg\dfrac{a-b}{a+b}$ gesucht, so führt der Ansatz

$$b = a\tan\varphi, \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{a-a\tan\varphi}{a+a\tan\varphi} = \frac{1-\tan\varphi}{1+\tan\varphi} = \frac{\tan 45^\circ - \tan\varphi}{1+\tan 45^\circ\tan\varphi}$$
$$= \tan(45^\circ - \varphi)$$

zum Ziel; es wird

$$\lg\frac{a-b}{a+b} = \lg\tan(45^\circ-\varphi), \quad \lg\tan\varphi = \lg b - \lg a.$$

Die drei Aufgaben lassen sich auch in geschlossener Form durch den Ansatz $b = a\cos 2\varphi$, $\cos 2\varphi = b/a$ lösen; dann wird

$$a+b = a+a\cos 2\varphi = a(1+\cos 2\varphi) = 2a\cos^2\varphi,$$
$$a-b = a-a\cos 2\varphi = a(1-\cos 2\varphi) = 2a\sin^2\varphi,$$
$$\frac{a-b}{a+b} = \tan^2\varphi,$$

so daß sich für die logarithmische Rechnung ergibt:

$$\lg(a+b) = \lg 2 + \lg a + 2\lg\cos\varphi,$$
$$\lg(a-b) = \lg 2 + \lg a + 2\lg\sin\varphi,$$
$$\lg\frac{a-b}{a+b} = 2\lg\tan\varphi, \quad \text{mit} \quad \lg\cos 2\varphi = \lg b - \lg a.$$

Auch der Ausdruck $\lg\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$ läßt sich nach diesem Ansatz berechnen:

$$\lg\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \lg\tan\varphi.$$

Diese Überlegungen sind vor allem bei der logarithmischen Berechnung ebener und sphärischer Dreiecke nach den Halbwinkelsätzen, den MOLLWEIDEschen und den NEPERschen Gleichungen von Bedeutung.

4. Die Einführung eines Hilfswinkels ist auch zweckmäßig bei der Seitenberechnung nach dem Pythagoräischen Satz: Ist die Hypotenuse c aus den Katheten a, b zu berechnen, $c =$

$= \sqrt{a^2+b^2}$, so erhält man mit dem Ansatz $b = a \tan\varphi$ die Hypotenuse zu

$$c = \frac{a}{\cos\varphi} = \frac{b}{\sin\varphi}.$$

Sind a und c gegeben und ist die Kathete $b = \sqrt{c^2-a^2}$ gesucht, so ergibt sich mit $a = c\cos\varphi$ die Kathete zu $b = a\tan\varphi = c\sin\varphi$.

5. Auch der *Kosinussatz des ebenen Dreiecks* läßt sich durch Einführung eines Hilfswinkels φ für eine bequeme logarithmische Rechnung aufbereiten. Ist die Seite a aus

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

zu berechnen, so drückt man $\cos\alpha$ durch $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$ aus und erhält

$$a^2 = b^2+c^2-4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}+2bc = (b+c)^2-4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Führt man noch $4bc\cos^2\frac{\alpha}{2} = (b+c)^2\sin^2\varphi$ ein, also

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{4bc}{(b+c)^2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\sqrt{bc}}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2},$$

so wird

$$a^2 = (b+c)^2(1-\sin^2\varphi) \quad \text{und} \quad a = (b+c)\cos\varphi.$$

Für die logarithmische Rechnung erhält man

$$\lg a = \lg(b+c)+\lg\cos\varphi,$$

mit $$\lg\sin\varphi = \lg 2+\frac{1}{2}\lg b+\frac{1}{2}\lg c+\lg\cos\frac{\alpha}{2}-\lg(b+c).$$

6. Schließlich sollen noch der *Seiten- und Winkelkosinussatz der sphärischen Trigonometrie* in eine bequeme logarithmierbare Form gebracht werden. Im *Seitenkosinussatz* (vgl. 58.2)

$$\cos a = \cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha$$

setzt man im zweiten Summanden

$$\sin b\cos\alpha = \cos b\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

und erhält

$$\cos a = \cos b\left(\cos c+\sin c\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) = \frac{\cos b\sin(\varphi+c)}{\sin\varphi},$$

mit $$\tan\varphi = \frac{\cot b}{\cos\alpha}.$$

In gleicher Weise kann der *Winkelkosinussatz* (vgl. 60.1)

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a$$

durch den Ansatz

$$\sin\beta\cos a = \cos\beta\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

in die Form

$$\cos\alpha = \cos\beta\,\frac{\sin(\gamma-\varphi)}{\sin\varphi}$$

gebracht werden, wobei der Hilfswinkel φ aus $\tan\varphi = \cot\beta/\cos a$ zu bestimmen ist.

48. Goniometrische Gleichungen

Auch dieser Abschnitt behandelt ein Randgebiet der Algebra, zeigt aber sehr instruktive Anwendungen der trigonometrischen Formeln und Sätze[48].

Eine *goniometrische Gleichung* liegt vor, wenn die Unbekannten als Argumente trigonometrischer Funktionen auftreten. Für die Auflösung derartiger Gleichungen wird im allgemeinen sowohl die Algebra als auch die Trigonometrie benötigt. Um etwa die Gleichung $\sin^2\alpha-(3/2)\sin\alpha+1/2 = 0$ nach α aufzulösen, ist zunächst $\sin\alpha$ auf algebraischem Wege als Unbekannte einer quadratischen Gleichung zu bestimmen. Die Lösungen lauten $\sin\alpha = 1/2$ und $\sin\alpha = 1$. Daraus α zu bestimmen, ist eine trigonometrische Aufgabe. Bei Beschränkung auf Winkel im 1. Quadranten lauten hier die Lösungen $\alpha = 30°, 90°$.— Ebenso wie in der Algebra ist zu empfehlen, die Lösungen zur Kontrolle in die ursprüngliche Gleichung einzusetzen.

Es gelingt kaum, für die Auflösung trigonometrischer Gleichungen allgemein gültige Regeln oder zweckmäßige Methoden anzugeben; die folgenden Beispiele werden aber zeigen, daß man häufig mit Vorteil von den goniometrischen Formeln und mitunter auch von Hilfswinkeln Gebrauch machen kann.

Am einfachsten sind Gleichungen mit einer Unbekannten, und hiervon wieder die linearen Gleichungen mit einer Funktion des unbekannten Winkels aufzulösen, also Gleichungen der Form

$$aF(\alpha)+b = 0, \tag{48.1}$$

---

[48] Hinzu tritt, daß dieser Gegenstand in den Lehrbüchern der Mathematik, wenn überhaupt, dann nur sehr kurz behandelt wird.

wobei a und b bekannte konstante Größen sind. Als Lösungen von $F(\alpha) = -b/a = m$ erhält man zunächst zwei zwischen 0° und 360° (0 und 2π) liegende Winkel α_1 und α_2; aber auch die Winkel $\alpha_1 \pm k \cdot 360°$, $\alpha_2 \pm k \cdot 360°$ erfüllen, wenn k eine ganze Zahl ist, die Gleichung (48.1). Im einzelnen sind die Lösungen wie folgt zu diskutieren:

1. Ist $F(\alpha) = \sin\alpha = m$ gegeben, so gibt es Lösungen nur, wenn $-1 \leqq m \leqq 1$ ist.

Ist $m > 0$, so muß $0 < \alpha < 180°$ sein, d. h. ist α_1 der (spitze) Tafelwert, so lauten die Lösungen $\alpha_1 \pm k \cdot 360°$ und $180° - \alpha_1 \pm k \cdot 360°$, wobei k (ebenso wie im folgenden) eine ganze Zahl sein muß.
Ist $m < 0$, so lauten die Lösungen $-\alpha_1 \pm k \cdot 360°$ und $180° + \alpha_1 \pm k \cdot 360°$.

2. Ist $F(\alpha) = \cos\alpha = m$ gegeben und ist die Bedingung $-1 \leqq m \leqq 1$ erfüllt, so lauten die Lösungen

$$\text{für } m > 0: \quad \alpha_1 \pm k \cdot 360° \quad \text{und} \quad -\alpha_1 \pm k \cdot 360°;$$

$$\text{für } m < 0: \quad 180° + \alpha_1 \pm k \cdot 360°, \quad 180° - \alpha_1 \pm k \cdot 360°.$$

3. Für $F(\alpha) = \tan\alpha = m$, wobei m alle Werte $(-\infty \leqq m \leqq +\infty)$ annehmen kann, lauten die Lösungen

$$\text{für } m > 0: \quad \alpha_1 \pm k \cdot 180° \quad \text{und} \quad 180° + \alpha_1 \pm k \cdot 180°$$

$$\text{für } m < 0: \quad -\alpha_1 \pm k \cdot 180° \quad \text{und} \quad 180° - \alpha_1 \pm k \cdot 180°.$$

In gleicher Weise sind die Lösungen zu diskutieren, wenn $\cot\alpha$, $\sec\alpha$ oder $\operatorname{cosec}\alpha$ gegeben sind.

Eine quadratische Gleichung mit einer Funktion des unbekannten Winkels der Form

$$a \sin^2\alpha + b \sin\alpha + c = 0 \tag{48.2}$$

ist zunächst nach $\sin\alpha$ aufzulösen:

$$\sin\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Soll diese Gleichung eine reelle Lösung haben, dann muß

$$|2a| \geqq -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\text{oder } 4a^2 + 4ab + b^2 > b^2 - 4ac, \quad 4a(a+b+c) > 0$$

sein. Weiter muß $\sqrt{b^2 - 4ac}$ reell sein, d. h. die zweite Bedingung für die Existenz reeller Lösungen lautet $b^2 - 4ac > 0$.

Somit ergeben sich folgende Lösungen: Ist $a+b+c > 0$, so gibt es für

$b^2-4ac > 0$: Vier Werte für α,

$b^2-4ac = 0$: Zwei Werte für α,

$b^2-4ac < 0$: Keinen reellen Wert für α.

In ähnlicher Weise sind quadratische und Gleichungen höheren Grades in $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ und $\cot\alpha$ zu lösen und zu diskutieren.

Für die Auflösung gemischter trigonometrischer Gleichungen, die die Unbekannte in verschiedenen Funktionen oder Argumenten enthalten, können, wie schon bemerkt, keine allgemein gültigen Regeln angegeben werden. Dazu einige Beispiele. Gleichungen des Typs

$$2\cos 2\alpha - 4\cos\alpha + 3 = 0 \tag{48.3}$$

können vielfach so umgeformt werden, daß nur noch eine Funktion des einfachen Winkels übrig bleibt: Setzt man in (48.3) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, so erhält man eine in $\cos\alpha$ quadratische Gleichung

$$4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1 = 0,$$

die nach $\cos\alpha$ auflösbar ist.

Nicht immer ist eine Umformung notwendig, zum Beispiel tritt bei der Gleichung

$$\sin\alpha\left(\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{48.4}$$

der einfache Satz in den Vordergrund, daß ein Produkt aus zwei oder mehr Faktoren dann und nur dann Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist. Man findet also sofort die Lösungen $\sin\alpha = 0$, $\cos 2\alpha = 1/2$.

Ebenso ist zu verfahren, wenn eine Gleichung dieses Typs mehrere Winkel enthält.

Lineare Gleichungen mit mehreren Funktionen des unbekannten Winkels, etwa der Form

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = c, \tag{48.5}$$

wobei a, b und c gegebene Konstanten sind, können auf zweierlei Arten nach α aufgelöst werden. Die Umformung mittels $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ führt auf den Ausdruck

$$\sin\alpha = bc \pm \frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},$$

woraus $\sin\alpha$ und schließlich α bestimmt werden kann. Ebenso hätte man $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ einführen und dann $\cos\alpha$ bestimmen können. Die

Lösungswege sind unsymmetrisch und rechentechnisch wenig befriedigend. Weitaus eleganter ist es, (48.5) trigonometrisch durch Einführung eines Hilfswinkels zu lösen: Wählt man einen Hilfswinkel φ derart, daß $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, also $\tan\varphi = b/a$ ist, wobei für die Hilfsgröße $r = \sqrt{a^2+b^2}$ gilt, so wird aus (48.5)

$$r(\cos\varphi\cos\alpha+\sin\varphi\sin\alpha) = c$$

oder

$$\cos(\alpha-\varphi) = c/r = c\cos\varphi/a = c\sin\varphi/b.$$

Da der Hilfswinkel φ eindeutig bestimmt ist — das Gleichungspaar $\sin\varphi = b/r$, $\cos\varphi = a/r$ gibt nur einen Winkel kleiner 360° — liefert $\cos(\alpha-\varphi)$ zwei entgegengesetzt gleiche Winkel $(\alpha-\varphi)$ und somit zwei Werte für α. Man erkennt, daß die Gleichung (48.5) nur dann reelle Lösungen hat, wenn $|c| \leqq r$ bzw. $c^2 \leqq a^2+b^2$ ist.

Einen Ausdruck der Form $a\cos\alpha+b\sin\alpha$ nennt man auch *Kreisbinom*, und die Aufgabe, die Gleichung (48.5) nach α aufzulösen, kann dementsprechend so formuliert werden: Gesucht ist der Winkel α, für den das Kreisbinom einen gegebenen Wert c annimmt. Neben der Auflösung des Kreisbinoms nach dem Winkel α ist mitunter noch die Aufgabe von Bedeutung, die *Extremwerte des Kreisbinoms*, also die Maxima und Minima der Funktion $y = a\cos\alpha+b\sin\alpha$ zu bestimmen. Die Aufgabe kann trigonometrisch ohne Zuhilfenahme der Differentialrechnung gelöst werden. Mit $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$ erhält man

$$y = r\cos(\alpha-\varphi).$$

y wird ein Maximum oder Minimum, je nachdem $\alpha-\varphi$ ein gerades oder ungerades Vielfaches von 180° (π) ist, d. h. wenn $\alpha = \varphi\pm n\cdot 2\pi$ oder $\alpha = \varphi+\pi\pm n\cdot 2\pi$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ist.

Die homogene quadratische Gleichung zwischen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ der Form

$$a\cos^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\sin^2\alpha = d \tag{48.6}$$

kann durch Einführung des Winkels 2α

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

in die Form

$$(a-c)\cos 2\alpha+b\sin 2\alpha = 2d-a-c$$

gebracht und wie (48.5) aufgelöst werden.

Auch die Extrema eines Ausdruckes der Form

$$y = a\cos^2\alpha+b\cos\alpha\sin\alpha+c\sin^2\alpha$$

können in einfacher Weise bestimmt werden. Setzt man $\theta = 2\alpha$, $\cos^2\alpha = (1+\cos\theta)/2$, $\sin^2\alpha = (1-\cos\theta)/2$, $\cos\alpha\sin\alpha = (1/2)\sin\theta$, so wird daraus

$$y = \frac{a+c+(a-c)\cos\theta+b\sin\theta}{2} = \frac{S+D\cos\theta+b\sin\theta}{2},$$

mit $S = a+c$, $D = a-c$. Da S konstant ist, genügt es, die Extrema von $D\cos\theta+b\sin\theta$ anzugeben. Das Maximum $E = \sqrt{D^2+b^2}$ tritt an der Stelle $\theta = 2\nu$, das Minimum $(-E)$ an der Stelle $\theta = 2\nu+\pi$ ein, wobei der Hilfswinkel 2ν durch

$$\cos 2\nu = D/E, \quad \sin 2\nu = b/E \quad \text{oder} \quad \tan 2\nu = \frac{b}{D}$$

gegeben ist. Folglich erreicht y sein Maximum $(S+E)/2$ an der Stelle $\alpha = \theta/2 = \nu$, sein Minimum $(S-E)/2$ an der Stelle $\alpha = \theta/2 = \nu+\pi/2$. Die Argumente ν und $\nu+\pi/2$ der Extrema endlich lassen sich noch unmittelbar durch die Koeffizienten des Ausdrucks für y darstellen; es ist

$$\tan\nu = \frac{\sin 2\nu}{1+\cos 2\nu} = \frac{b/E}{1+D/E} = \frac{b}{D+E}$$

und

$$\tan(\nu+\pi/2) = -\cot\nu = -\frac{1}{\tan\nu} = -\frac{D+E}{b}.$$

Erweitert man rechts mit $(D-E)/(D-E)$ und beachtet, daß $E^2-D^2 = b^2$, so wird schließlich

$$\tan(\nu+\pi/2) = \frac{b}{D-E}.$$

Auch die lineare Gleichung

$$a\tan\alpha+b\cot\alpha = 0$$

gehört zu dieser Gruppe: Mit $\sin\alpha\cos\alpha$ multipliziert lautet sie

$$a\sin^2\alpha+b\cos^2\alpha-c\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

und ist wie (48.6) aufzulösen.

Die Auflösung von Gleichungen, die den gesuchten Winkel nicht direkt, sondern in Zusammensetzungen enthalten, soll an zwei Beispielen erläutert werden. Ist α aus

$$\sin(\alpha+\lambda)+c\sin\alpha = 0 \tag{48.7a}$$

zu bestimmen, wobei λ und c bekannt sind, so gibt die Division durch $\sin\alpha$ zunächst

$$\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\sin\alpha} = -c,$$

und durch korrespondierende Addition und Subtraktion folgt daraus

$$\frac{\sin(\alpha+\lambda)+\sin\alpha}{\sin(\alpha+\lambda)-\sin\alpha} = \frac{-c+1}{-c-1} = \frac{c-1}{c+1}.$$

Die linke Seite mit Hilfe der Verwandlungsformeln umgeformt gibt

$$\frac{2\sin\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}\right)\cos\frac{\lambda}{2}}{2\cos\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}\right)\sin\frac{\lambda}{2}}=\frac{\tan\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}\right)}{\tan\frac{\lambda}{2}}=\frac{c-1}{c+1}$$

und schließlich

$$\tan\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}\right)=\frac{c-1}{c+1}\tan\frac{\lambda}{2}, \tag{48.7b}$$

woraus $(\alpha+\lambda/2)$ und auch α bestimmt werden können.

In ähnlicher Weise ist α aus

$$\tan(\alpha+\lambda)-c\tan\alpha=0 \tag{48.8a}$$

zu bestimmen. Bildet man daraus

$$\frac{\tan(\alpha+\lambda)}{\tan\alpha}=c$$

und mit Hilfe der korrespondierenden Addition und Subtraktion

$$\frac{\tan(\alpha+\lambda)+\tan\alpha}{\tan(\alpha+\lambda)-\tan\alpha}=\frac{\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\alpha+\lambda)}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\alpha+\lambda)}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$=\frac{\sin(2\alpha+\lambda)}{\sin[(\alpha+\lambda)-\alpha]}=\frac{c+1}{c-1},$$

so erhält man daraus

$$\sin(2\alpha+\lambda)=\frac{c+1}{c-1}\sin\lambda. \tag{48.8b}$$

Nach diesen Beispielen wird es genügen, für w e i t e r e g o n i o m e t r i s c h e G l e i c h u n g e n dieser Art die Lösungen anzugeben. Ist α aus

$$a\sin(\alpha+\lambda)+b\sin(\alpha+\mu)=0 \tag{48.9a}$$

zu bestimmen, so erhält man

$$\tan\left(\alpha+\frac{\lambda+\mu}{2}\right)=\frac{b-a}{b+a}\tan\frac{\lambda-\mu}{2}, \tag{48.9b}$$

woraus $\alpha+(\lambda+\mu)/2$ und auch α berechnet werden kann.

Die Auflösung von

$$a\sin(\alpha+\lambda)+b\sin(\mu-\alpha)=0 \tag{48.10a}$$

nach α gibt

$$\tan\left(\alpha+\frac{\lambda-\mu}{2}\right) = \frac{b+a}{b-a}\tan\frac{\lambda+\mu}{2}. \tag{48.10b}$$

Die Lösung (48.10b) von (48.10a) folgt unmittelbar aus der von (48.9a), wenn man beachtet, daß $b\sin(\mu-\alpha) = -b\sin(\alpha-\mu)$, also in (48.9a) und (48.9b) nur b durch $-b$ und μ durch $-\mu$ zu ersetzen sind.

Auch die Gleichung

$$a\cos(\alpha+\lambda)+b\sin(\alpha-\mu) = 0 \tag{48.11a}$$

läßt sich auf (48.9a) zurückführen, wenn man $90°+\lambda$ statt λ und $-\mu$ statt μ setzt; die Lösung lautet

$$\tan\left(\alpha+\frac{90°+\lambda-\mu}{2}\right) = \frac{b-a}{b+a}\tan\frac{90°+\lambda+\mu}{2}. \tag{48.11b}$$

Ist α aus

$$\cos(\alpha+\lambda) = m\cos(\alpha-\lambda) \tag{48.12a}$$

zu bestimmen, so folgt als Lösung

$$\cot\left(\alpha+\frac{\lambda+\mu}{2}\right) = \frac{1+m}{1-m}\tan\frac{\lambda-\mu}{2}, \tag{48.12b}$$

und für

$$\tan(\alpha+\lambda) = m\tan(\alpha+\mu) \tag{48.13a}$$

lautet die Lösung

$$\sin(2\alpha+\lambda+\mu) = \frac{1+m}{1-m}\sin(\mu-\lambda). \tag{48.13b}$$

Auch die Auflösung von Gleichungspaaren mit zwei unbekannten Winkeln soll an einigen Beispielen gezeigt werden. Ist das Gleichungspaar

$$a\sin\varphi+b\sin\psi = c, \quad \varphi+\psi = s \tag{48.14a}$$

nach φ und ψ aufzulösen, so setzt man $\varphi-\psi = d$ und erhält mit $\varphi = (s+d)/2$, $\psi = (s-d)/2$ eine Gleichung der Form

$$a\sin\frac{s+d}{2}+b\sin\frac{s-d}{2} = c,$$

die nach Umformung in

$$(a+b)\sin\frac{s}{2}\cos\frac{d}{2}+(a-b)\cos\frac{s}{2}\sin\frac{d}{2} = c \tag{48.14b}$$

nur noch die Unbekannte $d/2$ enthält und wie (48.5) aufzulösen ist. Mit

d und s sind auch φ und ψ bestimmt. An Stelle von $s = \varphi+\psi$ kann auch $d = \varphi-\psi$ gegeben sein.

Ganz analog sind die Gleichungspaare der Art

$$\begin{aligned} a\cos\varphi+b\cos\psi &= c, \quad s = \varphi+\psi \ \text{bzw.}\ d = \varphi-\psi, \\ a\sin\varphi+b\cos\psi &= c, \quad s = \varphi+\psi \ \text{bzw.}\ d = \varphi-\psi, \end{aligned} \tag{48.15}$$

zu behandeln.

Allgemein läßt sich für diesen Gleichungstyp eine *Regel* angeben: Sind $f(\varphi)$ und $\operatorname{co} f(\psi)$ die Funktion eines Winkels φ und die zugehörige Kofunktion eines Winkels ψ und ist entweder $\varphi+\psi = s$ oder $\varphi-\psi = d$ gegeben, so kann man durch die Einführung der Argumente s und d an Stelle von φ und ψ die jeweils unbekannte Größe d oder s und somit auch φ und ψ berechnen aus allen Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} f(\varphi)\pm f(\psi) &= c, \\ f(\varphi)\pm \operatorname{co} f(\psi) &= c, \\ f(\varphi)\cdot f(\psi) &= c, \\ f(\varphi)\cdot \operatorname{co} f(\psi) &= c, \\ \frac{f(\varphi)}{f(\psi)} &= c, \\ \frac{f(\varphi)}{\operatorname{co} f(\psi)} &= c. \end{aligned}$$

Auch hierzu einige erläuternde Beispiele: Ist das Gleichungspaar

$$\sin\varphi+\cos\psi = c, \quad \varphi+\psi = s \tag{48.16a}$$

gegeben, so erhält man mit $d = \varphi-\psi$ und $\varphi = (s+d)/2$, $\psi = (s-d)/2$ für die erste Gleichung

$$\begin{aligned} \sin\varphi+\sin(90^\circ-\psi) &\equiv \sin\frac{s+d}{2}+\sin\left(90^\circ-\frac{s-d}{2}\right) \\ &\equiv 2\sin\left(\frac{d}{2}+45^\circ\right)\cos\left(\frac{s}{2}-45^\circ\right) = c, \end{aligned}$$

also

$$\sin\left(\frac{d}{2}+45^\circ\right) = \frac{c}{2\cos\left(\frac{s}{2}-45^\circ\right)}, \tag{48.16b}$$

woraus d und somit auch φ und ψ berechnet werden können. Um φ und ψ aus dem Gleichungspaar

$$\tan\varphi-\cot\psi = c, \quad \varphi-\psi = d \tag{48.17a}$$

zu bestimmen, bildet man

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}-\frac{\cos\psi}{\sin\psi}\equiv\frac{\sin\varphi\sin\psi-\cos\varphi\cos\psi}{\cos\varphi\sin\psi}$$

$$\equiv\frac{-2\cos s}{\sin s-\sin d}=c$$

und erhält die Gleichung

$$c\sin s+2\cos s=c\sin d, \tag{48.17b}$$

die wie (48.5) aufzulösen ist. Ist das Gleichungspaar

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=c \quad\text{und}\quad \varphi-\psi=d \quad\text{bzw.}\quad \varphi+\psi=s \tag{48.18a}$$

gegeben, so bildet man

$$\frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\sin\varphi-\sin\psi}\equiv\frac{2\sin\frac{s}{2}\cos\frac{d}{2}}{2\cos\frac{s}{2}\sin\frac{d}{2}}=\frac{c+1}{c-1}$$

und erhält schließlich

$$\tan\frac{s}{2}=\tan\frac{d}{2}\,\frac{c+1}{c-1}, \tag{48.18b}$$

woraus entweder s oder d bestimmt werden kann.

Sind φ und ψ zu bestimmen aus

$$\sin\varphi\sin\psi=c \quad\text{und}\quad \varphi+\psi=s \quad\text{bzw.}\quad \varphi-\psi=d, \tag{48.19a}$$

so führt der Ansatz

$$\cos d-\cos s=-2\sin\frac{d+s}{2}\sin\frac{d-s}{2}$$

zum Ziel; dann wird nämlich

$$\cos d-\cos s=-2\sin\varphi\sin(-\psi)=2\sin\varphi\sin\psi=2c, \tag{48.19b}$$

woraus entweder die unbekannte Summe oder Differenz zu bestimmen ist.

Schließlich sei noch die Lösung des Gleichungssystems der Form

$$n\sin\varphi\cos\psi=a,\quad n\sin\varphi\sin\psi=b,\quad n\cos\varphi=c \tag{48.20}$$

behandelt, wenn daraus n, φ und ψ zu bestimmen sind. Quadriert man alle drei Gleichungen und addiert, so wird

$$n^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+n^2\sin^2\varphi\sin^2\psi+n^2\cos^2\varphi=a^2+b^2+c^2$$

oder

$$n^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) + n^2 \cos^2\varphi = a^2 + b^2 + c^2,$$

also $n = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Für φ gibt jetzt die dritte Gleichung

$$\cos \varphi = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

und ψ wird, wenn man die zweite Gleichung durch die erste dividiert,

$$\tan \psi = \frac{b}{a}.$$

49. Die kubischen Gleichungen einiger regelmäßiger Vielecke

Im folgenden sollen noch die kubischen Gleichungen für die Seiten des regelmäßigen Sieben-, Neun- und Vierzehnecks abgeleitet werden[49]. Zunächst zur *Gleichung des Siebenecks:* Der Seite $\overline{P_1P_2} = s$ des dem Einheitskreis einbeschriebenen *regelmäßigen Siebenecks* liegt der Zentriwinkel $\alpha = 360°/7$ bzw. $2\pi/7$ gegenüber (Abb. 49.1). Zeichnet man den Durchmesser $\overline{P_2T}$ — die Seite $\overline{P_1T} = c$ wird als das *Komplement der Kreissehne* $\overline{P_1P_2} = s$ bezeichnet —, so gilt für den Winkel $P_1TP_2 = \sigma$ nach dem Peripheriewinkelsatz $\sigma = \alpha/2 = \pi/7$. Werden noch die Lote $\overline{OF_1} \perp \overline{P_1P_2}$ und $\overline{OF_2} \perp \overline{P_1T}$ eingetragen, so ist für die Seite s bzw. deren Komplement c aus Abb. 49.1 $s/2 = \sin \sigma$ oder $s = 2 \sin \sigma$ und $c = 2h = 2 \cos \sigma$ abzulesen. Um eine Gleichung für die Seite des Siebenecks zu erhalten, ist von der Beziehung $3\sigma + 4\sigma = \pi$ bzw. den daraus folgenden Gleichungen

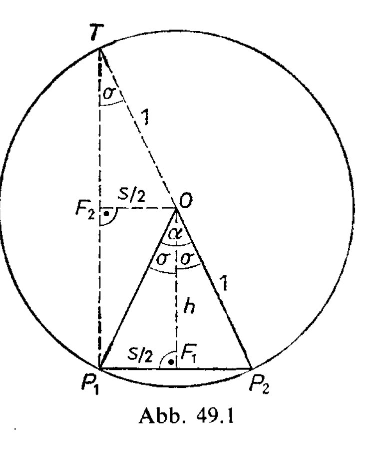


Abb. 49.1

$$\sin 3\sigma = \sin (\pi - 4\sigma) = \sin 4\sigma \qquad \text{I}$$

und

$$\cos 3\sigma + \cos 4\sigma = 0 \qquad \text{II}$$

[49] Ableitung und Darstellung entsprechen der von H. Dörrie, a.a.O. S. 143-145.

auszugehen. Schreibt man in I und II die Sinusse und Kosinusse der mehrfachen Winkel in der Form

$$\sin 3\sigma = 3 \sin \sigma - 4 \sin^3 \sigma,$$

$$\cos 3\sigma = 4 \cos^3 \sigma - 3 \cos \sigma,$$

$$\sin 4\sigma = \cos \sigma \, (4 \sin \sigma - 8 \sin^3 \sigma),$$

$$\cos 4\sigma = 8 \cos^4 \sigma - 8 \cos^2 \sigma + 1,$$

so erhält man aus I die Gleichung

$$3 \sin \sigma - 4 \sin^3 \sigma = \cos \sigma \, (4 \sin \sigma - 8 \sin^3 \sigma)$$

bzw.

$$3 \cdot 2 \sin \sigma - (2 \sin \sigma)^3 = 2 \cos \sigma \, [2 \cdot 2 \sin \sigma - (2 \sin \sigma)^3]. \qquad \mathrm{I}'$$

Ebenso läßt sich aus II bilden

$$(2 \cos \sigma)^3 - 3 \cdot 2 \cos \sigma + (2 \cos \sigma)^4 - 4(2 \cos \sigma)^2 + 2 = 0. \qquad \mathrm{II}'$$

Führt man in I′ und II″ $s = 2 \sin \sigma$, $c = 2 \cos \sigma$ ein, so wird daraus

$$3s - s^3 = c(2s - s^3), \qquad \mathrm{I}''$$

$$c^3 - 3c + c^4 - 4c^2 + 2 = 0. \qquad \mathrm{II}''$$

Um eine Gleichung für s zu erhalten, ist I″ zu quadrieren und $c^2 = 4 - s^2$ zu setzen; man erhält dann die bikubische Gleichung

$$s^6 - 7s^4 + 14s^2 - 7 = 0,$$

die mit $S = s^2$ als die kubische Gleichung

$$S^3 - 7S^2 + 14S - 7 = 0 \qquad (49.1\mathrm{a})$$

geschrieben werden kann. Das Quadrat $S = s^2$ der Siebenecksseite erfüllt also eine kubische Gleichung.

Für das Komplement c der Seite s gibt II″ unmittelbar die Gleichung

$$c^4 + c^3 - 4c^2 - 3c + 2 = 0,$$

die scheinbar biquadratisch ist. Sie hat jedoch die Wurzel -2, kann also mittels Division durch $c+2$ auf die kubische Gleichung

$$c^3 - c^2 - 2c + 1 = 0 \qquad (49.1\mathrm{b})$$

reduziert werden.

Für das dem Einheitskreis einbeschriebene *regelmäßige Neuneck* findet man bei entsprechender Bezeichnung der Stücke wieder $s = 2\sin\sigma$ und $c = 2\cos\sigma$, wobei jetzt gilt

$$\alpha = \frac{360^\circ}{9} = \frac{2\pi}{9}, \quad \sigma = \frac{\pi}{9}.$$

Nun ist $3\sigma = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$, also gilt

$$\sin 3\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \cos 3\sigma = \frac{1}{2}.$$

Bildet man wieder

$$\sin 3\sigma = 3\sin\sigma - 4\sin^3\sigma,$$

$$\cos 3\sigma = 4\cos^3\sigma - 3\cos\sigma,$$

so folgen daraus die Gleichungen

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sin\sigma - 4\sin^3\sigma \quad \text{oder} \quad \sqrt{3} = 3\cdot 2\sin\sigma - (2\sin\sigma)^3, \qquad \text{I}$$

$$\frac{1}{2} = 4\cos^3\sigma - 3\cos\sigma \quad \text{oder} \quad 1 = (2\cos\sigma)^3 - 3\cdot 2\cos\sigma. \qquad \text{II}$$

Mit $s = 2\sin\sigma$ und $c = 2\cos\sigma$ folgen daraus zwei kubische Gleichungen, nämlich

$$s^3 - 3s + 3 = 0 \qquad (49.2\text{a})$$

für die Neunecksseite und

$$c^3 - 3c - 1 = 0 \qquad (49.2\text{b})$$

für deren Komplement.

Für das dem Einheitskreis einbeschriebene *regelmäßige Vierzehneck* ist von dem Bestimmungsdreieck OP_1P_2 auszugehen (Abb. 49.2); der Zentriwinkel gegenüber der Seite P_1P_2 beträgt $\alpha = 2\pi/14 = \pi/7$. Mit den weiteren, in Abb. 49.2 eingetragenen Bezeichnungen findet man wieder $s = 2\sin\sigma$, wobei jetzt $\sigma = \pi/14$ ist. Für die Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks OP_1P_2 findet man wegen $7\alpha = \pi$

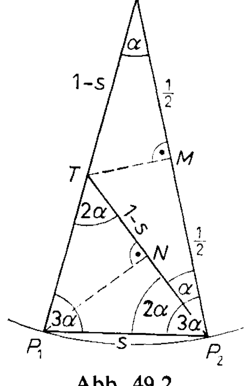


Abb. 49.2

$$\frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \frac{3}{7}\pi = 3\alpha.$$

Wird jetzt von P_2 die Transversale $\overline{P_2T}$ so abgetragen, daß $\sphericalangle OP_2T = \alpha$ ist, dann sind die Dreiecke P_2OT und P_1P_2T gleichschenklig (gleiche Basiswinkel von α bzw. 2α); also ist auch $\overline{P_1T} = s$, und die Seiten $\overline{TO}$ und $\overline{TP_2}$ sind gleich $1-s$. Wird noch $\overline{TM} \perp \overline{P_2O}$ eingetragen, so findet man $\cos\alpha = 0{,}5/(1-s)$, und mit $\overline{P_1N} \perp \overline{P_2T}$ gewinnt man noch

$$\cos 2\alpha = \frac{\frac{1-s}{2}}{s} = \frac{1-s}{2s}.$$

Setzt man die Werte für $\cos\alpha$ und $\cos 2\alpha$ in die Formel für den doppelten Winkel

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

ein, so ergibt sich

$$\frac{1-s}{2s} = 2\left(\frac{0{,}5}{1-s}\right)^2 - 1,$$

woraus durch leichte Umformung für die Vierzehnecksseite die kubische Gleichung

$$s^3 - s^2 - 2s + 1 = 0 \qquad (49.3)$$

resultiert.

Der Vergleich von (49.3) und (49.1b) zeigt, daß die Vierzehnecksseite und das Komplement der Siebenecksseite derselben kubischen Gleichung genügen.

Die Aufgabe, einem Kreis von gegebenem Radius ein *regelmäßiges Siebzehneck* einzubeschreiben, wurde von C. F. GAUSS gelöst (1801 in den Disquisitiones arithmeticae veröffentlicht). Wird der Radius des gegebenen Kreises als Längeneinheit gewählt, so ergibt sich für die Länge der Seite s des einbeschriebenen regelmäßigen 17-Eckes der Wert $s = 2\sin(\pi/17)$. Es läßt sich nun zeigen, daß $\cos(\pi/17)$ und somit auch $s = 2\sqrt{1-\cos^2(\pi/17)}$ mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Eine elementare Lösung dieser Aufgabe findet der interessierte Leser bei H. DÖRRIE, a.a.O. S. 174–177.

Teil II: Sphärische Trigonometrie

Kapitel 9: Vorbereitungen aus der sphärischen Geometrie

50. Übergang von der Geometrie in der Ebene zur Geometrie auf der Kugel

Bei den Dreiecks- und Vierecksberechnungen in Teil 1 wurde vorausgesetzt, daß es sich um ebene Figuren handelt, also um Figuren, die in einer Ebene liegen. Bei vielen Berechnungen, z. B. bei den in [36] dargestellten Verfahren des Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens und auch bei den geodätischen Dreiecksberechnungen, trifft dies nicht immer zu. Handelt es sich um verhältnismäßig kleine Teilausschnitte oder Figuren auf der Erdoberfläche, so kann ein Fehler, der aus der Abweichung der eben angenommenen Erdoberfläche von der kugelförmigen Gestalt entsteht, praktisch vernachlässigt werden. In einem auf der Erdoberfläche abgesteckten Dreieck von einigen hundert Metern Seitenlänge ist von der Erdkrümmung noch nichts zu spüren, die Summe der Winkel ergibt sich im Rahmen der Beobachtungsgenauigkeit zu 180° (200^g).

Soll bei der ebenen Grundrißdarstellung eines Ausschnittes der Erdoberfläche die Längenverzerrung kleiner als 1 : 50 000 bleiben, so dürfen die äußersten Punkte des Aufnahmegebietes nicht weiter als 40 km vom Berührpunkt der tangentialen Bezugsebene abstehen!

Anders wird dies, wenn man zu größeren Ausschnitten der Erdoberfläche, z. B. zu den Dreiecken eines trigonometrischen Netzes I. Ordnung mit Seitenlängen von 50 bis 100 km übergeht. Hier ergibt sich die Notwendigkeit, die Aufgabe der Dreiecksberechnung auf der Kugel zu lösen, wofür eine Trigonometrie auf der Kugel, also eine *sphärische Trigonometrie* benötigt wird.

Abgesehen von den Anwendungen in der Geodäsie und der mathematischen Geographie[50] ist die sphärische Trigonometrie auch für die

[50] Vgl. hierzu den Teil III.

Astronomie sowie für eine Reihe von Aufgaben der *Nautik*, der *Stereometrie*, der *Kristallographie* u. a. unentbehrlich. Dieser zweite Teil des Buches beschäftigt sich daher vorwiegend mit sphärischen Dreiecken, deren Seiten Bögen einer Kugeloberfläche sind.

51. Kreise und Entfernungen auf der Kugel

Zunächst zur *Definition der Kugel:* Die Kugel K ist der geometrische Ort aller Raumpunkte, die von einem Ort M einen festen Abstand R haben; M ist der Mittelpunkt, R der Radius der Kugel. Die Gesamtheit aller Punkte im Abstand R von M bildet also die Oberfläche O der Kugel K. — Von den unendlich vielen auf der Kugeloberfläche O möglichen Kurven werden im folgenden nur Kreise, die sogenannten *Kugelkreise* betrachtet. Jede Ebene E, deren Abstand l vom Kugelmittelpunkt M kleiner ist als R, schneidet die Oberfläche in einem Kreis S (Abb. 51.1).

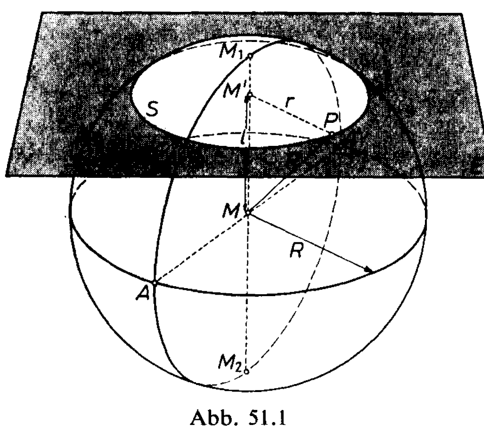


Abb. 51.1

Daß es sich bei der Schnittkurve S zwischen Ebene E und Kugeloberfläche O wirklich um einen Kreis handelt, läßt sich analytisch nachweisen: Macht man den Kugelmittelpunkt M zum Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems x, y, z, so gilt für alle auf O liegenden Punkte $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Setzt man die Gleichung der Ebene E mit $z = l$ an (die positive z-Achse fällt dann in die Richtung MM'), so gilt für die Schnittfigur, die sowohl auf E als auch auf O liegt, $x^2+y^2+l^2 = R^2$ oder $x^2+y^2 = R^2-l^2$. Dies ist die Gleichung eines Kreises in der $x-y$-Ebene bzw. in einer dazu parallelen Ebene, d. h. S ist ein Kreis mit dem Radius $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{R^2-l^2}$. Offenbar ergibt sich für

$l = 0$	ein Großkreis ($r = R$),
$l < R$	ein Kleinkreis ($r < R$),
$l = R$	eine Tangentialebene ($r = 0$),
$l > R$	kein reeller Schnittkreis.

Der zu E senkrechte Kugeldurchmesser trifft E im *wahren Mittelpunkt M' des Kreises S*, die Oberfläche O in den *sphärischen Mittelpunkten M_1 und M_2* von S. Enthält E den Kugelmittelpunkt M, so ist S ein größter

Kreis, für den Radius und wahrer Mittelpunkt mit denen der Kugel übereinstimmen. Alle Kreise mit dieser Eigenschaft werden *Großkreise (Hauptkreise)*, alle übrigen *Kleinkreise (Nebenkreise)* genannt. Bei letzteren gilt für den Radius r stets $r < R$; denn aus dem rechtwinkligen Dreieck $MM'P$ folgt, wenn P ein beliebiger Punkt auf dem Kleinkreis S ist und l den Abstand von E gegen M angibt, $r^2 = R^2 - l^2$.

Aus Abb. 51.1 ist zu erkennen, daß ein Großkreis zu jedem seiner Punkte auch den *Gegenpunkt*, d. h. den Endpunkt des entsprechenden Kugeldurchmessers enthält, z. B. A und A'. A und A' heißen auch *diametrale Punkte.* Aus Abb. 51.2 erkennt man, daß durch irgend zwei Punkte A und B, die nicht Gegenpunkte sind, nur ein Großkreis gelegt werden kann, jedoch unendlich viele Kleinkreise führen.

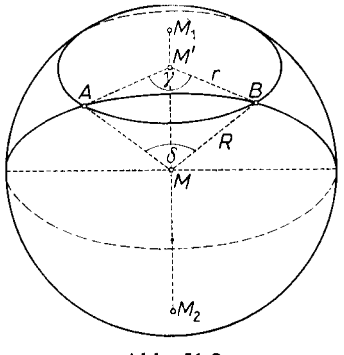


Abb. 51.2

Der Beweis folgt einfach daraus, daß eine Ebene durch drei Punkte bestimmt ist und im Falle eines Großkreises bei zwei vorgegebenen Punkten A und B der dritte Punkt der Kugelmittelpunkt M sein muß.

Zwei Großkreise schneiden sich stets in einem Paar von Gegenpunkten und halbieren einander.

Es lohnt sich, auch hierfür den Beweis zu überlegen: Die Schnittpunkte zweier Kreise sind die Punkte, die sie gemeinsam haben. Überdies liegt jeder der beiden Großkreise in einer Ebene durch M, folglich müssen auch die Schnittpunkte in diesen Ebenen liegen, d. h. auf der Schnittgeraden, die auch den Kugelmittelpunkt enthält. Da die Schnittpunkte der Großkreise auch auf der Kugeloberfläche liegen, müssen sie Endpunkte eines Durchmessers, also Gegenpunkte sein!

In welcher Weise soll nun die Entfernung zwischen zwei Punkten A und B auf der Kugeloberfläche O definiert werden? Zwischen zwei Kugelpunkten, die nicht Gegenpunkte sind, gibt es nur einen Großkreis, aber unendlich viele Kleinkreise. — Die auf der Kugeloberfläche gemessene Entfernung zwischen den Punkten A und B wird ein Minimum, wenn die Messung dem Großkreis entlang ausgeführt wird. In Abb. 51.2 ist durch die beiden Punkte A und B der Großkreis mit dem Radius R, außerdem ein beliebiger der unendlich vielen Kleinkreise mit dem Radius $r < R$ gelegt. Klappt man die Ebene des Kleinkreises in die des Großkreises (Abb. 51.3), so zeigt sich, daß der Bogen $\overset{\frown}{AB}$ des Kleinkreises (mit Radius r) stärker gekrümmt ist als der Großkreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ (Radius R) und deshalb länger ist als letzterer. Unter den unendlich vielen Bögen

zwischen zwei Punkten ist also der Großkreisbogen der kürzeste. Man definiert daher als die *sphärische Entfernung zweier Kugelpunkte A* und ***B***, die nicht Gegenpunkte sind, den kleineren der Bögen AB des Großkreises durch A und B. Er ist nach Lage und Länge eindeutig und kann kurz mit $\overset{\frown}{AB}$ bezeichnet werden[51].

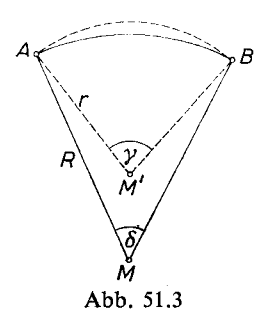


Abb. 51.3

Für zwei Gegenpunkte A und A' ist die sphärische Entfernung gleich einem halben Großkreis, dessen Lage unbestimmt bleibt, weil jeder von A ausgehende Großkreis auch durch A' geht.

D i e G r o ß k r e i s e s i n d a l s o d i e g e o d ä t i s c h e n L i n i e n a u f d e r K u g e l; sie spielen in der Kugelgeometrie dieselbe Rolle wie die Geraden in der Ebene.

Allgemein nennt man die Linien der kürzesten Verbindung auf einer Fläche *geodätische Linien.*

O f f e n b a r k a n n d i e s p h ä r i s c h e E n t f e r n u n g ***AB*** a l l e i n d u r c h e i n e n W i n k e l f e s t g e l e g t w e r d e n: Da der Bogen AB höchstens die Länge des halben Großkreisbogens annehmen kann und alle Großkreise überdies den gleichen Radius R haben, läßt sich AB durch seinen Mittelpunktswinkel δ allein festlegen, wobei stets $\delta \leqq 180°$ ist. Mit δ läßt sich die metrische Länge des Bogens AB angeben:

$$\frac{AB}{2R\pi} = \frac{\delta°}{360°},$$

$$AB = \frac{2\pi}{360°}\,\delta° R = R\frac{\pi}{180°}\,\delta° \quad \text{oder}$$

$$AB = R\frac{\delta°}{\varrho°} = R \operatorname{arc} \delta. \qquad (51.1)$$

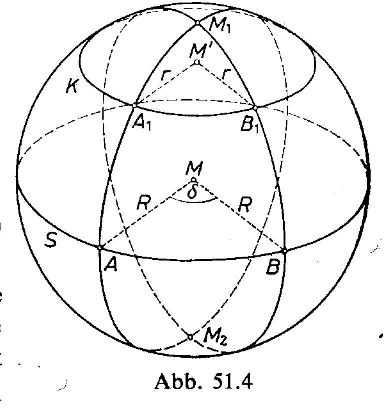


Abb. 51.4

Abb. 51.4 liefert eine weitere wichtige Erkenntnis: Errichtet man den zur Ebene AMB senkrechten Durchmesser, so erhält man die sphärischen Mittelpunkte M_1 und M_2 des Großkreises durch AB. Offenbar haben alle Punkte des Großkreises von M_1 und M_2 gleiche sphärische Abstände, die gleich einem Viertelsgroßkreisbogen *(Quadranten)* sind. Weiter zeigt sich, daß alle Punkte eines beliebigen Kreises K — in Abb. 51.4

[51] Eine Verwechslung mit der innerhalb der Kugel liegenden geraden Verbindung $\overline{AB}$ ist nicht zu befürchten.

ist ein Parallelkreis zum Großkreis S durch AB gewählt — von dessen sphärischen Mittelpunkten M_1 und M_2 gleiche sphärische Entfernungen $r_1 = M_1A_1 = M_1B_1$, $r_2 = M_2A_2 = M_2B_2$ aufweisen. r_1 und r_2 nennt man die *sphärischen Halbmesser* des Kreises K.

Allgemein versteht man unter dem Abstand eines Punktes von einem Kreis K, z. B. A_1 von AB, den zwischen A_1 und K liegenden Bogen des zu K senkrechten, durch A_1 laufenden Großkreises.

Die sphärischen Mittelpunkte M_1 und M_2 eines Großkreises S nennt man auch seine *Pole*, den Großkreis selbst *Polare:* Die Polare ist der geometrische Ort aller Punkte, die von den Polen die sphärische Entfernung 90° haben. Die Pole sind die Schnittpunkte aller zur Polaren senkrechten Großkreise, die man *Meridiane* nennt, während der gegebene Großkreis als der *Äquator* der Meridiane bezeichnet wird.

52. Das sphärische Zweieck

Das *Kugelzweieck* ist kennzeichnend für die Kugelgeometrie; in der Ebene bilden zwei geodätische Linien (Gerade) keine geschlossene Figur. Ein Zweieck auf einer Kugel von gegebenem Radius ist, abgesehen von seiner Lage, durch ein einziges Bestimmungsstück, nämlich durch den Winkel zwischen den beiden Großkreisen, festgelegt.

Schneidet man eine Kugel mit zwei durch Gegenpunkte gehende Ebenen E_1, E_2, so entsteht auf O ein Kugelstreifen, das sphärische Zweieck, dessen Eckpunkte (M_1 und M_2) Gegenpunkte sind (Abb. 52.1). Die Seiten des Kugelzweiecks sind gleich und betragen $R\pi$. Ebenso sind die zwei Winkel im Kugelzweieck einander gleich und gleich dem Neigungswinkel α der Ebenen E_1 und E_2. Der Flächeninhalt F_α des Kugelzweiecks ist proportional dem Öffnungswinkel α und erreicht für $\alpha = 180°$ die Fläche der Halbkugel $F_{180°} = 2R^2\pi$. Folglich gilt für F_α die Beziehung $F_\alpha : 2R^2\pi = \alpha° : 180°$ oder

$$F_\alpha = 2R^2\pi \frac{\alpha°}{180°} = 2R^2 \operatorname{arc} \alpha. \qquad (52.1)$$

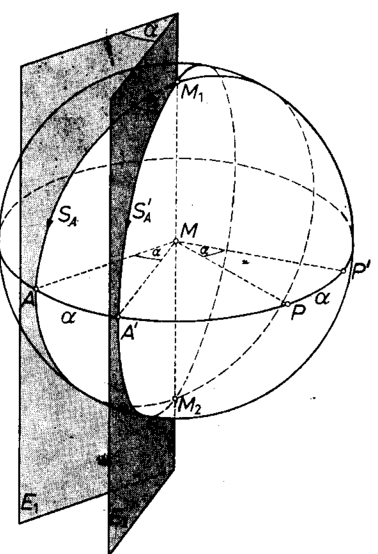


Abb. 52.1

Für die späteren Ableitungen wird noch der *Begriff der gerichteten Pole* benötigt: Durchläuft man einen Großkreis, so bezeichnet man den im Sinne der Bewegungsrichtung links liegenden Pol als den *Linkspol*, den rechts liegenden als den *Rechtspol*. Durchläuft man den zu $\overline{M_1M_2}$ senkrechten Großkreis (Abb. 52.1) in Richtung A nach A', so ist M_1 der Linkspol, M_2 der Rechtspol.

Trägt man in Abb. 52.1 die zu den Großkreisen S_A und S'_A gehörenden Linkspole P und P' ein — S_A und S'_A sind also im Sinne M_1 nach M_2 zu durchlaufen —, so erkennt man sofort: Der Winkel zweier gerichteter Großkreise in ihren Schnittpunkten ist gleich der sphärischen Entfernung ihrer Linkspole, oder: Der von zwei Meridianen gebildete Winkel ist gleich dem von ihnen begrenzten Äquatorbogen. Es ist nämlich $\sphericalangle AMA' = \alpha$, $\sphericalangle AMP = \sphericalangle A'MP' = 90°$, also ist auch $\sphericalangle PMP' = \alpha$.

Weiter gilt $\sphericalangle AM_1A' = \sphericalangle AMA' = \sphericalangle AM_2A' = \alpha$, d. h. der von zwei Großkreisen gebildete Winkel ist gleich dem Schnittwinkel zwischen den in M_1 und M_2 an die Großkreise gelegten Tangenten bzw. dem Schnittwinkel der durch A, M_1, M_2 und A', M_1, M_2 gelegten Ebenen E_1 und E_2.

53. Das sphärische Dreieck

Schneidet man eine Kugel mit drei durch den Mittelpunkt M gehenden, nicht zusammenfallenden Ebenen, so entstehen auf der Kugeloberfläche drei Großkreise, die sich in den Punktepaaren AA', BB' und CC' schneiden. Jedes der Punktepaare liegt auf einem Durchmesser, bildet also ein Paar von Gegenpunkten. Die drei Großkreise zerlegen die Kugeloberfläche in acht Dreiecke, von denen je zwei kugelsymmetrisch sind (Abb. 53.1). Von besonderem Interesse ist das *Dreieck ABC*, das im folgenden kurz mit △ bezeichnet wird. Die Bogen AB, BC, CA sind als Teile von Großkreisen die kürzesten, also definitionsgemäß die sphärischen Entfernungen der Punkte A, B und C und sämtlich kleiner als 180°; sie können somit durch die Mittelpunktswinkel a, b, c festgelegt werden, die man die *Seiten des sphärischen Dreiecks* nennt. — Die von den Großkreisen in den Eckpunkten gebildeten Innenwinkel α, β, γ sind gleich den Neigungswinkeln der Schnittebenen und ebenfalls kleiner als 180°; man nennt sie die *Winkel des sphärischen Dreiecks*. Ein sphärisches

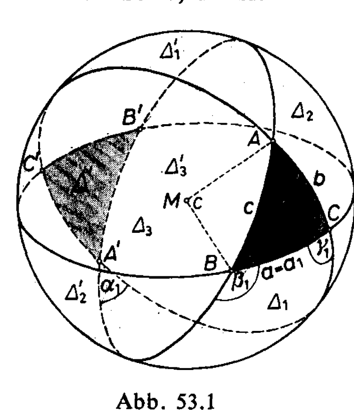


Abb. 53.1

Dreieck, dessen Seiten und Winkel kleiner 180°, also konkav sind, nennt man ein EULER*sches Dreieck.*

Die Forderung, daß die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks ABC konkav sein sollen, bedeutet eine wesentliche Einschränkung, die aber für viele Anwendungen berechtigt ist. Der Begriff des verallgemeinerten sphärischen Dreiecks wird in [79] aufgegriffen.

Von den restlichen sieben Dreiecken ist Dreieck $A'B'C'$ zentralsymmetrisch zu $\triangle$ und stimmt mit diesem in allen sechs Stücken, folglich auch in der Fläche überein; man bezeichnet es als das *Scheiteldreieck* $\triangle'$ von $\triangle$.

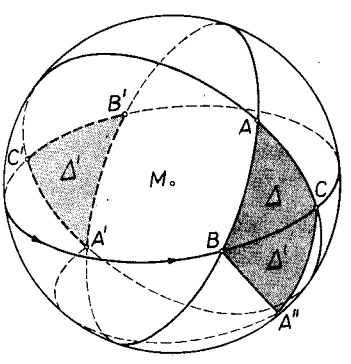


Abb. 53.2

Der Beweis, daß zentralsymmetrische Dreiecke flächengleich sind, kann auf anschauliche Weise geführt werden: Schiebt man $\triangle'$ z. B. auf dem Großkreis $B'C'BC$ entlang, bis B' auf B fällt, so gelangt C' nach C und A' nach A''; offenbar liegt A'' in bezug auf BC symmetrisch zu A (Abb. 53.2). Wegen der Kugelkrümmung kann $A''BC$ nicht wie in der Ebene durch Umklappen auf ABC gelegt werden; denkt man sich $\triangle ABC$ gleichschenklig, also $b = a$, so wird $CA = CB = CA''$, und B' kann durch Drehung um C mit A, A'' mit B zur Deckung gebracht werden; für zentralsymmetrisch gleichschenklige Dreiecke ist somit die Flächengleichheit bewiesen. — Für beliebige zentralsymmetrische Dreiecke läßt sich der Beweis führen, indem man sie durch die nach den Ecken gehenden sphärischen Radien der Umkreise in gleichschenklige Teildreiecke zerlegt.

Die Dreiecke $\triangle_1 = A'BC$, $\triangle_2 = AB'C$, $\triangle_3 = ABC'$ nennt man die *Nebendreiecke* von $\triangle$; die übrigen Dreiecke $\triangle_1'$, $\triangle_2'$, $\triangle_3'$ sind die Scheiteldreiecke der Nebendreiecke und zugleich die Nebendreiecke von $\triangle'$. Alle diese Dreiecke sind EULERsche Dreiecke.

Die *Fläche des sphärischen Dreiecks* $\triangle$ ergibt sich aus folgender Überlegung: Jede der Ecken von $\triangle$ ist gleichzeitig Eckpunkt eines der Kugelzweiecke AA', BB' und CC' mit den Öffnungswinkeln α, β und γ. Bezeichnet man die Flächen von $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, also auch von $\triangle'$, $\triangle_1'$, $\triangle_2'$, $\triangle_3'$ mit F, F_1, F_2, F_3, so läßt sich an Hand der Abb. 53.1 für die Zweiecke ablesen $F_{AA'} = F+F_1$, $F_{BB'} = F+F_2$, $F_{CC'} = F+F_3$. Nun ist aber nach (52.1)

$$F_{AA'} = R^2\pi\frac{\alpha}{90°}, \quad F_{BB'} = R^2\pi\frac{\beta}{90°}, \quad F_{CC'} = R^2\pi\frac{\gamma}{90°},$$

woraus man durch Summierung findet

$$F_{AA'}+F_{BB'}+F_{CC'} = \frac{R^2\pi}{90°}(\alpha+\beta+\gamma) = 3F+F_1+F_2+F_3.$$

Die Flächensumme $F_1+F_2+F_3$ entspricht aber der um F verminderten Fläche der Halbkugel, so daß daraus

$$\frac{R^2\pi}{90^\circ}(\alpha+\beta+\gamma) = 2F+2R^2\pi$$

wird, und schließlich

$$F = \frac{R^2\pi}{180^\circ}(\alpha+\beta+\gamma-180^\circ) = \frac{R^2\pi}{180^\circ}\cdot\varepsilon^\circ = R^2 \operatorname{arc} \varepsilon; \qquad (53.1)$$

dabei bezeichnet $\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma-180^\circ$ den *sphärischen Exzess*, also den Überschuß, um den die Winkelsumme des sphärischen Dreiecks die Winkelsumme des ebenen Dreiecks übertrifft. Der sphärische Exzess ε ist der Fläche F von $\triangle$ proportional.

Auf der Kugel lassen sich also nicht nur Längen, sondern auch Flächen durch Winkel angeben.

Die *Winkelsumme eines* EULER*schen Dreiecks* ist demnach stets größer als 180°, d. h. es gilt $\alpha+\beta+\gamma \geqq 180^\circ$.

Auch eine *obere Schranke* läßt sich für die Winkelsumme angeben: Da die Seiten von $\triangle$ die kürzesten sind, ist F stets kleiner als die Fläche der Halbkugel, also folgt aus (53.1)

$$\frac{R^2\pi}{180^\circ}\varepsilon \leqq 2R^2\pi \quad \text{oder} \quad \varepsilon \leqq 360^\circ,$$

und schließlich $\alpha+\beta+\gamma \leqq 540^\circ$.

Für die *Winkelsumme eines* EULER*schen Dreiecks* gilt also

$$180^\circ \leqq (\alpha+\beta+\gamma) \leqq 540^\circ. \qquad (53.2)$$

Auch für die *Seitensumme eines* EULER*schen Dreiecks* lassen sich Grenzen angeben: Entartet $\triangle$ in die Halbkugel, so wird $a+b+c = 360^\circ$; andererseits wird $a+b+c = 0$, wenn $\triangle$ in einen Punkt zusammenschrumpft. Also gilt

$$0 \leqq (a+b+c) \leqq 360^\circ. \qquad (53.3)$$

Die Beziehung (53.3) ergibt sich auch in folgender Weise: Die Nebendreiecke haben mit $\triangle$ je eine Seite gemeinsam und stimmen auch in deren Gegenwinkeln mit $\triangle$ überein; die restlichen Stücke sind die Supplemente von $\triangle$. Für $\triangle_1$ gilt nach Abb. 53.1

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = 180^\circ-\beta, \quad \gamma_1 = 180^\circ-\gamma,$$
$$a_1 = a, \quad b_1 = 180^\circ-b, \quad c_1 = 180^\circ-c.$$

Aus der Ungleichung $b_1+c_1 > a_1$, die daraus folgt, daß a_1 als Großkreisbogen die kürzeste Verbindung von B und C ist, ergibt sich wieder $a+b+c < 360^\circ$.

Die Differenz $d = 360^\circ-(a+b+c)$ nennt man den *sphärischen Defekt* von $\triangle$. – Stellt man auch für die Nebendreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ die Defekte

d_1, d_2, d_3 und die Exzesse ε_1, ε_2, ε_3 auf, so erhält man zwei interessante Beziehungen. Mit den Abkürzungen $s = (a+b+c)/2$, $s_a = s-a$, $s_b = s-b$, $s_c = s-c$ ergibt sich der Defekt von $\triangle$ zu $d = 360° - 2s$. Für das Nebendreieck $\triangle_1$ (Abb. 53.1) erhält man

$$d_1 = 360° - (a_1 + b_1 + c_1) = 360° - (a + 180° - b + 180° - c) = b + c - a = 2s_a.$$

Ebenso findet man für die Nebendreiecke $\triangle_2$ und $\triangle_3$ $d_2 = 2s_b$ und $d_3 = 2s_c$. — Die Summe der Defekte d, d_1, d_2, d_3 gibt

$$d + d_1 + d_2 + d_3 = 360° - 2s + 2s_a + 2s_b + 2s_c = 360°. \tag{53.4}$$

Führt man für die Winkel die Hilfsgrößen

$$\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma), \qquad \sigma_\alpha = \sigma - \alpha, \qquad \sigma_\beta = \sigma - \beta, \qquad \sigma_\gamma = \sigma - \gamma$$

ein, so wird der Exzess von $\triangle$ gleich $\varepsilon = 2\sigma - 180°$. Für das Nebendreieck $\triangle_1$ lautet er

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 180° = \alpha + 180° - \beta + 180° - \gamma - 180° = 180° - 2\sigma_\alpha.$$

Ebenso wird $\varepsilon_2 = 180° - 2\sigma_\beta$ und $\varepsilon_3 = 180° - 2\sigma_\gamma$. Die Summe der Exzesse ε, ε_1, ε_2, ε_3 gibt

$$\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \alpha + \beta + \gamma + 360° - 2(\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sigma_\gamma) = 360°. \tag{53.5}$$

Weitere Beziehungen zwischen den Seiten und sphärischen Defekten sowie den Winkeln und sphärischen Exzessen der Dreiecke $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ hat G. Hessenberg, a.a.O. S. 111, angegeben:

$$\begin{Bmatrix} a \\ a_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(d_2 + d_3), \qquad \begin{Bmatrix} b \\ b_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(d_3 + d_1), \qquad \begin{Bmatrix} c \\ c_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(d_1 + d_2);$$
$$\begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(d + d_1), \qquad \begin{Bmatrix} b_3 \\ b_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(d + d_2), \qquad \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(d + d_3); \tag{53.6}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_1), \qquad \begin{Bmatrix} \beta \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_2), \qquad \begin{Bmatrix} \gamma \\ \gamma_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_3);$$
$$\begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3), \qquad \begin{Bmatrix} \beta_3 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(\varepsilon_3 + \varepsilon_1), \qquad \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \tag{53.7}$$

54. Das Polardreieck

Legt man Bezeichnung und Umlaufsinn für das sphärische Dreieck ABC so fest, daß bei einem Umlauf von A über B nach C das Dreieck stets links liegt, dann bilden die Linkspole (vgl. [52]) $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ der den Seiten a, b, c von $\triangle$ entsprechenden Großkreise das *Polardreieck* $\bar{\triangle}$ von $\triangle$, dessen Seiten und Winkel mit $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ und $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ bezeichnet seien (Abb. 54.1). Zwischen den Seiten und Winkeln der beiden Dreiecke bestehen wichtige Beziehungen: Um von A über B nach C zu gelangen, ist in den Eckpunkten A, B, C je eine Drehung um die Außenwinkel $180°-\alpha$, $180°-\beta$ und $180°-\gamma$ notwendig; folglich gilt für die *Seiten des Polardreiecks* $\bar{\triangle}$:

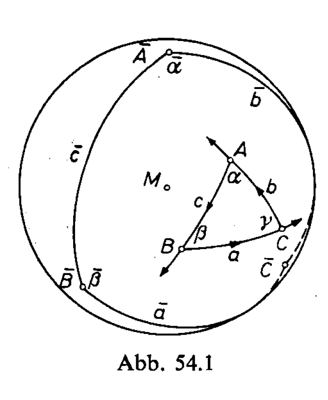


Abb. 54.1

$$\bar{a} = 180°-\alpha, \quad \bar{b} = 180°-\beta, \quad \bar{c} = 180°-\gamma. \tag{54.1}$$

Umgekehrt sind A, B, C die Linkspole der Seiten $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, woraus sofort die Beziehungen $a = 180°-\bar{\alpha}$, $b = 180°-\bar{\beta}$, $c = 180°-\bar{\gamma}$ oder

$$\bar{\alpha} = 180°-a, \quad \bar{\beta} = 180°-b, \quad \bar{\gamma} = 180°-c \tag{54.2}$$

folgen. Die Seiten des Polardreiecks $\bar{\triangle}$ sind also die Supplemente der Winkel, die Winkel die Supplemente der Seiten des Ausgangsdreiecks; ist $\bar{\triangle}$ das Polardreieck von $\triangle$, so ist umgekehrt $\triangle$ das Polardreieck von $\bar{\triangle}$.

Der Beweis läßt sich ebenso mit den Rechtspolen von $\triangle$ führen: Das Dreieck der Rechtspole ist das Scheiteldreieck $\bar{\triangle}'$ des Polardreiecks $\bar{\triangle}$ und kann, weil es dieselben Stücke wie $\bar{\triangle}$ hat, ebenfalls als Polardreieck von $\triangle$ angesehen werden.

Diese Zuordnung zwischen Kugeldreieck und Polardreieck, bei der eine Seite des Ausgangsdreiecks einer Ecke des Polardreiecks entspricht und umgekehrt, nennt man die *Polarität auf der Kugel:* Jedem Punkt auf der Kugel entspricht also ein Großkreis und umgekehrt. Punkt und Großkreis stehen also in einer Lagebeziehung wie Pol und Äquator.

Diese Supplementbeziehung zwischen den Winkeln und Seiten der beiden Dreiecke ist für die späteren Ableitungen von Bedeutung: Eine für $\triangle$ gültige Beziehung muß auch für $\bar{\triangle}$ gelten und führt mit (54.1) und (54.2) zu einer polar übertragenen Beziehung. Auf diese Weise erhält man entweder eine Probe für eine bekannte Formel oder einen einfachen Beweis für eine neue Formel.

Derselbe Weg ergibt sich natürlich durch den Übergang auf die Nebendreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, wenn man zwei Seiten und ihre Gegenwinkel durch ihre Supplemente ersetzt. Hierzu gleich ein Beispiel: Ersetzt man $\triangle$ durch $\triangle_1$, so sind die Nebendreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ durch $\triangle_1'$, $\triangle_3'$, $\triangle_2'$ zu ersetzen, an die Stelle der Seiten a, b, c und Defekte d, d_1, d_2, d_3 treten a_1, b_1, c_1 und d_1, d, d_3, d_2, wodurch z. B. $b = (1/2)(d_3+d_1)$ in $b_1 = (1/2)(d_2+d)$ übergeht. — Im Polardreieck $\bar{\triangle}$ gilt für den Exzess

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}-180° = 180°-a+180°-b+180°-c-180° = d,$$

ebenso wird $\bar{d} = \varepsilon$, $\bar{\varepsilon}_1 = d_1$, $\bar{d}_1 = \varepsilon_1$ usw., (53.6) und (53.7) gehen also ineinander über.

55. Dreikant und Polardreikant

Verbindet man die Ecken ABC von $\triangle$ mit dem Kugelmittelpunkt M und verlängert die Verbindungsgeraden über A, B und C hinaus, so bilden diese Halbgeraden eine körperliche Ecke, die als *Dreikant* bezeichnet wird (Abb. 55.1). Die Seiten a, b, c des sphärischen Dreiecks treten am Dreikant als Winkel zwischen den Kanten, die Winkel α, β, γ von $\triangle$ als Neigungswinkel der Seitenflächen des Dreikantes auf.

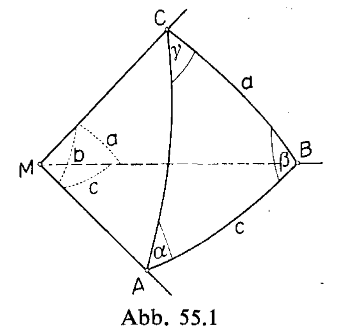


Abb. 55.1

Durch Verlängern der Geraden $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ und $\overline{CM}$ über M hinaus entstehen das *Scheiteldreikant* und die *Nebendreikante*, die dem Scheiteldreieck und den Nebendreiecken entsprechen.

Auch dem Polardreieck $\bar{\triangle}$ läßt sich ein Dreikant zuordnen: Um dieses *Polardreikant* zu gewinnen, geht man am besten wie folgt vor: Die Seiten a, b, c des sphärischen Dreiecks treten am Dreikant als ebene Winkel auf (Abb. 55.1). Um auch α, β, γ als ebene Winkel zu erhalten und um vollends die Sätze der ebenen Trigonometrie anwenden zu können, schneidet man die Seitenflächen des Dreikants mit drei Ebenen E_1, E_2, E_3, die auf den Kanten $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$ senkrecht stehen. Legt man zunächst durch P eine Ebene $E_1 \perp \overline{MA}$, so erhält man, wenn b, $c < 90°$ sind, ein Tetraeder $MPST$ (Abb. 55.2).

Die Kanten des Tetraeders bilden zwölf Winkel, die sich durch die Verhältnisse der sechs Kanten, also durch fünf Größen ausdrücken lassen. Da die Winkel SPM und TPM Rechte sind, kennt man mit a, b, c und α sechs Winkel, zwischen denen eine Beziehung aufgestellt werden kann.

Legt man eine zweite Ebene $E_2 \perp \overline{MB}$ derart, daß sich E_1 und E_2 in S schneiden, so entsteht ein Fünfflächner $MPS'QS$ (Abb. 55.3) mit folgen-

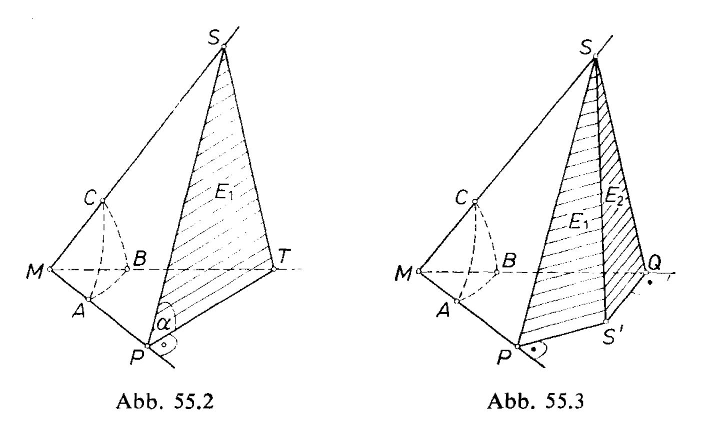


Abb. 55.2 Abb. 55.3

den Eigenschaften: Die Schnittlinie SS' von E_1 und E_2 steht senkrecht zur Seitenfläche MAB des Dreikants; also sind die Dreiecke SPS' und SQS' bei S' rechtwinklig. Der in der Seitenfläche MAB liegende Schnittwinkel $PS'Q$ der Ebenen E_1 und E_2 ergibt sich aus dem Viereck $MPS'Q$; da die Winkel MPS' und MQS' Rechte sind und $\sphericalangle AMB = c$ ist, folgt $\sphericalangle PS'Q = 180° - c$.

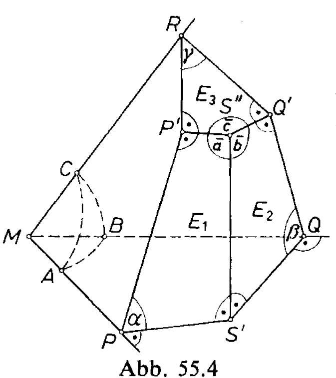


Abb. 55.4

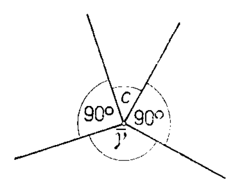
Zeichnet man schließlich noch die Ebene $E_3 \perp MC$, so ergibt sich ein Sechsflächner $PS'QMP'S''Q'R$ (Abb. 55.4). Für den Schnittwinkel der Ebenen E_1, E_2 liest man $\sphericalangle PS'Q = 180° - c = \bar{\gamma}$ ab; der Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_3 beträgt $\sphericalangle RP'P = 180° - b = \bar{\beta}$, und für den Schnittwinkel zwischen E_2 und E_3 gilt $\sphericalangle RQ'Q = 180° - a = \bar{\alpha}$.

Betrachtet man noch das Viereck $PP'S''S'$, das bei P' und S' rechtwinklig ist, so folgt daraus $\sphericalangle P'S''S' = 180° - \alpha = \bar{a}$. Ebenso findet man aus den Vierecken $QQ'S''S'$ bzw. $RP'S''Q'$ die Beziehungen $\sphericalangle S'S''Q' = 180° - \beta = \bar{b}$ und $\sphericalangle P'S''Q' = 180° - \gamma = \bar{c}$.

Die Seiten und Winkel der Ecke S'' sind also gleich den Stücken des Polardreiecks $\bar{\triangle}$ von $\triangle$. Verschiebt man die Ecke S'' parallel zu sich selbst nach M, so schneidet sie auf der Kugel um M das Scheiteldreieck des in Abb. 54.1 entwickelten Polardreiecks aus. Sinngemäß nennt man diese räumliche Ecke das Polardreikant der Ecke $MABC$.

Das Polardreikant und die daraus folgenden Beziehungen erhält man auch auf folgende, allerdings weniger anschauliche Weise: Nimmt man im Innern des Dreikants einen beliebigen Punkt und fällt von ihm aus die Lote auf die Seitenflächen, so entsteht

ein neues Dreikant, das Supplementdreikant. Fällt der Scheitel des Supplementdreikants mit dem Scheitel des gegebenen Dreikants zusammen, so entsteht das Polardreikant des gegebenen Dreikants. Da man den Neigungswinkel zweier Ebenen in derjenigen Ebene mißt, auf der die Schnittlinie der beiden Ebenen senkrecht steht, liegen auch die Lote, die das Polardreikant erzeugen, in dieser Ebene. Die Beziehungen zwischen Dreikant und Polardreikant ergeben sich dann unmittelbar aus dem Grundriß in Abb. 55.5: $\bar{c}+\gamma = 180°$, $c+\bar{\gamma} = 180°$.



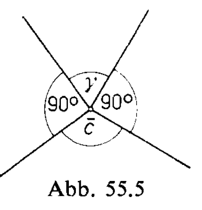


Abb. 55.5

Die Abb. 55.2 bis 55.4 zeigen auch den Weg für die Berechnung sphärischer Dreiecke: Sowohl die Seiten als auch die Winkel des sphärischen Dreiecks *ABC* treten als ebene Winkel am Dreikant auf. Die Sätze über sphärische Dreiecke lassen sich also mit Hilfe des Dreikants ableiten; sie werden sich von den Sätzen über ebene Dreiecke nur dadurch unterscheiden, daß neben den trigonometrischen Funktionen der Winkel auch die der Seiten auftreten. Keinesfalls benötigt man für die Berechnung der sphärischen Dreiecke neue Funktionen.

56. Kongruenzsätze für Dreikant und sphärisches Dreieck

Für die Dreikante und somit auch für die sphärischen Dreiecke lassen sich ebenso wie für ebene Dreiecke *Kongruenzsätze* aufstellen. — Ohne diese in voller Allgemeinheit darzustellen — die Beweise ergeben sich bei den Grundaufgaben der sphärischen Dreiecksberechnung nebenher —, sollen einige Beispiele und Überlegungen vorausgeschickt werden.

Dreikante lassen sich wie ebene Dreiecke aus drei gegebenen Stücken bestimmen. Ebenso ist auch ein sphärisches Dreieck durch drei seiner Stücke festgelegt: Von den sechs Stücken $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ des sphärischen Dreiecks sind also irgend drei Stücke unabhängig, vier dagegen abhängig, ausgenommen der Fall, daß z. B. die Ecke C ein Pol der Gegenseite ist. Dann ist nämlich $a = 90°$, $b = 90°$, $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$, $c = \gamma$, das heißt, es liegt ein *Großkreissektor* vor. — Kennt man von einem Dreikant die drei Kantenwinkel, also für das sphärische Dreieck die drei Seiten[52]

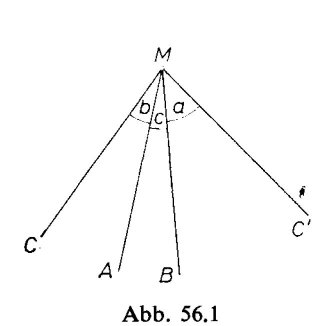


Abb. 56.1

[52] Der Kürze halber werden die Elemente des Dreikants, die Winkel zwischen den Kanten bzw. die Winkel zwischen den Seitenflächen stets als Seiten bzw. Winkel des sphärischen Dreiecks bezeichnet.

a, b, c, so läßt sich das Dreikant bzw. das zugehörige sphärische Dreieck eindeutig konstruieren (Abb. 56.1): Denkt man sich die Kanten unter den Neigungen a, b, c in die Ebene gezeichnet und erfüllen a, b, c die Bedingung $a+b+c \leqq 360°$, so lassen sich die Seitenflächen MCA um $\overline{MA}$ und MBC' um $\overline{MB}$ so weit umklappen, bis $\overline{MC}$ und $\overline{MC'}$ zusammenfallen.

Ebenso läßt sich ein Dreikant konstruieren, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, z. B. a, c und β, gegeben sind. Hierfür ist das ebene Strahlentripel $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$ zu zeichnen und die Seitenfläche MBC' so weit um $\overline{MB}$ umzuklappen, bis die Seitenflächen MBC' und MAB den Winkel β miteinander bilden. — Sind zwei Seiten und einer der Gegenwinkel, z. B. a, c und α gegeben, so kann wieder das Strahlentripel $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ gezeichnet werden. Legt man durch $\overline{MA}$ eine Ebene E mit dem Neigungswinkel α gegen MAB, so ist die Seitenfläche MBC' um $\overline{MB}$ zu drehen, bis $\overline{MC}$ in die Ebene E fällt. Hier gibt es drei verschiedene Möglichkeiten: Entweder kann $\overline{MC}$ auf E zwei verschiedene Lagen einnehmen, oder beide Lagen fallen zusammen. Der Winkel γ kann also Werte $\gtreqless 90°$ annehmen.

Die gleichen Überlegungen gelten auch für das Polardreikant, dessen Seiten und Winkel nach (54.1) und (54.2) durch die Stücke des gegebenen Dreikants ausgedrückt werden können: Sind z. B. α, β, γ gegeben, so lautet die Aufgabe, ein Dreikant mit den Seiten $\bar{a} = 180°-\alpha$, $\bar{b} = 180°-\beta$, $\bar{c} = 180°-\gamma$ zu konstruieren. — Ebenso lassen sich die Bestimmungen des Dreikants aus zwei Winkeln und der anliegenden Seite bzw. zwei Winkeln und einer Gegenseite durch polare Übertragung auf die behandelten Fälle zurückführen.

Somit können folgende *Kongruenzsätze* formuliert werden: Zwei sphärische Dreiecke (Dreikante) sind *kongruent* oder *zentralsymmetrisch*, wenn sie übereinstimmen in

a) drei Seiten,
b) zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,
c) zwei Seiten und einem Gegenwinkel, falls der Gegenwinkel der anderen Seite in beiden Dreiecken gleichzeitig $\lesseqgtr 90°$ ist,
d) drei Winkeln,
e) einer Seite und zwei anliegenden Winkeln,
f) zwei Winkeln und einer Gegenseite, falls die Gegenseite des anderen Winkels in beiden Dreiecken gleichzeitig $\lesseqgtr 90°$ ist.

Aus den geometrischen Eigenschaften des Dreikants lassen sich in einfacher Weise auch Beziehungen für die Seiten und Winkel des sphä-

rischen Dreiecks angeben[53]. Die Abb. 56.2, in der die Seitenflächen MCA um $\overline{MA}$ und $MC'B$ um $\overline{MB}$ nach innen geklappt sind, zeigt, daß ein Dreikant nur dann entstehen kann, wenn

$$a+b > c \tag{56.1}$$

ist. Aus dieser Ungleichung folgen auch die Beziehungen

$$a > c-b \quad \text{und} \quad b > c-a, \tag{56.2}$$

woraus man sofort folgende Sätze gewinnt: In einem sphärischen Dreieck (Dreikant) ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte, und jede Seite ist größer als die Differenz der beiden anderen.

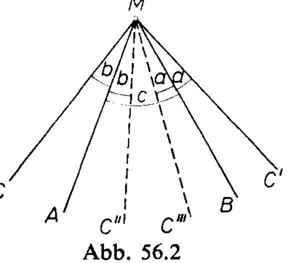


Abb. 56.2

Für das Polardreikant folgt aus (56.1) sofort $\bar{a} + \bar{b} > \bar{c}$ oder nach (54.1) auch $360° - (\alpha+\beta) > 180° - \gamma$ oder

$$\alpha+\beta < 180°+\gamma.$$

In einem sphärischen Dreieck (Dreikant) ist die Summe zweier Winkel kleiner als der um 180° vermehrte dritte Winkel. — Weiter gelten die leicht nachweisbaren Sätze: In einem sphärischen Dreieck (Dreikant) liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber, und je nachdem die Summe zweier Seiten $\gtreqless$ 180° ist, wird auch die Summe ihrer Gegenwinkel $\gtreqless$ 180°.

[53] Eine ausführliche Darstellung der im sphärischen Dreieck gültigen Seiten- und Winkelungleichungen folgt in [62].

Kapitel 10: Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie

57. Die Grundaufgaben der sphärischen Trigonometrie

Nach den Kongruenzsätzen für sphärische Dreiecke sind, wenn man den schon erwähnten Fall des Großkreissektors ausnimmt, von den sechs Stücken a, b, c, α, β, γ eines sphärischen Dreiecks drei unabhängig. — Mit der Einschränkung, daß sich unter den Seiten und Winkeln, insbesondere den gegebenen, höchstens ein Quadrant befindet, ergeben sich sechs Grundaufgaben, wobei

1. die drei Seiten a, b, c (SSS),
2. die drei Winkel α, β, γ (WWW),
3. zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, z. B. a, b, γ (SWS),
4. eine Seite und die anliegenden Winkel, z. B. c, α, β (WSW),
5. zwei Seiten und ein Gegenwinkel, z. B. a, b, α (SSW),
6. zwei Winkel und eine Gegenseite, z. B. α, β, a (WWS)

gegeben sein können [4].

Während sich für das ebene Dreieck vier Aufgaben ergeben[55], bleiben beim sphärischen Dreieck nur drei: Im zweiten, vierten und sechsten Fall sind die dem ersten, dritten und fünften Fall entsprechenden Stücke des Polardreieckes gegeben, d. h. die Grundaufgaben 2, 4 und 6 sind die Polarfälle der Grundaufgaben 1, 3 und 5. — Vollständige Lösungen für die Grundaufgaben werden in Kapitel 11 angegeben. Hier sollen nur noch die *Bedingungen der Lösbarkeit* kurz diskutiert werden. Denkt man sich das sphärische Dreieck aus den gegebenen Stücken konstruiert, so dürfen bei der dritten (SWS) und vierten Aufgabe (WSW) die Stücke beliebig vorgegeben werden; die gesuchten Stücke sind stets eindeutig bestimmt. Bei der ersten Aufgabe müssen nach [53] die vier Defekte d, d_1, d_2, d_3 positiv sein. Für zwei davon, nämlich d_2 und d_3, gilt von selbst $d_2 > 0$ und $d_3 > 0$, wenn a die größte Seite bezeichnet. Weiter muß noch $a+b+c < 360°$ und $b+c > a$ sein. Ist dies der Fall, so ist die Aufgabe eindeutig lösbar.

---

[54] Zur Kennzeichnung der Grundaufgaben wird im folgenden noch eine Kurzschreibweise benützt, wie (SSS), (WWW), etc., die keiner weiteren Erläuterung bedarf.

[55] Wegen der Abhängigkeit der Winkel scheidet die zweite Aufgabe aus und die vierte und sechste Aufgabe werden gleichwertig.

Bezeichnet a die größte Seite, so wird $d_2 = 2(s-b) > 0$ und $d_3 = 2(s-c) > 0$; $d > 0$ bedeutet, daß $d = 360° - (a+b+c) > 0$, d. h. $a+b+c < 360°$ sein muß, und $d_1 = 2(s-a) > 0$ besagt, daß $2s-2a = a+b+c-2a = b+c-a > 0$ sein muß.

Für die zweite Aufgabe folgt daraus durch *Polarisqtion*, daß sie nur dann eindeutig lösbar ist, wenn die vier Exzesse ε, ε_1, ε_2, ε_3 positiv sind.

Die Diskussion ist ganz analog zu führen: Ist α der größte Winkel, so sind die Bedingungen $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_3 > 0$ von selbst erfüllt; $\varepsilon > 0$ bedeutet, daß $\alpha+\beta+\gamma > 180°$ sein muß, und die Bedingung $\varepsilon_1 > 0$ führt auf die Ungleichung: $180° - 2\sigma_\alpha = 180° - 2\sigma + 2\alpha = 180° - \alpha - \beta - \gamma + 2\alpha > 0$ oder $180° + \alpha > \beta + \gamma$.

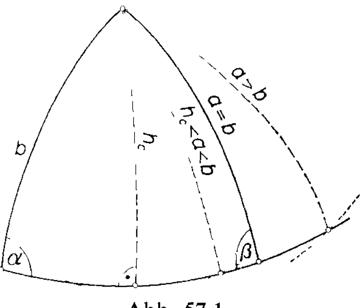


Abb. 57.1

Nimmt man in Aufgabe 5 (SSW) die Seiten a und b als spitz an[56], so läßt sich die Lösbarkeit ebenso wie für das ebene Dreieck diskutieren: Ist $a > b$, so ergibt sich für jeden Winkel eine Lösung; ist $a = b$, so wird $\triangle$ für $\alpha < 90°$ gleichschenkelig ($\alpha = \beta$). Ist $a < b$, so gibt es für $\alpha < 90°$ zwei Lösungen, eine oder keine Lösung, je nachdem, ob $a \gtreqless h_c$ ist, wobei h_c die sphärische Höhe von $\triangle$ bedeutet (vgl. Abb. 57.1). Die sechste Aufgabe ist durch Übergang zum Polardreieck ebenso wie die fünfte Aufgabe zu diskutieren.

58. Eine erste Ableitung für Sinus-, Seitenkosinus- und Sinus-Kosinus-Satz

Eine anschauliche Ableitung von drei fundamentalen Formeln ergibt sich mit Hilfe des Dreikantes oder des in [55] benützten Fünfflächners: Sowohl die Seiten als auch die Winkel des sphärischen Dreiecks treten als ebene Winkel zwischen geradlinigen Schenkeln auf. Betrachtet sei ein sphärisches Dreieck ABC auf der Einheitskugel mit Mittelpunkt M; legt man durch die Ecke C zwei Ebenen E_1 und E_2 senkrecht zu den Kanten $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$, die sich in $CZ \perp MAB$ schneiden, so entsteht der Fünfflächner $MPZQC$

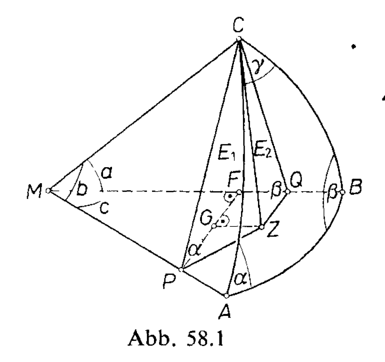


Abb. 58.1

[56] Sind a und b stumpf, so kann man statt $\triangle$ das Nebendreieck $\triangle_3$ betrachten, dessen Seiten a_3 und b_3 spitz sind; ist a stumpf, b spitz, so hilft das Nebendreieck $\triangle_2$.

(Abb. 58.1). Mit $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = 1$ erhält man aus den bei P bzw. Q rechtwinkligen Dreiecken MPC bzw. MQC

$$\overline{CP} = \sin b, \quad \overline{MP} = \cos b, \quad \overline{CQ} = \sin a, \quad \overline{MQ} = \cos a.$$

Die bei Z rechtwinkligen Dreiecke ZPC und ZQC geben

$$\overline{ZP} = \sin b \cos \alpha, \quad \overline{ZC} = \sin b \sin \alpha, \quad \overline{ZC} = \sin a \sin \beta,$$
$$\overline{QZ} = \sin a \cos \beta.$$

Führt man noch die Projektionen F bzw. G von P auf $\overline{MB}$ bzw. von Z auf $\overline{PF}$ ein, so liefert das bei F rechtwinklige Dreieck PFM

$$\overline{MF} = \cos b \cos c, \quad \overline{PF} = \cos b \sin c,$$

und das bei G rechtwinklige Dreieck PZG gibt mit $\sphericalangle ZPG = c$ noch

$$\overline{GP} = \sin b \cos \alpha \cos c, \quad \overline{GZ} = \sin b \cos \alpha \sin c.$$

Damit lassen sich die d r e i F u n d a m e n t a l f o r m e l n angeben, wenn man noch die aus Abb. 58.1 ablesbaren Gleichungen anschreibt:

$$\text{(a)} \quad \overline{ZC} = \sin b \sin \alpha = \sin a \sin \beta,$$
$$\text{(b)} \quad \overline{MQ} = \overline{MF} + \overline{FQ} = \overline{MF} + \overline{GZ},$$
$$\text{(c)} \quad \overline{FP} = \overline{FG} + \overline{GP} = \overline{QZ} + \overline{GP}.$$

Aus der ersten Gleichung (a) folgt der *Sinussatz*, wenn man durch zyklische Vertauschung die Formeln

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}, \quad \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}, \quad \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{\sin a}{\sin \alpha} \tag{58.1a}$$

oder die fortlaufenden Proportionen

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \tag{58.1b}$$

oder die Formel

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \tag{58.1c}$$

aufstellt.

Aus der zweiten Gleichung (b) erhält man unter Beachtung der oben stehenden Beziehungen die Gleichung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

und durch zyklische Vertauschung noch

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta,$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \tag{58.2}$$

Die Formeln (58.2) nennt man den *Seitenkosinussatz* oder den *ersten Kosinussatz.* — Die einfache Bauweise der Formeln für den Sinus- und Kosinussatz erübrigt die Angabe von Merkregeln.

Aus der dritten Gleichung (c) folgt die Formel

$$\cos b \sin c = \sin a \cos \beta + \sin b \cos \alpha \cos c;$$

bringt man sie in die Form

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha,$$

so entsteht durch zyklische Vertauschung das Formeltripel

$$\begin{aligned} \sin a \cos \beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha, \\ \sin b \cos \gamma &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos \beta, \\ \sin c \cos \alpha &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma, \end{aligned} \tag{58.3}$$

das als der *Sinus-Kosinussatz* oder als die *Beziehung der fünf Sukzessivstücke* bezeichnet wird. — Leider ist außer der Eigenschaft, daß die Gleichungen (58.3) jeweils fünf aufeinanderfolgende Stücke enthalten, nämlich alle Seiten, aber nur zwei Winkel, keine für eine praktisch sinnvolle Merkregel geeignete Anordnung der Stücke zu erkennen.

Eine *Merkregel* gibt z. B. H. DÖRRIE, a.a.O. S. 313 an, die aber wenig befriedigt. Besser ist die folgende Merkformel: Numeriert man, jeweils mit einer Seite beginnend, dem Uhrzeigersinn folgend, fünf aufeinanderfolgende Stücke, so gilt:

$$\sin ① \cos ② = \cos ⑤ \sin ③ - \sin ⑤ \cos ③ \cos ④.$$

Wie in [59] noch zu zeigen ist, bleibt die Merkregel auch gültig, wenn man, wieder mit einer Seite beginnend, im Gegenuhrzeigersinn fünf aufeinanderfolgende Stücke numeriert, d. h., der Sinus-Kosinus-Satz besteht aus insgesamt 6 Gleichungen.

59. Eine weitere Ableitung für Sinus-, Seitenkosinus- und Sinus-Kosinus-Satz

Die in [58] mitgeteilten Ableitungen sind zwar anschaulich, haben aber den Nachteil, daß sie die allgemeine Gültigkeit der Formeln für beliebige Dreiecke nicht ohne weiteres erkennen lassen: Der Fünfflächner in Abb. 58.1 kommt nur für Seiten $a, b, c < 90°$ zustande, während in EULERschen Dreiecken auch Seiten $a, b, c > 90°$ auftreten. Es soll daher noch eine Entwicklung dieser Formeln durch Koordinatentransformation angegeben werden, bei der hinsichtlich der Größen der Seiten und Winkel keinerlei Voraussetzungen nötig sind.

Legt man die Ecke C einmal durch die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z und zum anderen durch die *Polarkoordinaten* r, a, β' fest (Abb. 59.1), wobei a den Winkel von $\overline{MC}$ gegen die z-Achse und β' den Winkel

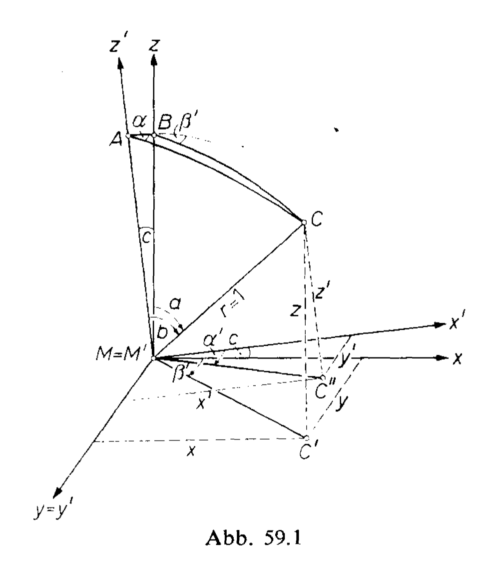


Abb. 59.1

von $\overline{MC'}$ gegen die x-Achse bedeutet, so gelten die Beziehungen

$$x = r \sin a \cos \beta',$$
$$y = r \sin a \sin \beta',$$
$$z = r \cos a.$$

In einem zweiten rechtwinkligen Koordinatensystem x', y', z' mit demselben Ursprung und derselben Ordinatenachse ($M' = M$, $y' = y$), aber mit einer gegen die x, y-Ebene um den Winkel c geneigten x', y'-Ebene, kommen der Ecke C die Koordinaten

$$x' = r \sin b \cos \alpha',$$
$$y' = r \sin b \sin \alpha',$$
$$z' = r \cos b$$

zu, wenn r, b und α' die Polarkoordinaten im neuen System bedeuten. Zwischen den Koordinaten der beiden Systeme bestehen nun die Beziehungen (vgl. Abb. 59.1)

$$x = x' \cos c - z' \sin c, \qquad y = y', \qquad z = z' \cos c + x' \sin c.$$

Ersetzt man darin x, y, z und x', y', z' nach den beiden ersten Gleichungsgruppen, so erhält man mit $r = 1$

$$\sin a \cos \beta' = \sin b \cos \alpha' \cos c - \cos b \sin c,$$
$$\sin a \sin \beta' = \sin b \sin \alpha',$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha'.$$

Legt man um den Scheitel M des von $\overline{MC}$, $\overline{MZ}$ und $\overline{MZ'}$ gebildeten Dreikants eine Einheitskugel, so erhält man ein sphärisches Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c (Abb. 59.1). Beachtet man noch, daß sich die Winkel α und β des Dreiecks ABC zu $\alpha = \alpha'$, $\beta = 180° - \beta'$ ergeben[57], so erhält man aus der letzten Formelgruppe

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha,$$
$$\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha, \qquad (59.1)$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

[57] Der Winkel zwischen den Seiten AB und BC ist (als Winkel zwischen der x, z-Ebene und der den Radius auf die x, y-Ebene projizierenden Ebene) gleich $\beta = 180° - \beta'$; in derselben Weise ergibt sich $\alpha = \alpha'$.

Die Gleichungen (59.1) stimmen mit den Ergebnissen von [58] überein. Somit sind der Sinus-, der Kosinus- und der Sinus-Kosinussatz allgemeingültig bewiesen.

Da man mit Hilfe der drei Formeln des Kosinussatzes zu drei beliebig gegebenen Stücken stets die drei fehlenden Stücke bestimmen kann und alle übrigen Formeln allein aus dem Kosinussatz entwickelt werden können, bezeichnet man den Kosinussatz als die Fundamentalformel für das sphärische Dreieck. (Vergl. [65]). -- Hingegen kann der Sinussatz des sphärischen Dreiecks nicht, wie der Sinussatz des ebenen Dreiecks, als eine der Hauptformeln gelten, aus der sich weitere Formeln ableiten lassen.

Der Sinus-Kosinussatz läßt sich auch aus dem Kosinussatz ableiten. Aus der zweiten und dritten Gleichung von (58.2) findet man

$$\sin a \cos \beta = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c}, \qquad \sin a \cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin b}.$$

Ersetzt man im ersten Ausdruck $\cos a$ nach der ersten Gleichung von (58.2), so wird daraus

$$\sin a \cos \beta = \frac{\cos b - \cos b \cos^2 c - \sin b \sin c \cos c \cos \alpha}{\sin c}$$

oder

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha.$$

Das ist der Sinus-Kosinussatz, woraus sich durch zyklisches Vertauschen das Formeltripel (58.3) ergibt. — Eine entsprechende Umformung des Ausdruckes für $\sin a \cos \gamma$ gibt

$$\sin a \cos \gamma = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha,$$

woraus durch zyklische Vertauschung noch das Formeltripel

$$\begin{aligned} \sin a \cos \gamma &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha, \\ \sin b \cos \alpha &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta, \\ \sin c \cos \beta &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos \gamma \end{aligned} \tag{59.2}$$

entsteht; der Sinus-Kosinussatz umfaßt also mit (58.3) und (59.2) ein System von sechs Gleichungen.[58]

Wegen der Bedeutung des Kosinussatzes soll für diese Grundformel auch noch eine vektorielle Ableitung angegeben werden. Faßt man die Kanten des zum sphärischen Dreieck ABC gehörigen Drei-

[58] Vgl. die in [58] angegebene Merkregel.

kantes als die von M ausgehenden Einheitsvektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ auf (Abb. 59.2), so lassen sich die Kosinusse der Seiten a, b, c als die Skalarprodukte

$$\cos a = (\boldsymbol{bc}), \qquad \cos b = (\boldsymbol{ac}), \qquad \cos c = (\boldsymbol{ab})$$

darstellen. Mit den in den Seitenflächen AMB, BMC und AMC liegenden und zu den Kanten senkrechten Tangenten-Einheitsvektoren $\boldsymbol{t}_{AB}$, $\boldsymbol{t}_{BA}$, $\boldsymbol{t}_{AC}$, $\boldsymbol{t}_{CA}$, ... an die Dreiecksseiten, die wie AB, BA, AC, CA, ... gerichtet sind, erhält man nach (Abb. 59.2 und 59.3) die Beziehungen

$$\boldsymbol{a} + \tan c\, \boldsymbol{t}_{AB} = \frac{\boldsymbol{b}}{\cos c} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{a} + \tan b\, \boldsymbol{t}_{AC} = \frac{\boldsymbol{c}}{\cos b}.$$

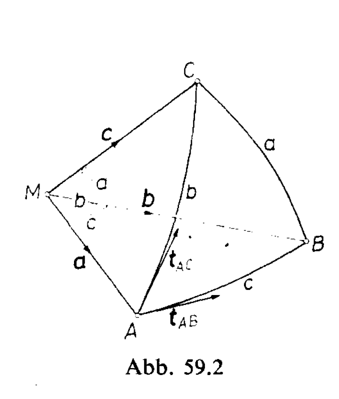


Abb. 59.2

Abb. 59.3

Die skalare Multiplikation der daraus folgenden Vektorgleichungen

$$\tan c\, \boldsymbol{t}_{AB} = \frac{1}{\cos c}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \qquad \tan b\, \boldsymbol{t}_{AC} = \frac{1}{\cos b}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$$

gibt

$$\tan c \tan b\, (\boldsymbol{t}_{AB}\boldsymbol{t}_{AC}) = \frac{1}{\cos c \cos b}(\boldsymbol{bc}) + (\boldsymbol{aa}) - \frac{1}{\cos c}(\boldsymbol{ba}) - \frac{1}{\cos b}(\boldsymbol{ac}),$$

und wegen $(\boldsymbol{t}_{AB}\boldsymbol{t}_{AC}) = \cos\alpha$ wird daraus

$$\tan c \tan b \cos\alpha = \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + 1 - \frac{\cos c}{\cos c} - \frac{\cos b}{\cos b}.$$

Mit $\cos b \cos c$ multipliziert und umgestellt ergibt sich endlich

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha.$$

Dies ist wieder der Kosinussatz für die Seiten, wie der Vergleich mit der ersten Formel von (58.2) zeigt. — A u c h d e r S i n u s s a t z l ä ß t s i c h v e k t o r i e l l a b l e i t e n. Dafür ist das Vektorprodukt der Tangenteneinheitsvektoren $\boldsymbol{t}_{AB}$ und $\boldsymbol{t}_{AC}$ zu bilden; nach Abb. 59.2 gilt

dafür $[t_{AB}t_{AC}] = a \sin \alpha$, und mit

$$\tan c\, t_{AB} = \frac{1}{\cos c} b - a \quad \text{und} \quad \tan b\, t_{AC} = \frac{1}{\cos b} c - a$$

wird daraus

$$[bc] - \cos b [ba] - \cos c [ac] = a \sin b \sin c \sin \alpha;$$

die skalare Multiplikation mit a liefert schließlich

$$(a[bc]) = \sin b \sin c \sin \alpha.$$

Ebenso findet man

$$(b[ca]) = \sin c \sin a \sin \beta, \quad (c[ab]) = \sin a \sin b \sin \gamma.$$

Nach den Regeln der Vektorrechnung sind die links stehenden Produkte $(a[bc])$, $(b[ca])$, $(c[ab])$ dieser Gleichungen einander gleich, so daß daraus wieder der Sinussatz folgt:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

60. Winkelkosinussatz, polarer Sinus-Kosinussatz und Kotangenssatz

Nach den Überlegungen zum Polardreieck können durch *polare Übertragung (Polarisation)* entweder bekannte Sätze in einfacher Weise bestätigt oder auch neue Formeln gewonnen werden. — Die polare Übertragung des Sinussatzes liefert, wenn z. B. in (58.1c) die Seiten a, b, c und Winkel α, β, γ des Ausgangsdreiecks durch die Stücke $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ und $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ des Polardreiecks ersetzt werden:

$$\sin (180° - \bar{\alpha}) : \sin (180° - \bar{\beta}) : \sin (180° - \bar{\gamma})$$
$$= \sin (180° - \bar{a}) : \sin (180° - \bar{b}) : \sin (180° - \bar{c})$$

oder

$$\sin \bar{\alpha} : \sin \bar{\beta} : \sin \bar{\gamma} = \sin \bar{a} : \sin \bar{b} : \sin \bar{c}.$$

Durch die polare Übertragung entsteht also der Sinussatz des Polardreiecks, d. h., *der Sinussatz ist zu sich selbst polar.*

Statt der dualen Übertragung kann man auch so verfahren, daß die für das Ausgangsdreieck gültigen Beziehungen unmittelbar auf das Polardreieck angewendet und dann dessen Stücke durch die des Ausgangsdreiecks ersetzt werden.

Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß alle so neu entstehenden Beziehungen wieder die Stücke des „Ausgangsdreiecks" enthalten.

Der Sinussatz liefert für das Polardreieck zunächst

$$\sin \bar{\alpha} : \sin \bar{\beta} : \sin \bar{\gamma} = \sin \bar{a} : \sin \bar{b} : \sin \bar{c},$$

woraus mit (54.1) und (54.2) folgt:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Der Seitenkosinussatz, z. B. die erste Gleichung von (58.2), liefert für das Polardreieck

$$\cos \bar{a} = \cos \bar{b} \cos \bar{c} + \sin \bar{b} \sin \bar{c} \cos \bar{\alpha}$$

und mit (54.1) und (54.2)

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

Dies ist der *Winkelkosinussatz* oder der *zweite Kosinussatz*, der wieder ein Formeltripel umfaßt, das entweder durch entsprechende Behandlung der restlichen Gleichungen von (58.2), einfacher jedoch durch zyklische Vertauschung aus der obigen Gleichung entsteht:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a, \\ \cos \beta &= -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b, \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c. \end{aligned} \tag{60.1}$$

Eine Merkregel ist auch für die Formel (60.1), die bis auf das Vorzeichen völlig mit dem Seitenkosinussatz übereinstimmt, entbehrlich.

Der Sinus-Kosinus-Satz gibt für das Polardreieck, wenn z. B. die erste Gleichung von (58.3) benützt wird,

$$\sin \bar{a} \cos \bar{\beta} = \cos \bar{b} \sin \bar{c} - \sin \bar{b} \cos \bar{c} \cos \bar{\alpha}$$

oder

$$\begin{aligned} \sin (180° - \alpha) \cos (180° - b) &= \cos (180° - \beta) \sin (180° - \gamma) \\ &\quad - \sin (180° - \beta) \cos (180° - \gamma) \cos (180° - a), \end{aligned}$$

und schließlich

$$\sin \alpha \cos b = \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos a.$$

Durch zyklische Vertauschung oder analoge Behandlung der beiden anderen Gleichungen von (58.3) entsteht das Formeltripel

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos b &= \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos a, \\ \sin \beta \cos c &= \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha \cos b, \\ \sin \gamma \cos a &= \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \cos c. \end{aligned} \tag{60.2a}$$

In derselben Weise kann mit den Gleichungen (59.2) verfahren werden, wodurch man

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos c &= \cos \gamma \sin \beta + \sin \gamma \cos \beta \cos a, \\ \sin \beta \cos a &= \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \cos b, \\ \sin \gamma \cos b &= \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha \cos c \end{aligned} \tag{60.2b}$$

erhält. Die Formeln (60.2) nennt man den *polaren Sinus-Kosinussatz* oder die *zweite Fünferbeziehung*, die alle Winkel und zwei Seiten des Dreiecks enthält. Eine neue Merkformel erübrigt sich: Die sechs Gleichungen können dadurch rekonstruiert werden, daß man die für den Sinus-Kosinussatz angegebene Merkformel auf das Polardreieck anwendet.

Aus dem Sinus-Kosinussatz folgt mit Hilfe des Sinussatzes noch der *Kotangenssatz*, der eine Beziehung zwischen vier aufeinanderfolgenden Stücken des sphärischen Dreiecks herstellt. Ersetzt man z. B. in der ersten Gleichung von (58.3) $\sin a$ nach dem Sinussatz durch
$\sin a = \sin b \sin \alpha / \sin \beta$, so wird daraus

$$\sin b \sin \alpha \cot \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha$$

oder nach Division durch $\sin b$

$$\sin \alpha \cot \beta = \cot b \sin c - \cos c \cos \alpha .$$

Ähnlich gibt die erste Gleichung von (59.2)

$$\sin \alpha \cot \gamma = \cot c \sin b - \cos b \cos \alpha .$$

Die zyklische Vertauschung in beiden Gleichungen liefert ein System von sechs Gleichungen, das als der *Kotangenssatz* bezeichnet wird, weil in jeder Gleichung der Kotangens zweimal auftritt:

$$\begin{aligned}
\sin \alpha \cot \beta &= \cot b \sin c - \cos c \cos \alpha , \\
\sin \alpha \cot \gamma &= \cot c \sin b - \cos b \cos \alpha , \\
\sin \beta \cot \gamma &= \cot c \sin a - \cos c \cos \beta , \\
\sin \beta \cot \alpha &= \cot a \sin c - \cos \quad \cos \beta , \\
\sin \gamma \cot \alpha &= \cot a \sin b - \cos b \cos \gamma , \\
\sin \gamma \cot \beta &= \cot b \sin a - \cos a \cos \gamma .
\end{aligned} \qquad 50.3)$$

Für den Kotangenssatz, der zunächst keine symmetrische Bauweise erkennen läßt, können auch *Merkregeln* bzw. *Merkformeln* angegeben werden.

Zunächst eine *Merkregel*, die auf C. F. Gauss zurückgeht (vgl. H. Dörrie, a.a.O. S. 312): Bringt man z. B. die erste Gleichung von (60.3) in die Form

$$\cos c \cos \alpha = \sin c \cot b - \sin \alpha \cot \beta ,$$

so erkennt man die folgende mnemotechnische Merkregel: Das Kosinusprodukt der Innenstücke ist gleich dem Produkt aus dem Sinus der Innenseite und dem Kotangens der Außenseite, vermindert um das Produkt aus dem Sinus des Innenwinkels und dem Kotangens des Außenwinkels. Hier noch eine *Merkformel:* Bringt man die Gleichung in die Form

$$\cot b \sin c = \cos \alpha \cos c + \sin \alpha \cot \beta$$

und numeriert, mit der Seite b beginnend, im Gegenuhrzeigersinn vier aufeinanderfolgende Stücke, so gilt die Formel

$$\cot ① \sin ③ = \cos ② \cos ③ + \sin ② \cot ④.$$

Diese Merkformel liefert auch die übrigen fünf Gleichungen von (60.3), wenn man, stets mit einer Seite beginnend, im Uhrzeiger- oder Gegenuhrzeigersinn vier aufeinanderfolgende Stücke numeriert.

Wendet man den Kotangenssatz auf das Polardreieck an, so erhält man aus (60.3) unter Beachtung von (54.1) und (54.2) das Formelsystem

$$\begin{aligned}
\sin a \cot b &= \cot \beta \sin \gamma + \cos \gamma \cos a,\\
\sin a \cot c &= \cot \gamma \sin \beta + \cos \beta \cos a,\\
\sin b \cot c &= \cot \gamma \sin \alpha + \cos \alpha \cos b,\\
\sin b \cot a &= \cot \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \cos b,\\
\sin c \cot a &= \cot \alpha \sin \beta + \cos \beta \cos c,\\
\sin c \cot b &= \cot \beta \sin \alpha + \cos \alpha \cos c,
\end{aligned}$$

das mit (60.3) übereinstimmt; *der Kotangenssatz ist also zu sich selbst polar.*

61. Die Bedeutung der Grundformeln für die Lösung sphärischer Dreiecksaufgaben

Ehe in Kapitel 12 die Berechnung des allgemeinen sphärischen Dreiecks durchgeführt wird, soll hier noch kurz die Anwendbarkeit der Grundformeln diskutiert werden. — Die Kongruenzsätze besagen, daß ein Dreikant bzw. ein sphärisches Dreieck durch drei Stücke festgelegt ist. Ebenso zeigen die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, daß aus drei gegebenen Stücken immer wieder eine vierte, somit jede gewünschte weitere Größe berechnet werden kann.

Der Sinussatz ist anzuwenden, wenn zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen (SSW), z. B. a, b und α, gegeben sind und der Gegenwinkel β der anderen gesucht wird; β ergibt sich aus

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a} \sin \alpha,$$

falls man noch weiß, ob β spitz oder stumpf ist. Im Zweifelsfall hat man *zwei Lösungen*[59]. Er wird auch benützt, wenn zwei Winkel, z. B. α, β und die Gegenseite a des einen gegeben sind (WWS); die Gegenseite b des

[59] Eine ausführliche Diskussion der doppeldeutigen Fälle wird in [67] besorgt.

anderen wird dann

$$\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin a.$$

Auch hier ist eine doppeldeutige Lösung möglich.

Sind zwei Seiten und der Zwischenwinkel (SWS), z. B. a, b und γ, gegeben, so liefert der Seitenkosinussatz die dritte Seite c zu

$$\cos c = \cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma.$$

Sind die drei Seiten (SSS) gegeben, so ergeben sich die Winkel α, β, γ durch Auflösung der Gleichungen des Seitenkosinussatzes nach $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ zu

$$\cos\alpha = \frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}, \quad \cos\beta = \frac{\cos b-\cos c\cos a}{\sin c\sin a},$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}.$$

Ebenso ist der Winkelkosinussatz anzuwenden, wenn zwei Winkel und die Zwischenseite (WSW), z. B. α, β und c gegeben sind und der dritte Winkel γ gesucht wird:

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos c.$$

Sind die drei Winkel (WWW) gegeben, so liefern die nach $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ aufgelösten Gleichungen des Winkelkosinussatzes

$$\cos a = \frac{\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}, \quad \cos b = \frac{\cos\gamma\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\gamma\sin\alpha},$$

$$\cos c = \frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Der Kotangenssatz ist immer dann zweckmäßig, wenn zwei Winkel und die Zwischenseite (WSW), z. B. α, β und c, gegeben sind und eine weitere Seite, z. B. a, gesucht wird. Die vierte Gleichung von (60.3) gibt dann

$$\cot a = \frac{\cos\beta\cos c+\sin\beta\cot\alpha}{\sin c}.$$

Ganz ähnlich ist zu verfahren, wenn zwei Seiten und der Zwischenwinkel (SWS), z. B. a, b und γ, gegeben sind und ein weiterer Winkel, z. B. α, gesucht wird. Aus der fünften Gleichung von (60.3) erhält man

$$\cot\alpha = \frac{\cot a\sin b-\cos\gamma\cos b}{\sin\gamma}.$$

Der Sinus-Kosinussatz wird vorwiegend zu strengen Formelableitungen und -umformungen benützt, insbesondere in der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie.

Obgleich also die Grundformeln zur Berechnung des allgemeinen sphärischen Dreiecks ausreichen, werden sie praktisch kaum benützt: Der Sinussatz liefert im allgemeinen keine eindeutige Lösung, und die übrigen Sätze ermöglichen — zumindest ohne Umformung[60] — keine durchgehende logarithmische Rechnung. Man muß daher ebenso wie in der ebenen Trigonometrie logarithmierbare Formeln ableiten, wobei die Halbseiten- und Halbwinkelformeln von besonderer Bedeutung sind.

62. Ungleichungen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks

Ungleichungen zwischen den Seiten und Winkeln sind sowohl für die spätere Ableitung der Halbstückrelationen (vgl. [63]) als auch bei der Diskussion der Dreiecksaufgaben von großer Hilfe. — Einige Seiten- und Winkelungleichungen konnten schon bei der Aufstellung der Kongruenzsätze für das Dreikant bzw. das sphärische Dreieck an Hand geometrischer Überlegungen gewonnen werden; mit Hilfe der jetzt verfügbaren Grundformeln können die Ungleichungen bestätigt und ergänzt werden.

Zunächst zur Ableitung der *Seitenungleichungen:* Der Seitenkosinussatz

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

gibt wegen $\cos \gamma < 1$ die Ungleichung

$$\cos c < \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

oder

$$\cos c < \cos (a-b), \text{ wenn } a \geqq b.$$

Da für die Seiten voraussetzungsgemäß $a, b, c < 180°$ gilt und somit auch $a-b \leqq 180°$ sein muß, folgt daraus $c > a-b$. In gleicher Weise erhält man aus dem Seitenkosinussatz die Ungleichungen $a > b-c$ und $b > c-a$, d. h. jede Seite ist größer als die Differenz der beiden anderen. Schreibt man die Ungleichungen in der Form $b+c > a$, $c+a > b$, $a+b > c$, so bestätigt sich, daß die Summe zweier Seiten stets größer ist als die dritte.

[60] Vgl. die Bemerkungen zur Methode der Hilfswinkel in [47].

Eine weitere Seitenungleichung erhält man, wenn im Seitenkosinussatz

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

die Stücke a, c und γ durch die Supplemente $a' = 180° - a$, $c' = 180° - c$ und $\gamma' = 180° - \gamma$ ersetzt werden; wegen $\cos a = -\cos a'$, $\cos c = -\cos c'$, $\cos \gamma = -\cos \gamma'$, $\sin a = \sin a'$ wird daraus

$$-\cos c' = -\cos a' \cos b - \sin a' \sin b \cos \gamma'.$$

Wegen $\cos \gamma' < 1$ entsteht daraus die Ungleichung

$$\cos c' < \cos a' \cos b + \sin a' \sin b,$$

also ist

$$\cos c' < \cos (a' - b) = \cos (b - a').$$

Da eine der beiden Differenzen $(a' - b)$ und $(b - a')$ positiv und $< 180°$, die andere negativ ist und auch $c' < 180°$ sein muß, folgt daraus $c' > a' - b$ und $c' > b - a'$.

Die beiden Ungleichungen führen mit $c' = 180° - c$ und $a' = 180° - a$ wieder auf

$$a + b > c \quad \text{und} \quad a + b + c < 360°.$$

Zusammengenommen ergibt sich daraus die Beziehung

$$c < a + b < 360° - c, \tag{62.1}$$

wonach die Summe zweier Seiten stets größer ist als die dritte Seite, aber kleiner als deren Implement.

Für die *Winkelungleichungen* liefert der Winkelkosinussatz

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c,$$

wenn man α durch sein Supplement α' ersetzt

$$\cos \gamma = \cos \alpha' \cos \beta + \sin \alpha' \sin \beta \cos c.$$

Mit $\cos c < 1$ folgt daraus

$$\cos \gamma < \cos (\alpha' - \beta) = \cos (\beta - \alpha').$$

Da einer der Winkel $(\alpha' - \beta)$ und $(\beta - \alpha')$ positiv und konkav, der andere negativ und auch $< 180°$ ist, folgt daraus $\gamma > \alpha' - \beta$ und $\gamma > \beta - \alpha'$. Mit $\alpha' = 180° - \alpha$ führen diese Ungleichungen auf

$$\alpha + \beta + \gamma > 180° \quad \text{und} \quad \alpha + \beta < 180° + \gamma,$$

bestätigen also die in [56] angegebenen Sätze. Die Zusammenfassung der

beiden Ungleichungen gibt noch

$$180^\circ - \gamma < \alpha + \beta < 180^\circ + \gamma; \tag{62.2}$$

d. h., die Summe zweier Winkel liegt stets zwischen dem Supplement des dritten Winkels und dem um 180° vermehrten dritten Winkel.

Ungleichungen zwischen den Seiten und Winkeln ergeben sich aus den Seitenkosinussätzen; löst man z. B. die erste bzw. zweite Gleichung von (58.2) nach $\cos\alpha$ bzw. $\cos\beta$ auf,

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin c \sin b}, \quad \cos\beta = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a},$$

so folgt daraus für $a = b$ die Gleichheit der Winkel α und β. Ebenso folgt aus den nach $\cos a$ bzw. $\cos b$ aufgelösten Winkelkosinussätzen (erste und zweite Gleichung von (60.1))

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\gamma \cos\beta}{\sin\gamma \sin\beta}, \quad \cos b = \frac{\cos\beta + \cos\gamma \cos\alpha}{\sin\gamma \sin\alpha},$$

für $\alpha = \beta$ die Gleichheit der Seiten a und b. Auch im gleichschenkligen sphärischen Dreieck liegen also gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt.

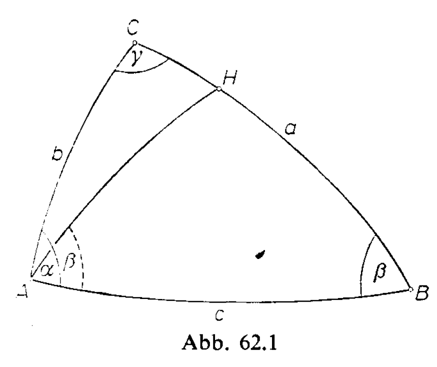


Abb. 62.1

Auch der Satz, wonach dem größeren Winkel die größere Seite und umgekehrt der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt, ist einfach zu beweisen. Im $\triangle ABC$ sei $\alpha > \beta$ (Abb. 62.1); trägt man in A auch $\beta < \alpha$ ab, so gilt im $\triangle ABH$, wenn der freie Schenkel von β die Seite BC in H schneidet, $\sphericalangle HAB = \sphericalangle HBA$, also auch $AH = BH$. Im $\triangle ACH$ ist $AH + HC > b$, und da $AH + HC = BH + HC = a$ ist, gilt auch $a > b$, womit der Satz bewiesen ist. — Ist umgekehrt $a > b$, so würden $\alpha = \beta$ und $\alpha < \beta$ auf einen Widerspruch führen, d. h. es muß $\alpha > \beta$ sein.

Jetzt kann auch der in [56] mitgeteilte Satz, wonach die Summe zweier Seiten und die Summe ihrer Gegenwinkel stets gleichartige, also konkave, gestreckte oder konvexe Winkel sind, bequem nachgewiesen werden. Aus dem Sinussatz $\sin\alpha : \sin\beta = \sin a : \sin b$ folgt durch korrespondierende Subtraktion

$$\frac{\sin a - \sin b}{\sin b} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\beta}$$

und mit Hilfe der Verwandlungsformeln

$$\frac{\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{\sin b} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\beta}.$$

Da in EULERschen Dreiecken stets $b, \beta < 180°$, also $\sin b, \sin\beta > 0$ ist und, wie soeben nachgewiesen wurde, für $a \gtrless b$ auch $\alpha \gtrless \beta$ ist, $\sin\{(a-b)/2\}$ und $\sin\{(\alpha-\beta)/2\}$ also gleiche Vorzeichen haben, müssen auch $\cos\{(a+b)/2\}$ und $\cos\{(\alpha+\beta)/2\}$ gleiche Vorzeichen aufweisen. Also liegen $(a+b)/2$ und $(\alpha+\beta)/2$ und somit auch $a+b$ und $\alpha+\beta$ stets im gleichen Quadranten.

Schließlich seien zur Vorbereitung der Halbwinkelformeln noch die Winkel $\sigma_\alpha = \sigma-\alpha$, $\sigma_\beta = \sigma-\beta$, $\sigma_\gamma = \sigma-\gamma$ mit $\sigma = (\alpha+\beta+\gamma)/2$ betrachtet. Aus der Winkelungleichung $\alpha+\beta < 180°+\gamma$ folgt $\alpha+\beta-\gamma = 2(\sigma-\gamma) = 2\sigma_\gamma < 180°$. Da aber sicher $\alpha+\beta-\gamma > -180°$ ist, ergeben sich für σ_γ die Grenzen

$$-90° < \sigma_\gamma < 90°.$$

Dieselben Grenzen erhält man für die Winkel σ_α, σ_β; also gilt

$$-90° < \left\{\begin{matrix}\sigma_\alpha\\ \sigma_\beta\\ \sigma_\gamma\end{matrix}\right\} < 90°,$$

d. h. die Winkel σ_α, σ_β, σ_γ sind stets positive oder negative spitze Winkel, ihre Kosinusse sind positive Zahlen.

Kapitel 11: Die logarithmierbaren Formeln des sphärischen Dreiecks

63. Die Halbstückrelationen

Auch für das sphärische Dreieck läßt sich eine dem Tangenssatz des ebenen Dreiecks entsprechende Beziehung angeben; denn aus dem Sinussatz

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

erhält man durch korrespondierende Addition und Subtraktion

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$$

oder mit Hilfe der Verwandlungsformeln

$$\frac{\sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}},$$

und schließlich

$$\frac{\tan \frac{a+b}{2}}{\tan \frac{a-b}{2}} = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}. \tag{63.1}$$

Durch zyklische Vertauschung in (63.1) erhält man die drei Formeln des *Tangenssatzes,* die aber bei der praktischen Rechnung kaum Verwendung finden.

Weit wichtiger sind die *Halbwinkel-* und *Halbseitensätze.* Zunächst werden die Halbwinkel $\alpha/2$, $\beta/2$, $\gamma/2$ betrachtet. Ausgehend von der aus dem Additionstheorem $1-\cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2)$ folgenden Beziehung $\sin^2(\alpha/2) = (1-\cos\alpha)/2$ erhält man, wenn $\cos\alpha$ mit Hilfe des Seitenkosinussatzes in der Form

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

geschrieben wird,

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right]=\frac{\sin b\sin c+\cos b\cos c-\cos a}{2\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{2\sin b\sin c}=\frac{\sin\dfrac{b+a-c}{2}\sin\dfrac{a+c-b}{2}}{\sin b\sin c},$$

und mit $s=(a+b+c)/2$ endlich

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}.$$

Ebenso erhält man aus $\cos^2(\alpha/2)=(1+\cos\alpha)/2$ eine Kosinusbeziehung für den Halbwinkel,

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}},$$

und schließlich durch Division der beiden Formeln

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}.$$

Die zyklische Vertauschung in diesen drei Gleichungen liefert, wenn zur Abkürzung noch $s_a=s-a$, $s_b=s-b$ und $s_c=s-c$ benützt wird, die drei Formelgruppen, die als *Halbwinkelsätze* bezeichnet werden:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s_b\sin s_c}{\sin b\sin c}},\quad \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin s_c\sin s_a}{\sin c\sin a}},\quad \sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin s_a\sin s_b}{\sin a\sin b}},\tag{63.2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin s_a}{\sin b\sin c}},\quad \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin s_b}{\sin c\sin a}},\quad \cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin s_c}{\sin a\sin b}},\tag{63.3}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s_b\sin s_c}{\sin s\sin s_a}},\quad \tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin s_c\sin s_a}{\sin s\sin s_b}},\quad \tan\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin s_a\sin s_b}{\sin s\sin s_c}}.\tag{63.4}$$

Entsprechend lassen sich die *Halbseitensätze* ableiten; ersetzt man in

$$\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1-\cos a}{2}\quad\text{und}\quad\cos^2\frac{a}{2}=\frac{1+\cos a}{2}$$

$\cos a$ nach dem Winkelkosinussatz durch

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

so ergeben sich der Sinus, Kosinus und Tangens der halben Seite mit $\sigma = (\alpha+\beta+\gamma)/2$ zu

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$\tan\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}.$$

Die zyklische Vertauschung dieser Gleichungen gibt, wenn noch die Abkürzungen $\sigma_\alpha = \sigma-\alpha$, $\sigma_\beta = \sigma-\beta$ und $\sigma_\gamma = \sigma-\gamma$ benützt werden, die drei Formelgruppen des *Halbseitensatzes:*

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos\sigma_\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}, \quad \sin\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos\sigma_\beta}{\sin\gamma\sin\alpha}}, \quad \sin\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos\sigma_\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}} \tag{63.5}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos\sigma_\beta\cos\sigma_\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}}, \quad \cos\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos\sigma_\gamma\cos\sigma_\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}}, \quad \cos\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos\sigma_\alpha\cos\sigma_\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}. \tag{63.6}$$

$$\tan\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos\sigma_\alpha}{\cos\sigma_\beta\cos\sigma_\gamma}}, \quad \tan\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos\sigma_\beta}{\cos\sigma_\gamma\cos\sigma_\alpha}}, \quad \tan\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos\sigma_\gamma}{\cos\sigma_\alpha\cos\sigma_\beta}} \tag{63.7}$$

Die Gleichungen (63.5) bis (63.7) ergeben sich in einfacher Weise auch durch Polarisation der Gleichungen (63.2) bis (63.4); das bedeutet, daß Halbwinkel- und Halbseitensatz zueinander polar sind.

Zum Beispiel lautet die erste Gleichung von (63.4) für das Polardreieck:

$$\tan\frac{\bar\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin\bar s_b\sin\bar s_c}{\sin\bar s\sin\bar s_a}} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\bar a-\bar b+\bar c}{2}\sin\frac{\bar a+\bar b-\bar c}{2}}{\sin\frac{\bar a+\bar b+\bar c}{2}\sin\frac{-\bar a+\bar b+\bar c}{2}}}.$$

Mit $\quad \bar\alpha = 180° - a, \quad \bar a = 180° - \alpha, \quad \bar b = 180° - \beta, \quad \bar c = 180° - \gamma$

und $\quad \bar a - \bar b + \bar c = 180° - 2(\sigma-\beta) = 180° - 2\sigma_\beta, \quad \bar a + \bar b - \bar c = 180° - 2\sigma_\gamma,$

$\bar a + \bar b + \bar c = 540° - 2\sigma, \quad -\bar a + \bar b + \bar c = 180° - 2\sigma_\alpha$

folgt daraus

$$\tan\left(90°-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin(90°-\sigma_\beta)\sin(90°-\sigma_\gamma)}{\sin(270°-\sigma)\sin(90°-\sigma_\alpha)}}=\sqrt{\frac{\cos\sigma_\beta\cos\sigma_\gamma}{-\cos\sigma\cos\sigma_\alpha}},$$

und schließlich

$$\tan\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos\sigma_\alpha}{\cos\sigma_\beta\cos\sigma_\gamma}}.$$

Da die linken Seiten in allen Formeln der Halbwinkel- und Halbseitensätze positive Größen sind, ist das Wurzelzeichen stets positiv zu nehmen. Die Minuszeichen unter den Wurzeln von (63.5) und (63.7) erklären sich daraus, daß die Winkelsumme $\alpha+\beta+\gamma=2\sigma$ im sphärischen Dreieck zwei Rechte überschreitet, σ also stumpf und $\cos\sigma$ negativ ist. Durch die Halbwinkel- und Halbseitensätze sind die Winkel bzw. Seiten einerseits und die Seiten bzw. Winkel andererseits in Beziehung gebracht, und zwar in einer für die logarithmische Rechnung bequemen Form.

64. Die Gleichungen von DELAMBRE und von NEPER

Die Gleichungen von DELAMBRE und von NEPER für das sphärische Dreieck entsprechen den MOLLWEIDEschen und NEPERschen Formeln des ebenen Dreiecks.

Die *Gleichungen von* DELAMBRE[61] bilden ein System von vier Gleichungen über den Sinus und Kosinus der Halbsumme und Halbdifferenz zweier Winkel bzw. Seiten, woraus durch zyklische Vertauschung ein System von insgesamt zwölf Gleichungen entsteht. Die einfachste Ableitung ist die folgende[62]: Drückt man in dem Additionstheorem

$$\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\mp\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

die Sinusse und Kosinusse der halben Winkel mit Hilfe der Halbwinkelsätze aus, so wird

$$\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin s_a}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin s\sin s_b}{\sin c\sin a}}\mp\sqrt{\frac{\sin s_b\sin s_c}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin s_c\sin s_a}{\sin c\sin a}}$$

$$=\frac{\sin s}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s_a\sin s_b}{\sin a\sin b}}\mp\frac{\sin s_c}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s_a\sin s_b}{\sin a\sin b}}$$

---

[61] Nahezu gleichzeitig und unabhängig auch von GAUSS und MOLLWEIDE entdeckt (nach E. HAMMER, a.a.O. S. 450: Von DELAMBRE 1807, von MOLLWEIDE 1808 und von GAUSS 1809 veröffentlicht) und daher oft auch als MOLLWEIDEsche oder GAUSSsche Formeln bezeichnet.

[62] Andere Ableitungen finden sich z. B. bei G. HESSENBERG, a.a.O. S. 131, H. ATHEN, a.a.O. S. 59 f., wobei in letzterem Falle der Sinus-Kosinus- und der Sinus satz benützt werden.

oder

$$\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\frac{\sin\dfrac{\gamma}{2}}{\sin c}[\sin s\mp\sin s_c].$$

Die Verwandlungsformeln liefern für den Klammerausdruck

$$\begin{aligned}\sin s-\sin s_c&=\sin s-\sin(s-c)\\&=2\cos\frac{2s-c}{2}\sin\frac{c}{2}=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{c}{2},\\ \sin s+\sin s_c&=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{c}{2}.\end{aligned}$$

Setzt man noch $\sin c=2\sin(c/2)\cos(c/2)$, so wird aus $\cos\{(\alpha\pm\beta)/2\}$ jetzt

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}},\quad \cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\dfrac{\gamma}{2}\sin\dfrac{a+b}{2}}{\sin\dfrac{c}{2}}$$

oder, wenn man die Halbwinkel voranstellt,

$$\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a+b}{2}=\cos\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a+b}{2}=\sin\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

In analoger Weise findet man, ausgehend von $\sin\{(\alpha\pm\beta)/2\}$, die Gleichungen

$$\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a-b}{2}=\cos\frac{c}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a-b}{2}=\sin\frac{c}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Durch zyklische Vertauschung ergibt sich daraus das System der zwölf Delambre*schen Gleichungen*, das in folgender Form geschrieben werden soll:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b+c}{2}=\sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2},\quad \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b+c}{2}=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2}=\sin\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2},\quad \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2}=\cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

(64.1a)

$$\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{c+a}{2}=\sin\frac{b}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2},\quad \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{c+a}{2}=\cos\frac{b}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2},$$

$$\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{c-a}{2}=\sin\frac{b}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2},\quad \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{c-a}{2}=\cos\frac{b}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

(64.1b)

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a+b}{2}=\sin\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a+b}{2}=\cos\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a-b}{2}=\sin\frac{c}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a-b}{2}=\cos\frac{c}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

(64.1c)

Aus (64.1) lassen sich durch Polarisation keine neuen Gleichungen mehr gewinnen: In den Formeln (64.1a) bis (64.1c) sind jeweils die erste und vierte Gleichung zueinander polar, während die zweite und dritte Gleichung je zu sich selbst polar sind.

Jede der zwölf DELAMBREschen Gleichungen enthält alle sechs Stücke des sphärischen Dreiecks; eine Dreiecksberechnung ist also mit den Formeln (64.1) nicht möglich.

Nach G. HESSENBERG (a.a.O. S. 132) dürfte unter den mnemotechnischen Hilfsmitteln für die DELAMBREschen Gleichungen die „*vox memoralis*" von OPPEL (Leitfaden für den geometrischen Unterricht 1878) die beste sein: Bringt man z. B. die Formelgruppe (64.1c) in die Form

$$\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}},\quad \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}},\quad \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}},$$

so lassen sich alle vier Formeln durch das gemeinsame Schema

$$\frac{*\frac{\gamma}{2}}{*\frac{1}{2}(\alpha*\beta)}=\frac{*\frac{c}{2}}{*\frac{1}{2}(a*b)}$$

darstellen. Lediglich die an die Stelle der Sterne zu setzenden Funktions- und Vorzeichen merkt man sich mittels der Abkürzungen co(sinus), si(nus), p(lus), m(inus); für die erste Formel ergibt sich damit sicom = sisip, für die zweite sicop = cocop. Entsprechend lauten die Abkürzungen für die dritte und vierte Formel cosim = sisim bzw. cosip = cocom. Dabei genügt es, eine der Abkürzungen, z. B. die zweite, zu behalten; die anderen entstehen daraus, indem man auf einer Seite co mit si, auf der anderen p mit m vertauscht.

Die Bedeutung der DELAMBREschen Gleichungen liegt vielmehr darin, daß sie nicht nur die Herleitung der NEPER*schen* und L'HUILIER-SERRET*schen Gleichungen* ermöglichen (vgl. [65]), sondern auch gute Möglichkeiten für Kontrollrechnungen bieten.

Dividiert man in jeder Zeile der Formelgruppe (64.1) die linke durch die rechte Gleichung, so erhält man:

$$\tan\frac{b+c}{2} = \tan\frac{a}{2}\,\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}, \quad \tan\frac{b-c}{2} = \tan\frac{a}{2}\,\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}},$$

$$\tan\frac{c+a}{2} = \tan\frac{b}{2}\,\frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}}, \quad \tan\frac{c-a}{2} = \tan\frac{b}{2}\,\frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}}, \tag{64.2}$$

$$\tan\frac{a+b}{2} = \tan\frac{c}{2}\,\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}, \quad \tan\frac{a-b}{2} = \tan\frac{c}{2}\,\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Dividiert man in jeder der Formelgruppen (64.1a) bis (64.1c) jeweils die vierte durch die zweite sowie die dritte durch die erste Gleichung, so erhält man noch

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\,\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}, \quad \tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}},$$

$$\tan\frac{\gamma+\alpha}{2} = \cot\frac{\beta}{2}\,\frac{\cos\frac{c-a}{2}}{\cos\frac{c+a}{2}}, \quad \tan\frac{\gamma-\alpha}{2} = \cot\frac{\beta}{2}\,\frac{\sin\frac{c-a}{2}}{\sin\frac{c+a}{2}}, \tag{64.3}$$

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \cot\frac{\gamma}{2}\,\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}, \quad \tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \cot\frac{\gamma}{2}\,\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}.$$

(64.2) und (64.3) werden als die NEPER*schen Gleichungen* erster und zweiter Art, oft auch als NEPER*sche Analogien* bezeichnet.

Analogie ist eine veraltete Bezeichnung für Proportion; die NEPERschen Gleichungen sind nämlich Proportionen, wenn man sie in der Form

$$\frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}$$

schreibt.

Man erkennt, daß die Formeln (64.2) und (64.3) zueinander polar sind, also durch polare Übertragung auseinander abgeleitet werden können.

Die NEPERschen Gleichungen lassen sich, wie der Leser selbst nachweisen mag, auch aus dem Sinussatz ableiten. Eine weitere Ableitung aus dem Sinus-Kosinussatz gibt H. ATHEN, Ebene und Sphärische Trigonometrie, Wolfenbütteler Verlagsanstalt, Wolfenbüttel und Hannover 1948, S. 59, an.

Schließlich erhält man durch geeignete Division daraus wieder die *Tangensformel*, die das formale Analogon zum Tangenssatz der ebenen Trigonometrie darstellt, für die praktische Rechnung jedoch kaum geeignet ist.

Die NEPERschen Gleichungen ermöglichen eine bequeme logarithmische Rechnung, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (SWS), z. B. a, b und γ, gegeben sind. Aus $\tan\{(\alpha+\beta)/2\}$ und $\tan\{(\alpha-\beta)/2\}$ erhält man zunächst die Winkel α und β; die fehlende Seite kann nach dem Sinussatz oder nach dem in [66] angegebenen Verfahren bestimmt werden. Entsprechend ist zu verfahren, wenn zwei Winkel und die anliegende Seite (WSW) gegeben sind.

65. Die Formeln von L'HUILIER und SERRET[63]

Abschließend sollen noch einige Formeln abgeleitet werden, die mit Hilfe des sphärischen Exzesses bzw. Defektes aus den Seiten bzw. Winkeln des sphärischen Dreiecks die fehlenden Stücke bestimmen lassen und überdies den Exzess, der bisher nur aus den Winkeln abgeleitet werden konnte, als Funktion der Seiten geben.

Für die Ableitung der Formeln[64] ist die erste Formel des DELAMBREschen Gleichungssystems (64.1a) in die Form

$$\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

---

[63] SIMON L'HUILIER, 1750–1840, Schweizer Mathematiker. J. A. SERRET, 1819–1885, franz. Mathematiker.

[64] Vgl. H. ATHEN, a.a.O. S. 63; eine ähnlich universelle Ableitung gibt G. HESSENBERG, a.a.O. S. 133, an.

zu bringen. Durch korrespondierende Addition und Subtraktion folgt daraus

$$\frac{\sin\frac{b+c}{2}-\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}+\sin\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\cos\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

oder mit Hilfe der Verwandlungsformeln

$$\frac{\sin\frac{b+c-a}{4}\cos\frac{a+b+c}{4}}{\sin\frac{a+b+c}{4}\cos\frac{b+c-a}{4}}=\frac{-\sin\frac{\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}+90°-\frac{\alpha}{2}}{2}\sin\frac{\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}+\frac{\alpha}{2}-90°}{2}}{\cos\frac{\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}+90°-\frac{\alpha}{2}}{2}\cos\frac{\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}+\frac{\alpha}{2}-90°}{2}}$$

Mit den Größen s und s-a lautet die linke Seite $\cot(s/2)\tan\{(s-a)/2\}$; die unter den Sinussen und Kosinussen der rechten Seite stehenden Winkel ergeben

$$\frac{\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}+90°-\frac{\alpha}{2}}{2}=\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right),\qquad\frac{\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}+\frac{\alpha}{2}-90°}{2}=\left(\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\gamma}{2}\right);$$

also wird

$$\cot\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}=\frac{-\sin\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\cos\left(\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}=$$

$$=\tan\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Behandelt man die übrigen Gleichungen von (64.1a) in ähnlicher Weise, so ergeben sich vier Formeln, die in folgender Anordnung angeschrieben seien:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \tan\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\cot\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2},\\
&\text{(b)}\quad \tan\frac{\varepsilon}{4}\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2},\\
&\text{(c)}\quad \cot\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\tan\frac{s-b}{2}\cot\frac{s-c}{2},\\
&\text{(d)}\quad \tan\frac{\varepsilon}{4}\cot\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}.
\end{aligned}\qquad(65.1)$$

Die zweite Gleichung von (64.1a) liefert, wenn man sie in die Form

$$\frac{\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}$$

bringt, nach entsprechender Umformung die vierte Gleichung von (65.1)

$$\tan\frac{\varepsilon}{4}\cot\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = \tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}.$$

Ebenso erhält man aus der dritten Gleichung von (64.1a) die zweite von (65.1), aus der vierten von (64.1a) die dritte Gleichung von (65.1).

Die übrigen acht DELAMBREschen Gleichungen liefern zwei weitere zu (65.1) analoge Gleichungssysteme, die aber nicht benötigt werden: Sie führen nämlich, ebenso wie (65.1), zum System der L'HUILIER—SERRETschen Formeln.

Bezeichnet man die Gleichungen von (65.1) mit (a), (b), (c), (d), so führen die Operationen (d) : (a), (d)·(a), (b)·(c) und (b) : (c) zum *ersten* SERRET*schen Gleichungssystem:*

$$\begin{aligned}
\tan^2\frac{s}{2} &= \frac{\tan\frac{\varepsilon}{4}}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)},\\
\tan^2\frac{s-a}{2} &= \frac{\tan\frac{\varepsilon}{4}\tan\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)},\\
\tan^2\frac{s-b}{2} &= \frac{\tan\frac{\varepsilon}{4}\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)},\\
\tan^2\frac{s-c}{2} &= \frac{\tan\frac{\varepsilon}{4}\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}.
\end{aligned} \tag{65.2}$$

Durch die Operationen (b)·(d), (b) : (d), (a) : (c) und (a)·(c) erhält man die *zweiten Gleichungen von* SERRET, das Umkehrsystem zu (65.2):

$$\begin{aligned}
\tan^2\frac{\varepsilon}{4} &= \tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2},\\
\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) &= \frac{\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}},\\
\tan^2\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) &= \frac{\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-c}{2}}{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-b}{2}},\\
\tan^2\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) &= \frac{\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}}{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-c}{2}},
\end{aligned} \tag{65.3}$$

wovon die erste in der Form

$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}$$

als *Gleichung von* L'HUILIER bekannt ist.

Setzt man $\frac{s}{2} = 90°-\frac{d}{4}$, $\frac{s-a}{2} = \frac{d_1}{4}$, $\frac{s-b}{2} = \frac{d_2}{4}$, $\frac{s-c}{2} = \frac{d_3}{4}$, so ergibt sich daraus noch

$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\cot\frac{d}{4}\tan\frac{d_1}{4}\tan\frac{d_2}{4}\tan\frac{d_3}{4}}\,.$$

Aus den obigen Gleichungen kann man durch polare Übertragung weitere Formeln ableiten; so gibt z. B. die erste Gleichung von (65.3) für das Polardreieck

$$\tan^2\frac{\bar{\varepsilon}}{4} = \tan\frac{\bar{s}}{2}\tan\frac{\bar{s}-\bar{a}}{2}\tan\frac{\bar{s}-\bar{b}}{2}\tan\frac{\bar{s}-\bar{c}}{2},$$

und mit

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{4} = \frac{d}{4},\quad \frac{\bar{s}}{2} = 135°-\frac{\sigma}{2},\quad \frac{\bar{s}-\bar{a}}{2} = 45°-\frac{\sigma-\alpha}{2}$$

usf. schließlich

$$\tan^2\frac{d}{4} =$$

$$= -\tan\left(45°+\frac{\sigma}{2}\right)\tan\left(45°-\frac{\sigma-\alpha}{2}\right)\tan\left(45°-\frac{\sigma-\beta}{2}\right)\tan\left(45°-\frac{\sigma-\gamma}{2}\right).$$

Mit $\frac{\sigma}{2} = 45°+\frac{\varepsilon}{4}$, $\frac{\sigma-\alpha}{2} = 45°-\frac{\varepsilon_1}{4}$, $\frac{\sigma-\beta}{2} = 45°-\frac{\varepsilon_2}{4}$, $\frac{\sigma-\gamma}{2} = 45°-\frac{\varepsilon_3}{4}$

erhält man noch die Form

$$\tan^2\frac{d}{4} = \cot\frac{\varepsilon}{4}\tan\frac{\varepsilon_1}{4}\tan\frac{\varepsilon_2}{4}\tan\frac{\varepsilon_3}{4}.$$

Ebenso liefert die zweite Gleichung von (65.3)

$$\tan^2\left(\frac{a}{2}-\frac{d}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\sigma-\beta}{2}\tan\frac{\sigma-\gamma}{2}}{\tan\frac{\sigma}{2}\tan\frac{\sigma-\alpha}{2}}.$$

Offensichtlich sind die polaren Formeln weniger bequem zu handhaben; sie werden praktisch auch kaum benützt.

Schließlich ist noch auf eine interessante Beziehung hinzuweisen, die STUDY[65] angegeben hat. Die Multiplikation der ersten und zweiten Gleichung von (65.1) gibt

$$\frac{\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}{\tan\frac{s}{2}} =$$

$$= \tan\frac{\varepsilon}{4}\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$M = \sqrt{\frac{\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}{\tan\frac{s}{2}}}$$

und $$\bar{M} = \sqrt{\tan\frac{\varepsilon}{4}\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}, \quad (65.4a)$$

[65] E. STUDY, 1862–1940, deutscher Mathematiker; vgl. auch H. ATHEN, a.a.O. S. 64.

wobei also $M = \bar{M}$ ist, so können die SERRETschen *Gleichungen* (65.2) in folgende Form gebracht werden:

$$\tan\frac{s}{2} = \frac{\tan\dfrac{\varepsilon}{4}}{\bar{M}}, \quad \tan\frac{s-a}{2} = \bar{M}\cot\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right),$$
$$\tan\frac{s-b}{2} = \bar{M}\cot\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right), \quad \tan\frac{s-c}{2} = \bar{M}\cot\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right). \quad (65.4\text{b})$$

Entsprechend lauten dann die Formeln (65.3)

$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = M\tan\frac{s}{2}, \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = M\cot\frac{s-a}{2},$$
$$\tan\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = M\cot\frac{s-b}{2}, \quad \tan\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = M\cot\frac{s-c}{2}. \quad (65.4\text{c})$$

Der Abschnitt mag mit einer Rückschau auf die in diesem Kapitel angegebenen logarithmierbaren Formeln des sphärischen Dreiecks abgeschlossen werden. Abgesehen von den mitunter benützten Additionstheoremen waren für deren Herleitung stets die beiden Kosinussätze notwendig: Die Halbwinkelsätze folgten aus dem Seitenkosinussatz, die Halbseitensätze aus dem Winkelkosinussatz; aus den Halbstückbeziehungen folgten die DELAMBREschen Gleichungen; diese wieder führten zu den NEPERschen Gleichungen und den Formeln von L'HUILIER—SERRET. Letzten Endes gehen also alle logarithmierbaren Formeln des sphärischen Dreiecks auf den Seitenkosinussatz zurück, denn auch der Winkelkosinussatz war durch Polarisation aus dem Seitenkosinussatz abgeleitet worden.

Wie anschließend gezeigt wird, kann der Winkelkosinussatz auch rein rechnerisch ohne Zuhilfenahme des Polardreiecks aus dem Seitenkosinussatz gewonnen werden.

Erinnert man sich ferner, daß auch der Sinus-Kosinussatz, der im weiteren Verlauf auf den Kotangenssatz führte, aus dem Seitenkosinussatz gewonnen wurde, so fehlt zur Rechtfertigung der in [59] aufgestellten Behauptung, wonach der Seitenkosinussatz die Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie ist, aus der alle übrigen Formeln gewonnen werden können, nur noch die Herleitung des Sinussatzes aus dem Seitenkosinussatz. Diese soll hier nachgetragen werden (vgl. K. KOMMERELL, Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik, Leipzig, Verlag Köhler, 1936): Bringt man die aus dem Seitenkosinussatz folgende Beziehung

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c} \quad (\text{I})$$

mittels $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ in die Form

$$\sin^2\alpha = \frac{\sin^2 b\sin^2 c-\cos^2 a-\cos^2 b\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c},$$

multipliziert mit $\sin^2 b\sin^2 c$ und ersetzt rechts

$$\sin^2 b\sin^2 c = (1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) = 1-\cos^2 b-\cos^2 c+\cos^2 b\cos^2 c,$$

so wird daraus

$$\sin^2\alpha\sin^2 b\sin^2 c = 1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c. \quad \text{(II)}$$

Vertauscht man (II) zyklisch, dann erscheinen links statt α, b, c die Stücke β, c, a, während die rechte Seite unverändert bleibt; also muß sein

$$\sin^2\alpha\sin^2 b\sin^2 c = \sin^2\beta\sin^2 c\sin^2 a$$

oder

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\sin^2 a}{\sin^2 b}. \quad \text{(III)}$$

Wird (II) nochmals zyklisch vertauscht, so erscheinen links die Stücke γ, a, b, während die rechte Seite wieder unverändert bleibt; also muß auch

$$\sin^2\beta\sin^2 c\sin^2 a = \sin^2\gamma\sin^2 a\sin^2 b$$

sein oder

$$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = \frac{\sin^2 b}{\sin^2 c}. \quad \text{(IV)}$$

Zieht man aus (III) und (IV) die Wurzeln — da die Seiten und Winkel EULERscher Dreiecke kleiner als 180° sind, kommen nur die positiven Vorzeichen in Frage —, so erhält man den Sinussatz, nämlich

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin a}{\sin b}, \quad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Damit ist nachgewiesen, daß der Seitenkosinussatz wirklich die Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie ist, aus der allein sich alle übrigen in Kapitel 10 und 11 angegebenen Formeln ableiten lassen.

Endlich sei noch gezeigt, daß sich auch der Winkelkosinussatz rein rechnerisch aus dem Seitenkosinussatz gewinnen läßt (vgl. W. LIETZMANN, Elementare Kugelgeometrie mit numerischen und konstruktiven Methoden, Göttingen, Verlag Vandenhoeck u. Ruprecht, 1949): Dafür hat man die drei Gleichungen des Seitenkosinussatzes nach $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ aufzulösen und den Ausdruck

$$\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma = \frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$+\frac{\cos b\cos c-\cos^2 c\cos a-\cos^2 b\cos a+\cos^2 a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin b\sin c}$$

zu bilden. Bringt man den ersten Summanden rechts auf den Nenner des zweiten, indem man im Nenner mit $\sin^2 a$, im Zähler mit $(1-\cos^2 a)$ multipliziert, so lautet er

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c - \cos^3 a + \cos b \cos c \cos^2 a}{\sin^2 a \sin b \sin c},$$

und es wird

$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \cos a \frac{1-\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin b \sin c}.$$

Nach (II) ist der Zähler der rechten Seite gleich $\sin^2\alpha \sin^2 b \sin^2 c$, so daß sich

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma &= \cos a \frac{\sin^2\alpha \sin^2 b \sin^2 c}{\sin^2 a \sin b \sin c}\\ &= \cos a \sin^2\alpha \frac{\sin b}{\sin a}\frac{\sin c}{\sin a}\\ &= \cos a \sin^2\alpha \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \cos a \sin\beta \sin\gamma\end{aligned}$$

oder endlich der Winkelkosinussatz

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$$

ergibt.

Kapitel 12: Lösung der Grundaufgaben für das sphärische Dreieck

66. Rechnerische Lösung der Grundaufgaben

Als Vorbereitung für die Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die mathematische Geographie und sphärische Astronomie ist eine gründliche Behandlung der rechnerischen Lösung der Grundaufgaben unentbehrlich. Nachfolgend werden daher die vollständigen Lösungen für alle sechs in [57] angegebenen Grundaufgaben mitgeteilt. Soweit sich für eine der Aufgaben mehrere Lösungsverfahren angeben lassen, werden sie in der Reihenfolge der Ableitung der benützten Formeln aufgeführt.

Zuvor noch einige Bemerkungen zur praktischen Rechnung: Da die Seiten und Winkel von EULERschen Dreiecken stets kleiner als 180° sind, bestimmen Kosinus, Tangens und Kotangens die gesuchten Größen eindeutig, der Sinus aber zweideutig. — Obgleich die Entscheidung über die Brauchbarkeit der Lösungen sehr einfach ist, vermeidet der Praktiker gern die Sinusformeln, denn das Gefälle des Tangens ist immer größer als beim Sinus, beim Kotangens immer größer als beim Kosinus; daraus folgt, daß die Tangensformeln stets die schärferen Ergebnisse liefern.

Bei der logarithmischen Rechnung gibt man Formeln mit Produkten und Quotienten den Vorzug.

Auch durch den Einsatz moderner Tischrechenmaschinen und elektronischer Rechenanlagen hat die logarithmische Rechnung, abgesehen von der Anwendung in der Schule, noch eine erhebliche praktische Bedeutung: So werden z. B. astronomische und geodätische Beobachtungen bei der ersten Auswertung im Feld noch häufig logarithmisch berechnet.

Grundaufgabe 1 (SSS): Bestimmung der Winkel α, β, γ aus den drei Seiten a, b, c.

a) Nach dem Seitenkosinussatz wird

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \quad \text{usf.}$$

b) Für logarithmische Rechnung sind die Halbwinkelformeln bequemer, die mit

$$k = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

in die Form

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{\sin(s-a)}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{k}{\sin(s-b)}, \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{k}{\sin(s-c)}$$

gebracht werden können.

Dabei ist k der Tangens des Inkreisradius des sphärischen Dreiecks, vgl. [74].

Für Rechenproben hat man die Gleichungen

$$(s-a)+(s-b)+(s-c) = s \quad \text{und} \quad \sin s \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} = k.$$

c) Ebenso bequem zu logarithmieren sind die SERRETschen Gleichungen in der STUDYschen Form:

$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = M\tan\frac{s}{2}, \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = M\cot\frac{s-a}{2}, \quad \text{usf.,}$$

$$\text{mit} \quad M = \sqrt{\frac{\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}{\tan\frac{s}{2}}}.$$

An Rechenkontrollen ergeben sich

$$(s-a)+(s-b)+(s-c) = s,$$

$$\tan\frac{\varepsilon}{4}\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = M^2,$$

$$\frac{\varepsilon}{4}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)+\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)+\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = 90°.$$

Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn die Summe je zweier Seiten größer ist als die dritte.

G r u n d a u f g a b e 2 (WWW): Die Seiten a, b, c ergeben sich aus den Winkeln α, β, γ einmal

a) mit Hilfe des Winkelkosinussatzes

$$\cos a = \frac{\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}, \quad \text{usf.,}$$

b) aber auch nach den Halbseitenformeln, die man mit

$$k' = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}}$$

in die für logarithmische Rechnung bequeme Form

$$\tan\frac{a}{2} = \frac{\cos(\sigma-\alpha)}{k'}, \quad \tan\frac{b}{2} = \frac{\cos(\sigma-\beta)}{k'}, \quad \tan\frac{c}{2} = \frac{\cos(\sigma-\gamma)}{k'}$$

bringen kann.

Auch k' hat eine geometrische Bedeutung: k' ist der Kotangens des Umkreisradius des sphärischen Dreiecks, vgl. [74].

An Rechenkontrollen stehen hier zur Verfügung:

$$(\sigma-\alpha)+(\sigma-\beta)+(\sigma-\gamma) = \sigma \quad \text{und} \quad -\frac{1}{\cos\sigma}\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\tan\frac{c}{2} = \frac{1}{k'}.$$

c) Ebenso bequem sind die SERRETschen Gleichungen in der STUDYschen Form:

$$\tan\frac{s}{2} = \frac{1}{\overline{M}}\tan\frac{\varepsilon}{4}, \quad \tan\frac{s-a}{2} = \overline{M}\cot\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right), \quad \text{usf.,}$$

$$\text{mit } \overline{M} = \sqrt{\tan\frac{\varepsilon}{4}\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)},$$

wobei sich an Rechenkontrollen ergeben:

$$\frac{\varepsilon}{4}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)+\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)+\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = 90^\circ,$$

$$\cot\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2} = \overline{M}^2,$$

$$\frac{s-a}{2}+\frac{s-b}{2}+\frac{s-c}{2} = \frac{s}{2}.$$

Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn $180^\circ < \alpha+\beta+\gamma < 540^\circ$ und die Summe je zweier Winkel kleiner ist als der um 180° vermehrte dritte Winkel.

G r u n d a u f g a b e 3 (SWS): Aus a, b, γ z. B. erhält man die gesuchten Stücke c, α, β wie folgt:

a) Der Kosinussatz[66] gibt die Seite c

$$\cos c = \cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma,$$

und die Winkel α und β findet man nach dem Sinussatz zu

$$\sin\alpha = \sin\gamma\frac{\sin a}{\sin c}, \quad \sin\beta = \sin\gamma\frac{\sin b}{\sin c},$$

wobei $\alpha \gtrless \gamma$ für $a \gtrless c$ und $\beta \gtrless \gamma$ für $b \gtrless c$ gilt.

[66] Vgl. die Umformung des Seitenkosinussatzes für logarithmische Rechnung auf Seite 209.

b) Eine vollständige, bequem logarithmierbare Lösung bieten die NEPERschen Gleichungen; aus

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\cot\frac{\gamma}{2}\,\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}},\qquad \tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\cot\frac{\gamma}{2}\,\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

ergeben sich die Winkel $(\alpha+\beta)/2$ und $(\alpha-\beta)/2$, also sind auch α und β bekannt.

Die Seite c wird dann nach dem Sinussatz

$$\sin c=\sin a\,\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=\sin b\,\frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$

wobei gilt $c \gtrless a$ für $\gamma \gtrless \alpha$ bzw. $c \gtrless b$ für $\gamma \gtrless \beta$.

Besser ist in diesem Fall auch c nach den NEPERschen Gleichungen zu berechnen; man erhält

$$\tan\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\tan\frac{a+b}{2}\quad\text{bzw.}\quad \tan\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\tan\frac{a-b}{2}.$$

Dabei ergibt sich $c/2$ bzw. c eindeutig und scharf, ohne daß man zusätzlich Rechenarbeit zu leisten hat: die Summen $(\alpha+\beta)/2$, $(a+b)/2$ und Differenzen $(\alpha-\beta)/2$, $(a-b)/2$ liegen bereits vor.

Auch die DELAMBREschen Gleichungen führen bequem zum Ziel. Schreibt man die obigen NEPERschen Gleichungen in der Form

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\,\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}=\frac{Z}{N},\qquad \tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\,\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}=\frac{Z'}{N'},$$

so erhält man für die Seite c nach den DELAMBREschen Gleichungen [Vergl. (64.1c)]

$$\cos\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{N}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{Z}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

oder

$$\sin\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{N'}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{Z'}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Bedingungen für die Lösbarkeit der Aufgabe bestehen nicht.

G r u n d a u f g a b e 4 (WSW): Um z. B. aus α, β, c die restlichen Stücke γ, a, b zu erhalten, ist ähnlich wie in Grundaufgabe 3 zu verfahren.

a) Der Winkelkosinussatz[67] gibt

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$$

und der Sinussatz

$$\sin a = \sin c\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \quad \sin b = \sin c\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

wobei $a \gtrless c$ für $\alpha \gtrless \gamma$ bzw. $b \gtrless c$ für $\beta \gtrless \gamma$ gilt.

b) Die NEPERschen Gleichungen liefern

$$\tan\frac{a+b}{2} = \tan\frac{c}{2}\,\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}, \quad \tan\frac{a-b}{2} = \tan\frac{c}{2}\,\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

und[68]

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Bedingungen für die Lösbarkeit der Aufgabe bestehen nicht.

G r u n d a u f g a b e 5 (SSW): Gegeben seien a, b, α.

a) Nach dem Sinussatz wird

$$\sin\beta = \sin\alpha\,\frac{\sin b}{\sin a};$$

die Seite c folgt aus dem Kosinussatz

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha,$$

der für logarithmische Rechnung mittels des Hilfswinkels m, definiert durch $\tan m = \tan b\cos\alpha$, in die Form

$$\frac{\cos a\cos m}{\cos b} = \cos(c-m)$$

gebracht werden kann. — Der Sinussatz liefert noch den Winkel γ zu

$$\sin\gamma = \sin c\,\frac{\sin\alpha}{\sin a}.$$

---

[67] Auch der Winkelkosinussatz kann für eine bequeme logarithmische Rechnung umgeformt werden, vgl. S. 210.

[68] Auch die DELAMBREschen Gleichungen führen zum Ziel.

b) Bequemer ergeben sich c und γ, wenn β nach dem Sinussatz berechnet ist, aus den NEPERschen Gleichungen:

$$\tan\frac{c}{2} = \tan\frac{a+b}{2}\,\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \tan\frac{a-b}{2}\,\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha+\beta}{2}\,\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} = \cot\frac{\alpha-\beta}{2}\,\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}.$$

Für die Bestimmung von c und γ ergibt sich noch eine weitere Lösung, wenn man von der Ecke C das sphärische Lot CH_c auf die Seite AB fällt und die so entstehenden rechtwinkligen Dreiecke AH_cC und BCH_c (Abb. 66.1) nach der NEPERschen Regel (vgl. [69]) behandelt. Ist β wieder nach

$$\sin\beta = \sin\alpha\,\frac{\sin b}{\sin a}$$

berechnet, so findet man:

$\triangle AH_cC$:	$\cos\alpha = \cot(90°-b_c)\cot b,$	$\tan b_c = \tan b\cos\alpha,$
$\triangle AH_cC$:	$\cos b = \cot\gamma_1\cot\alpha,$	$\cot\gamma_1 = \tan\alpha\cos b,$
$\triangle H_cBC$:	$\cos\beta = \cot a\cot(90°-a_c),$	$\tan a_c = \tan a\cos\beta,$
$\triangle H_cBC$:	$\cos a = \cot\gamma_2\cot\beta,$	$\cot\gamma_2 = \tan\beta\cos a,$

schließlich wird $c = b_c+a_c$, $\gamma = \gamma_1+\gamma_2$.

Offenbar ist die Grundaufgabe 5, die oft als *erster casus ambiguus* bezeichnet wird, zunächst zweideutig: Je nachdem, ob $\sin\beta \gtreqless 1$ ist, erhält man keine, eine ($\beta = 90°$) oder zwei Lösungen. Beim doppeldeutigen Fall kommt man meist damit aus, aus den Winkeln β und $180°-\beta$ einen Winkel so auszusuchen, daß der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt. Auch an Hand einer genäherten graphischen Lösung läßt sich entscheiden, welcher der beiden Winkel der richtige ist. — Eine vollständige Diskussion der möglichen Lösungen wird in [67] besorgt.

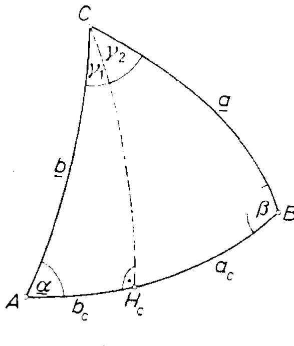


Abb. 66.1

G r u n d a u f g a b e 6 (WWS): Sind α, β und a gegeben, so findet man die fehlenden Stücke wie folgt:

a) Die Seite b nach dem Sinussatz zu

$$\sin b = \sin\beta\,\frac{\sin a}{\sin\alpha},$$

den Winkel γ aus dem Winkelkosinussatz

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$

den man mit dem Hilfswinkel $\tan\mu = \tan\beta\cos a$ in die bequem logarithmierbare Form

$$\cos(\mu+\gamma) = -\frac{\cos\mu\cos\alpha}{\cos\beta}$$

bringt, und schließlich die Seite c nach dem Sinussatz

$$\sin c = \sin a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

b) Für die Bestimmung von c und γ wird man jedoch, ebenso wie in Aufgabe 5, entweder die NEPERschen Gleichungen anwenden oder das Dreieck in die rechtwinkligen Dreiecke AH_cC und H_cBC (Abb. 66.1) zerlegen. Auch die Grundaufgabe 6, der *zweite casus ambiguus*, ist zunächst zweideutig: Je nachdem $\sin b \gtreqless 1$ ist, erhält man keine, eine oder zwei Lösungen. Die Diskussion der Lösungen ist ähnlich wie bei Grundaufgabe 5 zu führen (vgl. [67]).

67. Diskussion der Grundaufgabe 5

Sind z. B. die Stücke a, b und α gegeben, so ist nach [66] zunächst β aus dem Sinussatz $\sin\beta = \sin\alpha\sin b/\sin a$ zu bestimmen. Hinsichtlich der Zahl der Lösungen können dabei folgende Fälle eintreten:

Fall 1: $\sin\beta > 1$: keine reelle Lösung,

Fall 2: $\sin\beta = 1$: eine (doppelt zählende) Lösung,

Fall 3: $\sin\beta < 1$: zwei Lösungen.

Der Fall 1 liegt vor, wenn $\sin\alpha\sin b > \sin a$ ist, also kein Dreieck mit den vorgegebenen Stücken a, b, α existiert.

Der Fall 2 tritt für $\sin\alpha\sin b = \sin a$ ein; denn dann wird $\beta = 90°$, das Dreieck ist bei B rechtwinklig mit b als Hypotenuse.

Im Fall 3, $\sin\alpha\sin b < \sin a$, ergeben sich zwei Werte für β, der Tafelwert (im 1. Quadranten) und dessen Supplement; hier sind zwei Möglichkeiten gegeben, nämlich beide Winkel sind möglich, oder der eine ist brauchbar, der andere unbrauchbar. Für eine vollständige Diskussion werden nur die beiden schon abgeleiteten Sätze für das sphärische Dreieck benötigt, wonach für $a \gtreqless b$ bzw. $a+b \gtreqless 180°$ auch $\alpha \gtreqless \beta$ und $\alpha+\beta \gtreqless 180°$ sein muß (vgl. [62]).

Für $\underline{a < 90°, b < 90°}$ ist wegen $a+b < 180°$ auch $\alpha+\beta < 180°$.

1. Ist $a > b$ oder a näher an $90°$ als b, so ist auch $\alpha > \beta$, und für
   $\underline{\alpha > 90°}$ muß $\beta < 90°$ sein, und für
   $\underline{\alpha < 90°}$ muß $\beta < 90°$ sein, d. h. die
   Lösung ist stets eindeutig.
2. Ist $a < b$ oder b näher an $90°$ als a, und $\alpha < \beta$, so gibt es für
   $\underline{\alpha > 90°}$ keine Lösung, denn wegen $\beta > \alpha$ müßte $\beta > 90°$ sein, was wegen $\alpha+\beta < 180°$ unmöglich ist; für
   $\underline{\alpha < 90°}$ gibt es zwei Lösungen, weil $\beta \gtrless 90°$ sein kann.

Für $\underline{a > 90°, b < 90°}$ ist wegen $a > b$ auch $\alpha > \beta$.

3. Ist b näher an $90°$ als a, also $(90°-b) < (a-90°)$, dann ist $a+b > 180°$, also auch $\alpha+\beta > 180°$, und man erhält für
   $\underline{\alpha < 90°}$ keine Lösung, denn wegen $\alpha > \beta$ müßte auch $\beta < 90°$ sein, was wegen $\alpha+\beta > 180°$ unmöglich ist, für
   $\underline{\alpha > 90°}$ jedoch zwei Lösungen, denn es kann $\beta \gtrless 90°$ werden.
4. Ist a näher an $90°$ als b, also $(a-90°) < (90°-b)$, dann ist $a+b < 180°$ und auch $\alpha+\beta < 180°$, und es ergibt sich sowohl für
   $\underline{\alpha > 90°}$, $\beta < 90°$ als auch für
   $\underline{\alpha < 90°}$, $\beta < 90°$ stets eine Lösung.

Ist $\underline{a < 90°, b > 90°}$, also $b > a$, dann gilt auch $\beta > \alpha$.

5. Ist b näher an $90°$ als a, dann ist $a+b < 180°$ und $\alpha+\beta < 180°$; somit ergibt sich für
   $\underline{\alpha > 90°}$ keine Lösung, weil sonst auch $\beta > 90°$ sein müßte, was wegen $\alpha+\beta < 180°$ unmöglich ist; für
   $\underline{\alpha < 90°}$ gibt es zwei Lösungen, weil $\beta \gtrless 90°$ sein kann.
6. Ist a näher an $90°$ als b, so ist $a+b > 180°$ und auch $\alpha+\beta > 180°$; also wird für
   $\underline{\alpha > 90°}$ auch $\beta > 90°$ und für
   $\underline{\alpha < 90°}$ ebenfalls $\beta > 90°$, d. h. man hat stets eine eindeutige Lösung.

Ist $\underline{a > 90°, b > 90°}$, so wird $a+b > 180°$ und $\alpha+\beta > 180°$.

7. Ist $a > b$, oder b näher an $90°$ als a, so ist auch $\alpha > \beta$ und demnach gibt es für
   $\underline{\alpha < 90°}$ keine Lösung, weil wegen $\alpha > \beta$ auch $\beta < 90°$ sein müßte, was wegen $\alpha+\beta > 180°$ unmöglich ist. Für
   $\underline{\alpha > 90°}$ sind zwei Lösungen möglich, d. h. es kann $\beta \gtrless 90°$ werden.

8. Ist $a < b$ oder a näher an 90° als b, so ist auch $\alpha < \beta$; somit ist sowohl für

   $\alpha < 90°$ als auch für

   $\alpha > 90°$ Winkel $\beta > 90°$, d. h. man hat stets eine eindeutige Lösung.

Die *Lösungen von Fall 3* lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Ist a näher an 90° als b, dann ist die Lösung stets eindeutig, und β ergibt sich zu b gleichartig; ist b näher an 90° als a, so erhält man $\left\{\begin{matrix}\text{zwei}\\ \text{keine}\end{matrix}\right\}$ Lösung(en), je nachdem a und α $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ sind. Mit anderen Worten:
Eine eindeutige Lösung liegt nur vor, wenn die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite näher an 90° liegt als die andere.

In ähnlicher Weise sind die Lösungen der *Grundaufgabe* 6 zu diskutieren: Sind z. B. die Stücke α, β, a gegeben, so ist zunächst die Seite b aus $\sin b = \sin a \sin \beta / \sin \alpha$ zu bestimmen. Dabei erhält man im

Fall 1: $\sin a \sin \beta > \sin \alpha$, keine Lösung; im

Fall 2: $\sin a \sin \beta = \sin \alpha$, als (doppelt zählende) Lösung ein rechtseitiges Dreieck mit $b = 90°$ und im

Fall 3: $\sin a \sin \beta < \sin \alpha$, eine eindeutige Lösung, wenn α näher an 90° ist als β, b wird gleichartig zu β. Ist β näher an 90° als α, so erhält man $\left\{\begin{matrix}\text{zwei}\\ \text{keine}\end{matrix}\right\}$ Lösung(en), je nachdem α und a $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ sind. Mit anderen Worten: *Eine eindeutige Lösung liegt nur vor, wenn der der gegebenen Seite gegenüberliegende Winkel näher an 90° liegt als der andere.*

68. Zeichnerische Lösungen für die Grundaufgaben

In [66] wurde die rechnerische Lösung der Dreiecksaufgaben dargestellt. Hier folgen noch andere Möglichkeiten der Auflösung sphärischer Dreiecke, wobei die konstruktiv-zeichnerische Behandlung im Vordergrund stehen soll.

Für die *zeichnerische Lösung sphärischer Dreiecksaufgaben* gibt es verschiedene Möglichkeiten: Da mit jedem

sphärischen Dreieck ein Dreikant verbunden ist, dessen Gestalt durch Angabe der Dreiecksstücke eindeutig bestimmt ist (und umgekehrt), kann man die Methoden der darstellenden Geometrie zu Hilfe nehmen und die Dreikante konstruieren. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Oberfläche der Kugel in eine Ebene abzubilden, etwa durch eine *orthogonale Parallelprojektion (Eintafelbild)* oder eine *gnomonische* oder *stereographische Projektion*. Damit lassen sich viele Aufgaben der Kugelgeometrie auf konstruktivem Wege lösen.

Zunächst soll an einem Beispiel gezeigt werden, wie die Stücke eines Dreiecks durch *Konstruktion seines Dreikants* bestimmt werden können. Man klappt dafür die Seitenflächen des Dreikants in die Zeichenebene um und konstruiert das Netz oder die Abwicklung des Dreikants. — Gegeben seien die Seiten a, b, c, gesucht die Winkel α, β, γ eines sphärischen Dreiecks (Grundaufgabe 1). Das zugehörige Dreikant ergibt sich, wenn man die drei Seiten (gegeben im Winkelmaß) nebeneinander in der Zeichenebene abträgt (Abb. 68.1), die so entstehende Figur ausschneidet und die Seitenflächen um die Kanten aufklappt.

Daß es in diesem Fall nur ein Dreikant gibt, wenn die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte, wurde schon in [56] gezeigt.

Die Konstruktion der Winkel α und β ergibt sich aus Abb. 68.2, in der nochmals das Dreikant gezeichnet ist. Der Winkel α wird in der zu

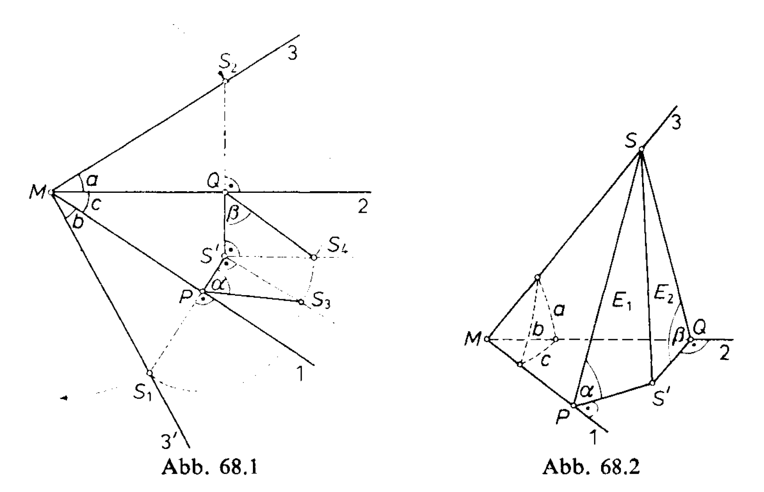


Abb. 68.1 Abb. 68.2

den Seitenflächen MPS und MPQ senkrechten Ebene E_1 gemessen, β in der zu den Seitenflächen MPQ und MQS senkrechten Ebene E_2. Also hat man in Abb. 68.1 auf der Kante 1 einen Punkt P anzunehmen und das

Lot zu fällen (Spur der Ebene E_1), das die Kante 3' in S_1 trifft. Überträgt man die Länge MS_1 auf die Kante 3, so ergibt sich S_2; S_1 und S_2 fallen nach dem Aufklappen in S zusammen. Da die Schenkel von β senkrecht zur Kante 2 stehen müssen, ist in S_2 das Lot auf Kante 2 zu fällen ($\overline{S_2Q}$ ist die Spur der Ebene E_2). Die Spuren der Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich in S', der senkrechten Projektion von S auf die Grundfläche. Beachtet man, daß die Dreiecke $PS'S$ und $QS'S$ bei S' rechtwinklig sind und die gemeinsame Höhe gleich $\overline{S'S}$ ist (Abb. 68.2), so ist die Konstruktion der Winkel α und β in Abb. 68.1 leicht einzusehen: Die beiden rechtwinkligen Dreiecke sind in die Zeichenebene umzuklappen, $\overline{S_3S'} \perp \overline{S'P}$ und $\overline{S_3P} = \overline{S_1P}$ bzw. $\overline{S_4S'} \perp \overline{S'Q}$ und $\overline{S_4Q} = \overline{S_2Q}$. Dann ist $\sphericalangle\ S'PS_3 = \alpha$ und $\sphericalangle\ S'QS_4 = \beta$; S_3 und S_4 fallen nach dem Aufklappen in S zusammen.

Die Bestimmung des Winkels γ geht aus dem in Abb. 68.3 dargestellten Dreikant hervor, das unmittelbar aus Abb. 68.2 folgt: Der Winkel γ ist in einer zu den Seitenflächen von a und b senkrechten Ebene E_3 zu

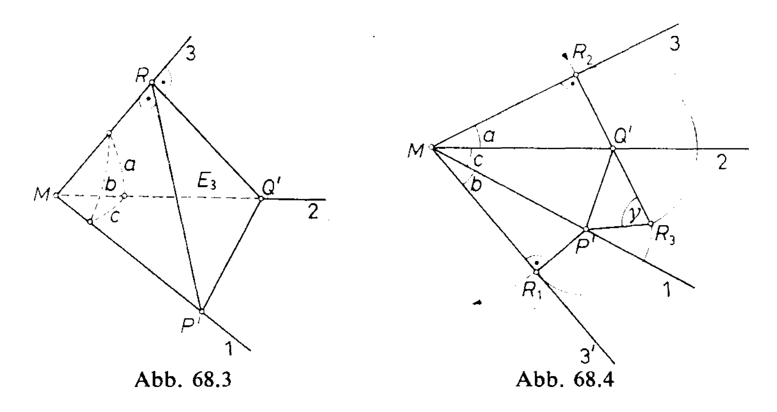


Abb. 68.3 Abb. 68.4

messen, d. h. seine Schenkel müssen zur Kante 3 senkrecht sein. E_3 schneidet die Kante 1 in P', die Kante 2 in Q'. Die Konstruktion von γ ist in Abb. 68.4 dargestellt, wo, mit den Punkten R_1 und R_2 ($\overline{MR_1} = \overline{MR_2}$) beginnend, das Dreieck $P'Q'R$ in die Zeichenebene umzuklappen ist. Dann ist $\sphericalangle\ P'R_3Q' = \gamma$; R_3 kommt nach dem Aufklappen in die Lage R.

Von den verschiedenen Möglichkeiten, sphärische Aufgaben mit Hilfe einer ebenen Projektion zu lösen, soll hier nur die *orthogonale Parallelprojektion* erläutert werden[69]. Dabei stehen alle Projektionsstrahlen senk-

[69] Auf die Anwendung der stereographischen und gnomonischen Projektion ist in [96] zurückzukommen.

recht zur Zeichenebene, sind also zueinander parallel. Der Umrißkreis der Kugel wird dabei ein Großkreis der Kugel. Als Beispiel sei wieder die Lösung der Grundaufgabe 1 erläutert, für ein sphärisches Dreieck mit gegebenen Seiten a, b, c die Winkel α, β, γ zu konstruieren. Die Bildebene ist so zu wählen, daß die Bilder von zwei Punkten des Dreiecks, z. B. A' und C', auf den Umrißkreis der Kugel fallen (Abb. 68.5). Um den Bildpunkt B' von B zu erhalten, ist folgende Überlegung notwendig: $\overline{A}'$ und $\overline{C}'$ seien die Gegenpunkte von A' und C'. Die zu den Durchmessern $A'\overline{A}'$ und $C'\overline{C}'$ senkrechten Großkreise bilden sich als die Geraden $\overline{G_A G_A}$ und $\overline{G_C G_C}$ ab. Ebenso bilden sich die dazu parallelen Kleinkreise als Gerade ab. Da nun $AB = c$ ist, ergibt sich als erster geometrischer Ort für B' der Parallelkreis im Abstand $90° - c$ von $\overline{G_A G_A}$, der sich als die Gerade $\overline{P_A P_A}$ abbildet. Wegen $CB = a$ liegt B auch auf dem Parallelkreis im Abstand $90° - a$ von $\overline{G_C G_C}$, der sich als die Gerade $\overline{P_C P_C}$ abbildet. Damit ist B' gefunden, und das Bilddreieck $A'B'C'$ kann gezeichnet werden, wobei zu beachten ist, daß die Bilder von Kreisen in der orthogonalen Parallelprojektion Ellipsen sind, die Spezialfälle Kreis und Gerade eingeschlossen.

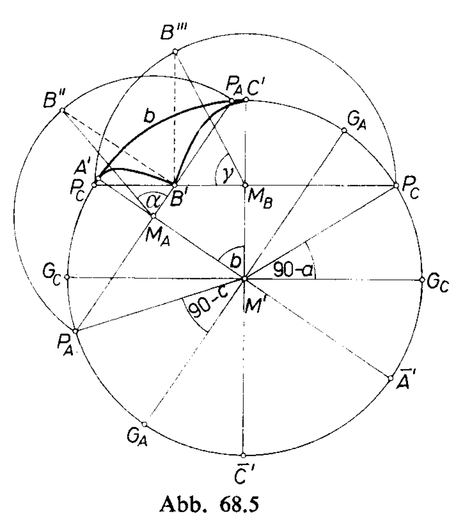


Abb. 68.5

Den Beweis hierzu liefert die Darstellende Geometrie; er wird aber für das Folgende nicht benötigt.

Der Dreieckswinkel α ergibt sich wie folgt: Die Strecke $\overline{P_A P_A}$ ist gleich dem Durchmesser des Kleinkreises um den Mittelpunkt M_A; wird dieser Kreis um $\overline{P_A P_A}$ in die Zeichenebene umgeklappt und die Lage B'' von B' auf diesem angegeben ($\overline{B''B'} \perp \overline{P_A P_A}$), so ist der gesuchte Winkel α gleich $\sphericalangle\, B''M_A B'$. In gleicher Weise (Kreis über $\overline{P_C P_C}$, $\overline{B'''B'} \perp \overline{P_C P_C}$) ergibt sich γ als $\sphericalangle\, P_C M_B B'''$.

Um den Winkel β zu bestimmen, ist eine zweite Abbildung notwendig, wobei die Bildebene so zu wählen ist, daß entweder die Bilder von A und B oder von B und C auf den Umrißkreis der Kugel zu liegen kommen.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Kugel so weit zu drehen, daß der Bildpunkt B' von B auf den Bildpunkt M' des Kugelmittelpunktes zu liegen kommt (Abb. 68.6). B muß sich also auf einem Großkreis bewegen, der sich als die Gerade $\overline{S'\bar{S}'}$ abbildet; somit ist die Kugel um den zu $\overline{S'\bar{S}'}$ senkrechten Durchmesser $\overline{D'\bar{D}'}$ zu drehen. Den Drehwinkel findet man, wenn der Großkreis $S\bar{S}$ in die Zeichenebene (Umrißkreis) umgelegt wird; ist B'' die Lage auf diesem Kreis ($\overline{B''B'} \perp \overline{S'\bar{S}'}$), dann ist $\sphericalangle B''M'\bar{D}'$ der gesuchte Drehwinkel ω. Wird die Kugel um den Winkel ω gedreht, so ist $B'_\omega = M'$ der neue Bildpunkt von B. Die Punkte A und B wandern auf Kleinkreisen, die sich wieder als Gerade abbilden. Um die Bildpunkte A'_ω und C'_ω nach der Drehung zu finden, ist wie folgt zu verfahren: Der Kleinkreis durch C' (Mittelpunkt M'_C) ist in die Zeichenebene umzulegen. Wird in M'_C der Drehwinkel ω abgetragen, so schneidet der freie Schenkel den Kleinkreis in C'', und C'_ω ($\overline{C''C'_\omega} \perp \overline{C'M'_C}$) ist der Bildpunkt von C nach der Drehung. Analog ist der Bildpunkt A'_ω von A nach der Drehung zu bestimmen. Die durch A und B bzw. durch B und C laufenden Großkreise bilden sich jetzt als die Geraden $\overline{B'_\omega A'_\omega}$ und $\overline{B'_\omega C'_\omega}$ ab, und folglich gibt der Schnittwinkel dieser Geraden den gesuchten Winkel β in wahrer Größe wieder.

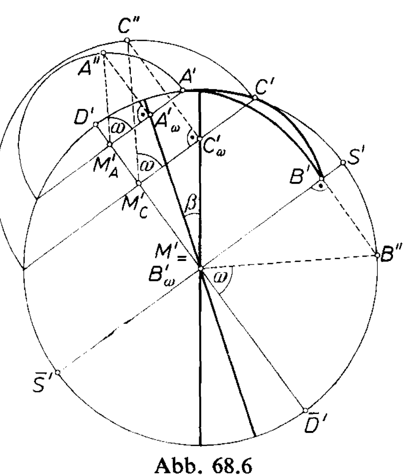


Abb. 68.6

In ähnlicher Weise können auch die übrigen Grundaufgaben der sphärischen Dreiecke gelöst werden. — Weitere Beispiele für die Anwen dung der orthogonalen Parallelprojektion werden in [90] bei der Lösung der Entfernungsaufgabe und der Kursbestimmung angegeben.

Kapitel 13: Das rechtwinklige und das rechtseitige Dreieck

69. Die Grundformeln für das rechtwinklige Dreieck, die NEPERsche Regel

Dem rechtwinkligen Dreieck auf der Kugel kommt nicht die Sonderstellung des rechtwinkligen Dreiecks der Ebene zu, weil, wie die Diskussion der Grundaufgaben 5 und 6 zeigte, dem rechtwinkligen Dreieck das rechtseitige Dreieck völlig gleichberechtigt zur Seite tritt.

Während in der ebenen Trigonometrie zunächst die Formeln für das rechtwinklige Dreieck und dann erst die Sätze des schiefwinkligen Dreiecks abgeleitet wurden, erweist sich für die Sphärik der umgekehrte Weg als zweckmäßig: Die Grundformeln für das rechtwinklige Dreieck lassen sich bequem aus den Beziehungen für das allgemeine Kugeldreieck gewinnen, wenn man für einen Winkel 90° setzt.

In [70] wird indes gezeigt, daß die Formeln des rechtwinkligen Dreiecks auch ohne Zuhilfenahme der bisherigen Sätze abgeleitet werden können.

Aus geeigneten Gleichungen des Sinus-, des Seitenkosinus- und Winkelkosinussatzes sowie dem Kotangenssatz erhält man insgesamt zehn Formeln. — Um diese Formeln der nachfolgenden NEPERschen Regel einordnen zu können, werden sie stets so geschrieben, daß auf der linken Seite der Kosinus eines der Stücke c, α, β oder der Sinus der Katheten a, b erscheint. Weiter werden sie so der Reihe nach geordnet, daß in den Beziehungen zunächst die drei Seiten, dann zwei Seiten und ein Winkel und schließlich zwei Winkel und eine Seite auftreten. Ist $\gamma = 90°$ (vgl. Abb. 69.1), so gibt der Seitenkosinussatz $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$ unmittelbar

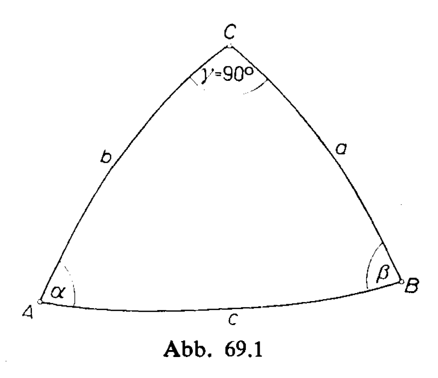


Abb. 69.1

$$\cos c = \cos a \cos b. \qquad (69.1)$$

Diese Formel wird häufig als der *sphärische pythagoräische Satz* bezeichnet. Die Sinussätze

$$\frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

des allgemeinen sphärischen Dreiecks geben für $\gamma = 90°$

$$\sin a = \sin c \sin \alpha, \quad \sin b = \sin c \sin \beta. \qquad (69.2), (69.3)$$

Die beiden Kotangenssätze

$$\sin \gamma \cot \alpha = \cot a \sin b - \cos b \cos \gamma,$$
$$\sin \gamma \cot \beta = \cot b \sin a - \cos a \cos \gamma$$

führen mit $\gamma = 90°$ auf

$$\sin b = \tan a \cot \alpha, \quad \sin a = \tan b \cot \beta. \qquad (69.4), (69.5)$$

Zwei weitere Beziehungen zwischen je zwei Seiten und einem Winkel liefern die Sinus-Kosinussätze

$$\sin a \cos \gamma = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha,$$
$$\sin b \cos \gamma = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos \beta$$

für $\gamma = 90°$, nämlich

$$\cos \alpha = \cot c \tan b, \quad \cos \beta = \cot c \tan a. \qquad (69.6), (69.7)$$

Beziehungen zwischen je zwei Winkeln und einer Seite liefern die Winkelkosinussätze

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a,$$
$$\cos \beta = -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b,$$
$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c;$$

ist wieder $\gamma = 90°$, so geben die erste und zweite Gleichung die Formeln

$$\cos \alpha = \sin \beta \cos a, \quad \cos \beta = \sin \alpha \cos b, \qquad (69.8), (69.9)$$

und die dritte liefert, wenn nach $\cos c$ aufgelöst wird,

$$\cos c = \cot \alpha \cot \beta. \qquad (69.10)$$

Mit den Formeln (69.1) — (69.10) lassen sich alle Aufgaben über das rechtwinklige sphärische Dreieck lösen. Die Formeln haben überdies den Vorteil, daß sie bequem logarithmierbar sind und einer Merkregel

eingeordnet werden können. Irgend drei der fünf Stücke sind, wenn man den rechten Winkel (γ) ausläßt, in der durch das Dreieck gegebenen, natürlichen geschlossenen Reihenfolge ... α, c, β, a, b, ... entweder benachbart wie α, c und β, oder es liegen zwei von ihnen nebeneinander und vom dritten getrennt, wie z. B. a und b von c. Danach ordnen sich die zehn Formeln (69.1) — (69.10) zunächst in zwei Gruppen zu je fünf — für jedes der fünf Stücke liegen zwei Formeln vor, die entweder die zwei benachbarten bzw. nicht benachbarten Stücke enthalten —, für die folgende, von NEPER stammende, *Regel* gilt: Ordnet man, indem man den rechten Winkel ausläßt und die Katheten durch ihre Komplemente ersetzt, die fünf Stücke in ihrer zyklischen Reihenfolge auf einem Kreisumfang an (Abb. 69.2), dann ist der Kosinus irgendeines Stückes gleich dem Produkt der Kotangens der beiden benachbarten Stücke oder gleich dem Produkt der Sinusse der beiden nicht benachbarten Stücke.

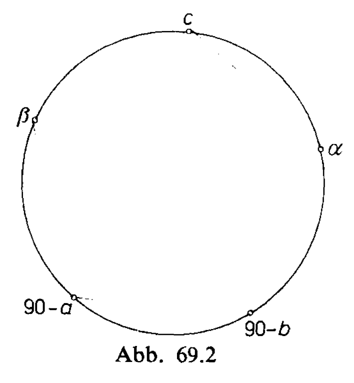


Abb. 69.2

Die angegebene Fassung der NEPER-Regel stammt von Cr. v. WOLFF (1679–1754); eine theoretische Begründung dieser empirisch gefundenen Regel ist erst viel später angegeben worden, so von GAUSS, LAMBERT u. a. Eine gruppentheoretische Deutung der NEPERschen Regel gibt H. ATHEN, a.a.O. S. 55/56 an.

Oft wird die NEPERsche Regel auch in der mnemotechnisch günstigen Kurzform angegeben: Kosinus = Produkt der **Ko**t**an**gens der **an**liegenden oder der **Sin**usse der **n**ichtanliegenden Stücke.

Die Anwendung der Regel gibt, z. B. mit c beginnend, die zehn Formeln

$$\begin{aligned}
\cos c &= \cot\beta \cot\alpha, & \cos c &= \cos a \cos b,\\
\cos\alpha &= \cot c \tan b, & \cos\alpha &= \sin\beta \cos a,\\
\sin b &= \cot\alpha \tan a, & \sin b &= \sin c \sin\beta,\\
\sin a &= \tan b \cot\beta, & \sin a &= \sin\alpha \sin c,\\
\cos\beta &= \tan a \cot c, & \cos\beta &= \cos b \sin\alpha,
\end{aligned}$$

die mit (69.1) bis (60.10) übereinstimmen. Die NEPERsche Regel ist unabhängig davon, welcher Winkel ein Rechter ist; ist α oder β gleich 90°, so ist ebenso zu verfahren.

Endlich ist noch zu bemerken, daß die obigen Formeln auch für das rechtseitige Dreieck gelten; denn durch den Übergang zum Polardreieck wird der der 90°-Seite entsprechende polare Winkel ein Rechter, so daß wieder ein rechtwinkliges Dreieck entsteht. — Die Formeln für das rechtseitige sphärische Dreieck werden in [72] angegeben.

70. Andere Herleitung der Grundformeln des rechtwinklig sphärischen Dreiecks

Die Grundformeln (69.1) – (69.10) des rechtwinklig sphärischen Dreiecks können auch ohne Zuhilfenahme der Sätze des allgemeinen Dreiecks abgeleitet werden, und zwar aus dem zugehörigen rechtwinkligen Dreikant. Ist in $\triangle$ ABC wieder $\gamma = 90°$, dann sind auch die Nebendreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ rechtwinklig, d. h. es ist auch $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 90°$, und bei passender Bezeichnung kann ein Dreieck so ausgewählt werden, daß die Seiten b und c spitz sind. Dann aber läßt sich das zugehörige rechtwinklige Dreikant einfach darstellen (Abb. 70.1): Wegen $\sphericalangle\, ACB = \gamma = 90°$ steht die Seitenfläche MBC des Dreikants senkrecht zu MAC. Fällt man die Lote $\overline{BB'} \perp \overline{MC}$ und $\overline{B'B''} \perp \overline{MA}$, dann ist $\sphericalangle\, BB''B' = \alpha$, und mit $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = 1$ wird

$$\overline{MB'} = \cos a, \quad \overline{B'B} = \sin a,$$

$$\overline{MB''} = \cos c, \quad \overline{B''B} = \sin c,$$

und aus $\triangle\, MB''B'$ folgt

$$\tan b = \frac{\overline{B''B'}}{\cos c}, \quad \sin b = \frac{\overline{B''B'}}{\cos a}$$

oder

$$\overline{B''B'} = \cos c \tan b = \cos a \sin b.$$

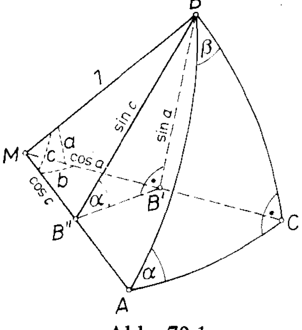


Abb. 70.1

Damit lassen sich wieder die Gleichungen (69.1) – (69.10) ableiten:

$$\triangle\, MB''B' : \cos b = \frac{\cos c}{\cos a} \quad \text{oder} \quad \cos c = \cos a \cos b;$$

$$\triangle\, B''B'B : \sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \quad \text{oder} \quad \sin a = \sin \alpha \sin c;$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{B''B'}}{\sin c} = \frac{\cos c \tan b}{\sin c} = \cot c \tan b.$$

Da im rechtwinkligen Dreieck keine der beiden Katheten bevorrechtigt ist, und diese in der Bezeichnung vertauscht werden können, folgen aus den letzten beiden noch die folgenden Gleichungen[70]:

$$\sin b = \sin \beta \sin c \quad \text{und} \quad \cos \beta = \cot c \tan a;$$

[70] Im übrigen lassen sich die so gewonnenen Gleichungen auch dadurch bestätigen, daß man in Abb. 69.1 die Katheten a und b samt ihren Gegenwinkeln vertauscht und wieder die Grundformeln des allgemeinen sphärischen Dreiecks anwendet.

setzt man in $\cos\alpha = \overline{B''B'}/\sin c$ für $\overline{B''B'} = \cos a \sin b$, also $\cos\alpha = \cos a \sin b/\sin c$, so wird wegen $\sin b/\sin c = \sin\beta$ daraus

$$\cos\alpha = \cos a \sin\beta.$$

Wegen der Vertauschbarkeit der Katheten gilt dann auch

$$\cos\beta = \cos b \sin\alpha,$$

und aus dem $\triangle\, B''B'B$ folgt noch

$$\tan\alpha = \frac{\sin a}{\overline{B''B}} = \frac{\sin a}{\cos a \sin b} \quad \text{oder} \quad \sin b = \cot\alpha \tan a,$$

wozu wieder gehört

$$\sin a = \cot\beta \tan b.$$

Schließlich gibt die Multiplikation der Formeln für $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ wegen $\cos c = \cos a \cos b$ noch

$$\cos\alpha \cos\beta = \cos a \sin\beta \cos b \sin\alpha \quad \text{oder} \quad \cos c = \cot\alpha \cot\beta.$$

71. Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks

Im rechtwinklig sphärischen Dreieck ist ein Stück, der rechte Winkel, vorgegeben; ein rechtwinkliges Dreieck ist also durch zwei beliebige seiner übrigen fünf Stücke festgelegt. — Die zehn in der NEPERschen Regel enthaltenen Formeln gestatten, zu zwei Stücken stets ein drittes abzuleiten. Bei der Auswahl der Formeln wird man darauf achten, daß sie außer dem gesuchten Stück nach Möglichkeit nur ursprünglich gegebene, nicht aber schon abgeleitete Stücke enthalten. Weiter wird man, wenn möglich, Sinusformeln wegen der Doppeldeutigkeit der Lösungen vermeiden und wegen der größeren Rechenschärfe überdies Tangens- und Kotangensformeln bevorzugen.

Für EULERsche Dreiecke sind alle Stücke kleiner als 180°, also geben Kosinus, Tangens und Kotangens stets eindeutige Werte.

Ist das gesuchte Stück nahe bei 0° oder 180°, so liefert der Kosinus unscharfe Werte, und ist es nahe bei 90°, so kann es aus dem Sinus nur ungenau bestimmt werden.

Für die **Auflösung des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks** sind **sechs Aufgaben** zu unterscheiden; dabei können folgende Stücke gegeben sein:

1. die Hypotenuse und eine Kathete,
2. beide Katheten,
3. die Hypotenuse und ein Winkel,
4. eine Kathete und der Anwinkel,
5. eine Kathete und ihr Gegenwinkel,
6. die Gegenwinkel der Katheten.

Im folgenden wird für jede Aufgabe eine vollständige Lösung angegeben, die die gesuchten Stücke unmittelbar als Funktion der gegebenen Stücke liefert. — Ist γ der rechte Winkel, so lauten die Lösungen:

1. Gegeben seien c, a; gesucht sind α, β, b:

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \cos\beta = \cot c \tan a \quad \text{und} \quad \cos b = \frac{\cos c}{\cos a}.$$

2. Gegeben seien a, b; gesucht sind α, β, c:

$$\cot\alpha = \frac{\sin b}{\tan a}, \quad \cot\beta = \frac{\sin a}{\tan b}, \quad \cos c = \cos a \cos b.$$

Liegen a, b oder c nahe bei 0°, so rechnet man c besser nach

$$\tan c = \frac{\tan b}{\cos\alpha} = \frac{\tan a}{\cos\beta}.$$

3. Gegeben seien α, c; gesucht sind β, a, b:

$$\cot\beta = \cos c \tan\alpha, \quad \sin a = \sin\alpha \sin c, \quad \tan b = \cos\alpha \tan c.$$

Liegt a nahe bei 90°, dann wählt man besser

$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos b} \quad \text{oder} \quad \tan a = \tan c \cos\beta.$$

4. Gegeben seien b, α; gesucht sind a, c, β:

$$\tan a = \sin b \tan\alpha, \quad \cot c = \cos\alpha \cot b, \quad \cos\beta = \cos b \sin\alpha.$$

Liegt β in der Nähe von 0°, dann ist

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}$$

genauer.

5. Gegeben seien a, α; gesucht sind b, c, β:

$$\sin b = \tan a \cot\alpha, \quad \sin c = \frac{\sin a}{\sin\alpha}, \quad \sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos a}.$$

6. Gegeben seien α, β; gesucht sind a, b, c:

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}, \quad \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}, \quad \cos c = \cot\alpha\cot\beta.$$

In den Aufgaben 2, 4 und 6 sind alle gesuchten Stücke, in den Aufgaben 1, 3 nur b und β durch den Kosinus, den Tangens oder Kotangens ausgedrückt, also eindeutig bestimmt. In 1 ist α und in 3 ist a durch den Sinus, aber trotzdem eindeutig bestimmt; denn aus $\tan\alpha = \tan a/\sin b$ [vgl. (69.4)], worin wegen $b < 180°$ stets $\sin b > 0$ ist, folgt, daß $\tan\alpha$ und $\tan a$ gleiche Vorzeichen haben, somit α und a im gleichen Quadranten liegen müssen: eine Kathete und ihr Gegenwinkel sind also zugleich spitz oder stumpf. Damit sind auch die Aufgaben 1 und 3 eindeutig lösbar. — Lediglich für Aufgabe 5 können zwei Lösungen auftreten. Aus Abb. 71.1 geht hervor, daß das Dreieck $\triangle$ und sein Nebendreieck $\triangle_1$ in den Stücken $a=a_1$ und $\alpha=\alpha_1$ übereinstimmen, während für die übrigen Stücke von $\triangle_1$ gilt: $b_1 = 180°-b$, $\beta_1 = 180°-\beta$, $c_1 = 180°-c$, d. h. b_1, β_1 und c_1 sind die Supplemente von b, β und c. — Tatsächlich werden die gesuchten Stücke von $\triangle$ aus ihrem Sinus, also doppeldeutig bestimmt. Über b und β ist aber leicht zu entscheiden, denn zur spitzen Seite b gehört wegen der vorhin gezeigten Gleichartigkeit der Katheten und ihrer Gegenwinkel auch der spitze Winkel β. Aber auch über die Hypotenuse c ist leicht zu entscheiden: Aus $\cos c = \cos a\cos b$ ist zu ersehen, daß $\cos c$ positiv ist, wenn $\cos a$ und $\cos b$ gleiche Vorzeichen haben, a und b also gleichartig sind; dagegen wird $\cos c$ negativ, wenn $\cos a$ und $\cos b$ verschiedene Vorzeichen haben, a und b also ungleichartig sind. Die Hypotenuse c ist somit spitz, wenn die Katheten im gleichen Quadranten, stumpf, wenn sie in verschiedenen Quadranten liegen. — Es ergeben sich also zwei Dreiecke.

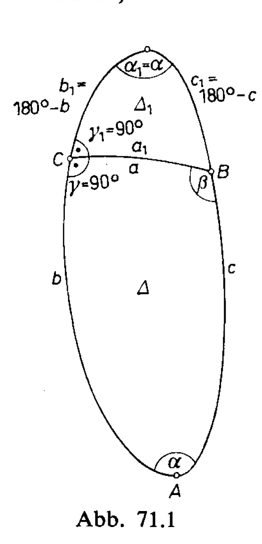


Abb. 71.1

Ist auch die Hypotenuse $c = 90°$, dann folgt aus $\cos c = \cos a\cos b$, daß auch eine der Katheten gleich 90° sein muß; aus $\sin a = \sin\alpha\sin c$, $\sin b = \sin\beta\sin c$ folgt noch, daß dann auch der Gegenwinkel der Kathete 90° wird. Ist z. B. $b = 90°$, so ist auch $\beta = 90°$, und aus $\sin\alpha = \sin a/\sin c$ ergibt sich noch, daß auch die andere Kathete und ihr Gegenwinkel gleich werden: Für $a = \alpha$ entsteht also ein doppeltrechtwinkliges Dreieck, d. h. ein halbes Kugelzweieck. Sind alle Winkel $\alpha = \beta = \gamma = 90°$, so folgt aus

$$\cos\alpha = \cos a\sin\beta = 0, \quad \cos\beta = \cos b\sin\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \cos c = \cos a\cos b = 0,$$

daß auch alle Seiten $a = b = c = 90°$ sind. Es liegt also ein Oktantendreieck vor, das ohne trigonometrische Hilfsmittel berechnet werden kann.

Die Bedingungen für die Lösbarkeit der Aufgabe ergeben sich daraus, daß der Sinus eines der gesuchten Stücke kleiner 1, der Kosinus absolut kleiner als 1 sein muß. Für die Aufgaben 2, 3 und 4 sind diese Bedingungen stets erfüllt. Für die Diskussion der Aufgaben 1, 5 und 6 beschränken wir uns auf den Fall, daß b und c, also auch a, α und β spitz sind. Für 1 und 5 findet man aus

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \cos\beta = \cot c \tan a, \quad \cos b = \frac{\cos c}{\cos a},$$

$$\sin b = \tan a \cot\alpha, \quad \sin c = \frac{\sin a}{\sin\alpha}, \quad \sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos a}$$

die Ungleichungen

$$\sin a < \sin c, \quad \tan a < \tan c, \quad \cos c < \cos a, \quad \cos\alpha < \cos a$$

und somit die übereinstimmenden Bedingungen

$$a < c, \quad a < \alpha.$$

Für 6 folgen aus

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}, \quad \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}, \quad \cos c = \cot\alpha \cot\beta$$

die Ungleichungen

$$\cos\alpha < \sin\beta, \quad \cos\beta < \sin\alpha, \quad \cot\alpha < \tan\beta,$$

die man in der Form

$$\sin(90°-\alpha) < \sin\beta, \quad \cos\beta < \cos(90°-\alpha), \quad \tan(90°-\alpha) < \tan\beta$$

schreiben kann. Daraus folgt übereinstimmend die Bedingung, daß

$$90°-\alpha < \beta \quad \text{oder} \quad \alpha+\beta > 90°$$

sein muß. — Für die Lösung der Aufgaben 1, 5 und 6 ist also zu beachten, daß in einem rechtwinkligen Dreieck mit spitzen Stücken die Summe der beiden Winkel größer als 90° und jede Kathete kleiner als ihr Gegenwinkel und als die Hypotenuse ist.

Von G. Hessenberg, a.a.O. S. 124, stammt noch der interessante Hinweis: In den Aufgaben 2, 3 und 4 sind, wenn man vom rechten Winkel (γ) absieht, stets benachbarte, in 1, 5 und 6 dagegen getrennt liegende Stücke gegeben. Ersetzt man die Katheten a und b durch ihre Komplemente $a^* = 90°-a$, $b^* = 90°-b$, so gilt der Satz: Zwei benachbarte der fünf Stücke α, c, β, a^*, b^* dürfen zwischen 0° und 90° ganz beliebig, zwei getrennte aber nur so gewählt werden, daß ihre Summe 90° übersteigt; dieser Satz ist an Hand der Ungleichungen $c+a^* > 90°$, $\alpha+a^* > 90°$ leicht zu bestätigen.

Für beliebige rechtwinklige Dreiecke lauten die Bedingungen der Lösbarkeit: $90° < \alpha+\beta < 270°$, $-90° < \alpha-\beta < +90°$, weiter müssen c und α näher an 90° sein

als a, d. h. c muß zwischen a und $180°-a$, α zwischen a und $90°$ liegen. — Übrigens können die sechs Aufgaben als Sonderfälle der Grundaufgaben für das allgemeine sphärische Dreieck für $\gamma = 90°$ aufgefaßt werden, d. h. die Lösbarkeitsbedingungen ergeben sich auch aus den Überlegungen in [66] und [67].

72. Berechnung des rechtseitigen, gleichschenkligen und gleichseitigen Dreiecks

Ist im sphärischen Dreieck eine Seite gleich 90°, so spricht man von einem *rechtseitigen Dreieck* oder *Quadrantendreieck*. Ein rechtseitiges Dreieck läßt sich durch Polarisation auf ein rechtwinkliges Dreieck zurückführen — der 90°-Seite entspricht ein rechter Polarwinkel — und nach der NEPERschen Regel behandeln. — Man kann aber auch für das rechtseitige Dreieck eine NEPER*sche Regel* angeben[71]: Zunächst geben die Gleichungen 69.1) bis (69.10) für das Polardreieck die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\cos\bar{c} &= \cos\bar{a}\cos\bar{b}, & \sin\bar{a} &= \sin\bar{c}\sin\bar{\alpha},\\
\sin\bar{b} &= \sin\bar{c}\sin\bar{\beta}, & \sin\bar{b} &= \tan\bar{a}\cot\bar{\alpha},\\
\sin\bar{a} &= \tan\bar{b}\cot\bar{\beta}, & \cos\bar{\alpha} &= \cot\bar{c}\tan\bar{b},\\
\cos\bar{\beta} &= \cot\bar{c}\tan\bar{a}, & \cos\bar{\alpha} &= \sin\bar{\beta}\cos\bar{a},\\
\cos\bar{\beta} &= \sin\bar{\alpha}\cos\bar{b}, & \cos\bar{c} &= \cot\bar{\alpha}\cot\bar{\beta}.
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man mit

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha} &= 180°-a, & \bar{\beta} &= 180°-b, & \bar{\gamma} &= 180°-c = 90°,\\
\bar{a} &= 180°-\alpha, & \bar{b} &= 180°-\beta, & \bar{c} &= 180°-\gamma
\end{aligned}$$

die Formeln

$$\begin{aligned}
\cos\gamma &= -\cos\alpha\cos\beta, & \sin\alpha &= \sin\gamma\sin a,\\
\sin\beta &= \sin\gamma\sin b, & \sin\beta &= \tan\alpha\cot a,\\
\sin\alpha &= \tan\beta\cot b, & \cos a &= -\cot\gamma\tan\beta,\\
\cos b &= -\cot\gamma\tan\alpha, & \cos a &= \sin b\cos\alpha,\\
\cos b &= \sin a\cos\beta, & \cos\gamma &= -\cot a\cot b.
\end{aligned}$$

Auch diese zehn Formeln lassen sich in eine *Regel* fassen: Ordnet man die Stücke, indem man die rechte Seite ausläßt, und die der rechten Seite anliegenden Winkel durch ihre Komplemente und den ihr gegenüberlie-

[71] Die NEPERsche Regel für das rechtseitige Dreieck ist von weit geringerer Bedeutung als die für das rechtwinklige Dreieck.

genden Winkel durch sein Supplement ersetzt, auf einem Kreis an (Abb. 72.1), dann ist der Kosinus irgendeines Stückes gleich dem Produkt der Kotangens der anliegenden oder dem Produkt der Sinusse der nicht anliegenden Stücke.

Ein *gleichschenkliges Dreieck* liegt vor, wenn zwei Seiten gleich sind (Abb. 72.2). Da auch im Kugeldreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt, folgt daraus, daß auch die der Basis c anliegenden Winkel gleich sind, also $\alpha = \beta$ ist. Für die Berechnung zerlegt man, ebenso

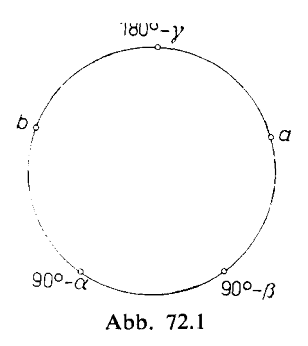


Abb. 72.1

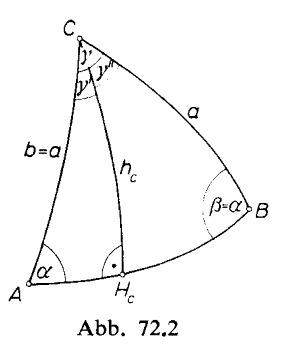


Abb. 72.2

wie in der Ebene, das gleichschenklige Dreieck mit Vorteil in zwei rechtwinklige Dreiecke. Fällt man (s. Abb. 72.2) die Höhe h_c auf die Grundlinie c — die Höhe h_c gehört natürlich dem durch C führenden, zu AB orthogonalen Großkreis an —, so können die bei H_c rechtwinkligen Teildreiecke AH_cC und H_cBC nach der NEPERschen Regel berechnet werden. Da die beiden Teildreiecke in drei und demnach in allen Stücken übereinstimmen — die Teildreiecke sind also symmetrisch gleich, nicht aber kongruent —, ist auch $\gamma' = \gamma''$ und $AH_c = H_cB$, also ist die Höhe h_c sowohl Seiten- und Winkelhalbierende als auch Mittelsenkrechte.

Im *gleichseitigen Dreieck* sind alle drei Seiten s und alle drei Winkel ω gleich, wobei die Ungleichungen $0 < s \leqq 120°$ und $60° \leqq \omega \leqq 180°$ gelten. Auch das gleichseitige Dreieck kann durch Fällen einer Höhe (zu einer beliebigen Seite!) in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt werden.

Kapitel 14: Weitere Beziehungen und Sätze für das allgemeine sphärische Dreieck

73. Der Eckensinus

Die bei der Ableitung der sphärischen Grundformeln benützte Figur, die in Abb. 73.1 wiederholt ist, zeigt, daß die Grundfläche $PZQM$ des Fünfflächners $PZQMC$ ein Sehnenviereck mit dem Umkreisradius $\overline{MZ} = d$ ist, weil die Winkel ZPM und ZQM Rechte sind. Zeichnet man im sphärischen Dreieck ABC die sphärische Höhe h_c ein, so erkennt man, daß auch der Neigungswinkel der Kante $\overline{MC}$ gegen die Ebene MAB gleich h_c ist, und aus dem rechtwinkligen Dreieck MZC folgt wegen $\overline{MC} = 1$ noch $\overline{MZ} = d = \cos h_c$ und $\overline{CZ} = \sin h_c$. — Für die Grundfläche MAB der dem $\triangle ABC$ zugeordneten Ecke, dem Tetraeder $MABC$, gilt

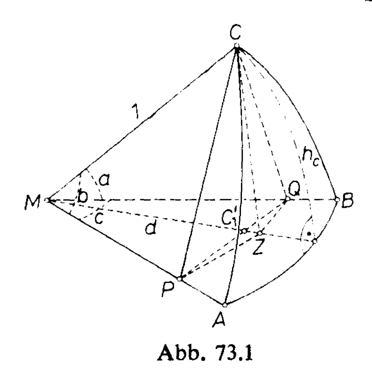


Abb. 73.1

$$F = \frac{1}{2} \overline{MA}\,\overline{MB} \sin c\,,$$

bzw. mit $\overline{MA} = \overline{MB} = 1$ wird also $F = (1/2) \sin c$; somit wird das Volumen des Tetraeders $MABC$ mit $V =$ Grundfläche · Höhe/3 gleich

$$V = \frac{\sin c \sin h_c}{6} = \frac{1}{6} S, \tag{73.1a}$$

wobei $S = \sin c \sin h_c$ nach v. STAUDT[72] als der *Eckensinus*, oft auch als der *Sinus des sphärischen Dreiecks ABC* bezeichnet wird. — Liegt das Dreieck ABC auf einer Kugel vom Radius R, so wird das Volumen des dem Dreieck zugeordneten Tetraeders gleich

$$V = \frac{R^3}{6} S. \tag{73.1b}$$

---

[72] K. G. v. STAUDT, 1798–1867.

Haben die Kanten des Tetraeders die Längen l, m, n, so wird die Grundfläche $F = (1/2)\, l\, m \sin c$, die Höhe gleich $n \sin h_c$, also das Volumen

$$V = \frac{l\,m\,n}{6} S. \tag{73.1c}$$

Den Eckensinus erhält man offenbar, indem der Sinus des von zwei dieser Ecke entspringenden Kanten eingeschlossenen Winkels mit dem Sinus des Winkels multipliziert wird, um den sich die dritte Kante gegen die Ebene der ersten erhebt. Sind h_a, h_b, h_c die zu a, b, c gehörigen Höhen, so gilt also

$$S = \sin a \sin h_a = \sin b \sin h_b = \sin c \sin h_c. \tag{73.2}$$

(73.2) läßt sich mit Hilfe der Grundfläche des Fünfflächners in Abb. 73.1, dem Sehnenviereck $MPZQ$, umformen: Nach der Durchmesserregel gilt einerseits

$$c_1' = \overline{PQ} = \overline{MZ} \sin c = \cos h_c \sin c, \tag{I}$$

und der Kosinussatz gibt für $\triangle MPQ$

$$c_1'^2 = (\overline{PQ})^2 = \cos^2 a + \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \cos c. \tag{II}$$

Schreibt man für das Quadrat des Eckensinus

$$S^2 = \sin^2 c \sin^2 h_c = \sin^2 c (1 - \cos^2 h_c) = 1 - \cos^2 c - \sin^2 c \cos^2 h_c,$$

so erhält man mit (I) zunächst $S^2 = 1 - \cos^2 c - c_1'^2$ und mit (II) schließlich

$$S^2 = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c. \tag{73.3}$$

In derselben Weise läßt sich (73.3) aus den übrigen Beziehungen von (73.2) ableiten.

Eine andere Herleitung von (73.3) ist im Anschluß an [59] möglich: Das Skalarprodukt $(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]) = \sin b \sin c \sin \alpha$ ist das Volumen des von den Kanten $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$, $|\boldsymbol{c}|$ gebildeten Parallelepipeds oder gleich dem sechsfachen Volumen eines Tetraeders mit denselben Kanten. Verbindet man die Ecken eines auf der Kugel mit dem Radius R liegenden Dreiecks mit dem Kugelmittelpunkt, so gilt für das Volumen des zugeordneten Tetraeders $V = (1/6) R^3 \sin b \sin c \sin \alpha$, d. h. der Faktor $\sin b \sin c \sin \alpha$ ist wieder der Eckensinus S. Die Übereinstimmung mit (73.3) ist leicht nachzuweisen, wenn man in $S^2 = \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 \alpha = \sin^2 b \sin^2 c (1 - \cos^2 \alpha)$ den $\cos \alpha$ durch den Seitenkosinussatz ausdrückt.

Eine weitere von E. Study angegebene Formel für S läßt sich auf folgende Weise gewinnen: Erweitert man

$$S^2 = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c$$

um $+\cos^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \cos^2 b$, so wird

$$\begin{aligned} S^2 &= \sin^2 a \sin^2 b - [\cos^2 c + \cos^2 a \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \cos c] \\ &= \sin^2 a \sin^2 b - (\cos c - \cos a \cos b)^2 \\ &= (\cos c - \cos a \cos b - \sin a \sin b)(\cos a \cos b + \sin a \sin b - \cos c) \\ &= [\cos c - \cos(a+b)]\,[\cos(a-b) - \cos c]. \end{aligned}$$

Die Verwandlungsformeln liefern dafür

$$S^2 = 2 \sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2}\, 2 \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}$$

oder mit $s = (a+b+c)/2$ endlich

$$S = 2\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}. \qquad (73.4)$$

Für das Volumen des dem Polardreieck $\bar{\triangle}$ von $\triangle$ zugeordneten Tetraeders folgt durch Polarisation

$$\bar{V} = \frac{1}{6} R^3 \bar{S},$$

wobei sich für den *Polareckensinus* $\bar{S}$ durch Polarisation von (73.3)

$$\bar{S} = \sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \qquad (73.5)$$

ergibt. Durch entsprechende Umformung von (73.5) oder durch Polarisation von (73.4) läßt sich für $\bar{S}$ noch die Form

$$\bar{S} = 2\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)} \qquad (73.6)$$

finden, wobei $\sigma = (\alpha+\beta+\gamma)/2$ ist.

Der Vergleich von (73.4) und (73.6) mit den Halbwinkel- bzw. Halbseitensätzen zeigt, daß man durch Multiplikation der Formeln für $\sin(\alpha/2)$ und $\cos(\alpha/2)$ bzw. $\sin(a/2)$ und $\cos(a/2)$ erhält:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin b \sin c}\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)} = \frac{S}{2\sin b \sin c},$$

$$\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{\sin\beta\sin\gamma}\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)} = \frac{\bar{S}}{2\sin\beta\sin\gamma}$$

oder

$$\sin\alpha = \frac{S}{\sin b \sin c} \quad \text{und} \quad \sin a = \frac{\bar{S}}{\sin\beta\sin\gamma}. \qquad (73.7a)$$

Die zyklische Vertauschung von (73.7a) gibt noch

$$\sin\beta = \frac{S}{\sin c \sin a}, \quad \sin b = \frac{\bar{S}}{\sin\gamma\sin\alpha}, \qquad (73.7b)$$

$$\sin\gamma = \frac{S}{\sin a \sin b}, \quad \sin c = \frac{\bar{S}}{\sin\alpha\sin\beta}. \qquad (73.7c)$$

Bildet man noch

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\frac{S}{\sin b \sin c}}{\sin a} = \frac{S}{\sin a \sin b \sin c},$$

so läßt sich der Sinussatz in der Form

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c} = \frac{S}{\sin a \sin b \sin c} \tag{73.8a}$$

schreiben. Ebenso findet man mit

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\bar{S}}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

noch

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = \frac{\bar{S}}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}. \tag{73.8b}$$

Endlich ist das Verhältnis $S/\bar{S}$ zwischen Ecken- und Polareckensinus gleich dem *Modul M* des Dreiecks ABC, nämlich

$$M = \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = \frac{S}{\bar{S}}. \tag{73.8c}$$

74. Die Höhen und die Radien für Um- und Inkreis des sphärischen Dreiecks

Die *Höhe* h_c zerlegt das Dreieck ABC in die bei H_c rechtwinkligen Teildreiecke H_cCA und H_cBC (Abb. 74.1), woraus man nach der NEPERschen Regel erhält:

$$\sin h_c = \sin b \sin\alpha = \sin a \sin\beta.$$

Mit (73.7a) wird daraus

$$\sin h_c = \frac{S}{\sin c} = \frac{\bar{S}}{\sin\gamma}. \tag{74.1a}$$

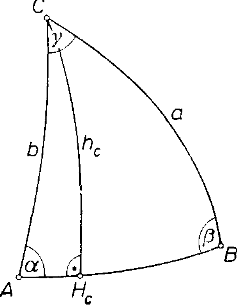


Abb. 74.1

Für h_a und h_b erhält man durch zyklische Vertauschung noch

$$\sin h_a = \sin c \sin\beta = \sin b \sin\gamma = \frac{S}{\sin a} = \frac{\bar{S}}{\sin\alpha}, \tag{74.1b}$$

$$\sin h_b = \sin a \sin\gamma = \sin c \sin\alpha = \frac{S}{\sin b} = \frac{\bar{S}}{\sin\beta}. \tag{74.1c}$$

Übrigens schneiden sich die drei Höhen h_a, h_b, h_c in einem Punkt, wie in [76] noch gezeigt wird.

Um für den *Umkreis* eines Dreiecks den Mittelpunkt U und den Radius r bestimmen zu können, wird zunächst nachgewiesen, daß U der Schnitt-

punkt der sphärischen Mittelsenkrechten zu den Seiten a, b und c ist. Der geometrische Ort der Punkte, die von zwei Kugelpunkten A und B gleiche sphärische Abstände haben, ist der zu AB senkrechte, durch den Seitenmittelpunkt H_c' von AB gehende Großkreis. Ist P ein Punkt des gesuchten Ortes, so gilt mit den Bezeichnungen in Abb. 74.2 nach dem Seitenkosinussatz

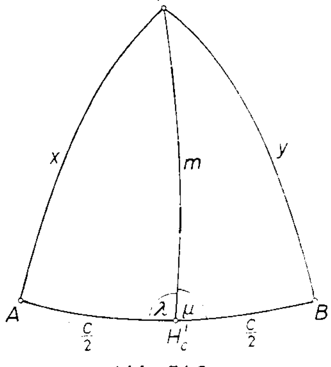


Abb. 74.2

$$\cos\lambda = \frac{\cos x - \cos\frac{c}{2}\cos m}{\sin\frac{c}{2}\sin m},$$

$$\cos\mu = \frac{\cos y - \cos\frac{c}{2}\cos m}{\sin\frac{c}{2}\sin m};$$

ferner gilt, weil voraussetzungsgemäß $x = y$ sein soll, $\cos\lambda = \cos\mu$, oder $\lambda = \mu$. Da λ und μ Supplemente sind, muß $\lambda = \mu = 90°$ sein. Der Bogen $H_c'P$ ist also die Mittelsenkrechte von AB. — Ist P nun irgend ein anderer Punkt der Mittelsenkrechten, so gilt, wenn die Bezeichnungen beibehalten werden, wegen $\lambda = \mu = 90°$ nach dem Kosinussatz jetzt

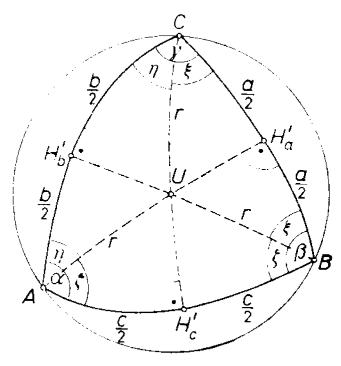


Abb. 74.3

$$\cos x = \cos\frac{c}{2}\cos m,$$

$$\cos y = \cos\frac{c}{2}\cos m,$$

also ist $x = y$. Um den *Mittelpunkt U des Umkreises* zu finden, zeichnet man die Mittelsenkrechten zu den Seiten $BC = a$ und $CA = b$, die sich in U schneiden (Abb. 74.3). Da U auf der Mittelsenkrechten von BC liegt, ist $UB = UC$; da U auch auf der Mittelsenkrechten von CA liegt, weil außer den Punkten der Mittelsenkrechten kein Punkt die vorige Bedingung erfüllt, ist $UC = UA$, folglich also $UA = UB = UC$. Damit liegt U auch auf der Mittelsenkrechten von AB; die drei Mittelsenkrechten eines sphärischen Dreiecks schneiden sich also in einem Punkt. Für den Radius r gilt $r = UA = UB = UC$. Soll r aus den Seiten und Winkeln des Dreiecks berechnet werden, so benötigt man zunächst die Basiswinkel ξ, η und ζ der gleichschenkligen Dreiecke ABU, BCU und CAU, für die aus Abb. 74.3

die Gleichungen $\eta+\zeta = \alpha$, $\zeta+\xi = \beta$, $\xi+\eta = \gamma$ abgelesen werden können. Die Auflösung nach ξ, η und ζ gibt

$$2\zeta = \alpha+\beta-\gamma \quad \text{oder} \quad \zeta = \frac{\alpha+\beta+\gamma-2\gamma}{2} = \sigma-\gamma.$$

Ebenso erhält man $\eta = \sigma-\beta$ und $\xi = \sigma-\alpha$. Das bei H_c' rechtwinklige Dreieck $AH_c'U$ liefert

$$\cos\zeta = \cot r \cot\left(90° - \frac{c}{2}\right) \quad \text{oder} \quad \tan r = \frac{\tan\frac{c}{2}}{\cos(\sigma-\gamma)},$$

woraus durch zyklische Vertauschung die Formel

$$\tan r = \frac{\tan\frac{a}{2}}{\cos(\sigma-\alpha)} = \frac{\tan\frac{b}{2}}{\cos(\sigma-\beta)} = \frac{\tan\frac{c}{2}}{\cos(\sigma-\gamma)} \tag{74.2}$$

folgt. Sind die Winkel gegeben, so drückt man $\tan(a/2)$, $\tan(b/2)$, $\tan(c/2)$ in (74.2) durch die Halbseitenformeln aus und findet

$$\tan r = \sqrt{\frac{-\cos\sigma}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}} \tag{74.3a}$$

oder mit Hilfe des Polareckensinus $\bar{S}$ nach (73.6)

$$\tan r = \frac{2\cos\sigma}{\bar{S}}. \tag{74.3b}$$

Sind die Seiten gegeben, so ist folgendermaßen zu verfahren: Die Halbseitenformeln geben

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} = \frac{\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\gamma}\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}}$$

oder

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\gamma = \cos(\sigma-\gamma)\cos\frac{c}{2}.$$

Damit folgt wegen (74.2)

$$\tan r = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{c}{2}\cos(\sigma-\gamma)} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\gamma}.$$

Drückt man $\sin\gamma$ nach (73.7c) durch den Eckensinus S aus, so wird schließlich

$$\tan r = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{S}. \tag{74.4}$$

Mittelpunkt und *Radius* ϱ für den *Inkreis* ergeben sich mit Hilfe des Schnittpunkts der drei Winkelhalbierenden. I sei der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von α und β. Fällt man von I die Lote auf die Seiten a, b, c, so entstehen durch die Fußpunkte H_A'', H_B'', H_C'' drei Paare rechtwinkliger Dreiecke (Abb. 74.4). Für die Teildreiecke AIH_B'' und $AH_C''I$ gilt:

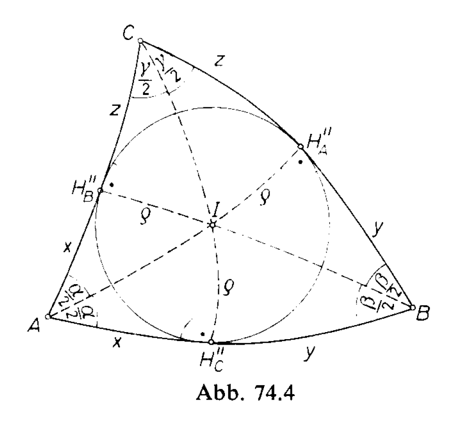


Abb. 74.4

$$\tan AH_B'' = \cos(\alpha/2) \tan AI,$$

$$\tan AH_C'' = \cos(\alpha/2) \tan AI,$$

d. h. $AH_B'' = AH_C'' = x$; da die beiden Dreiecke somit in drei Stücken übereinstimmen, muß auch $IH_B'' = IH_C''$ sein. — In gleicher Weise ist nachzuweisen, daß $BH_C'' = BH_A'' = y$ und $IH_C'' = IH_A''$ ist. Also berührt der Kreis mit dem Radius $\varrho = IH_A'' = IH_B'' = IH_C''$ die Seiten a, b, c in den Punkten H_A'', H_B'', H_C'', und die von den Ecken A, B, C ausgehenden Tangenten sind gleich lang; denn aus den Dreiecken $H_A''CI$ und $H_B''IC$ folgt noch:

$$\cos CI = \cos CH_A'' \cos \varrho = \cos CH_B'' \cos \varrho, \text{ d. h. es ist } CH_B'' = CH_A'' = z.$$

Schließlich folgt aus denselben Dreiecken, daß CI den Winkel γ halbiert, d. h. die Winkelhalbierenden eines sphärischen Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt I des Inkreises.

Ein einfacher Beweis dafür, daß sich die drei Winkelhalbierenden eines sphärischen Dreiecks in einem Punkt schneiden, läßt sich mit Hilfe des Sechsgrößenbruches führen, vgl. [76].

Der Inkreis berührt also die Seiten in den Punkten H_A'', H_B'' und H_C'' (Abb. 74.4), wodurch die Seiten a, b, c in drei Paare gleicher Teilstrecken

$$AH_B'' = AH_C'' = x, \quad BH_C'' = BH_A'' = y, \quad CH_A'' = CH_B'' = z$$

zerlegt werden. Für diese Teilstrecken gelten die Gleichungen $x+y = c$, $y+z = a$, $z+x = b$; löst man nach x, y und z auf und führt $s = (a+b+c)/2$ ein, so wird $x = s-a$, $y = s-b$, $z = s-c$. Für den Inkreisradius erhält man z. B. aus dem bei H_C'' rechtwinkligen Dreieck $AH_C''I$

$$\tan \varrho = \tan \frac{\alpha}{2} \sin x = \tan \frac{\alpha}{2} \sin(s-a),$$

woraus durch zyklische Vertauschung

$$\tan \varrho = \tan \frac{\alpha}{2} \sin (s-a) = \tan \frac{\beta}{2} \sin (s-b) = \tan \frac{\gamma}{2} \sin (s-c) \quad (74.5)$$

folgt. Soll ϱ aus den Seiten a, b, c berechnet werden, so erhält man aus (74.5) mit den Halbwinkelformeln bzw. mit dem Eckensinus nach (73.4)

$$\tan \varrho = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s}} = \frac{S}{2 \sin s}. \quad (74.6)$$

Umständlicher wird die Lösung, wenn die Winkel gegeben sind; die Halbwinkelsätze geben

$$\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin (s-a)}{\sin a} \cdot \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}} = \frac{\sin (s-a)}{\sin a} \sin \frac{\alpha}{2};$$

also wird

$$\tan \varrho = \tan \frac{\alpha}{2} \frac{\sin a \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \frac{\sin a}{2 \sin \alpha}.$$

Drückt man $\sin a/\sin \alpha$ durch den Polareckensinus aus, so wird

$$\tan \varrho = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \frac{\bar{S}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = \frac{\bar{S}}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \quad (74.7)$$

oder mit (73.6)

$$\tan \varrho = \frac{\sqrt{-\cos \sigma \cos (\sigma-\alpha) \cos (\sigma-\beta) \cos (\sigma-\gamma)}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}. \quad (74.8)$$

Die *Radien* ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c *der Ankreise* an die Seiten a, b, c schließlich findet man durch folgende Überlegung: Der Ankreis an a ist zugleich Inkreis des der Seite a benachbarten Nebendreiecks $\triangle_1$ mit den Stücken $a_1 = a$, b_1, c_1, $\alpha_1 = \alpha$, β_1, γ_1; um ϱ_a in Stücken von $\triangle$ auszudrücken, hat man also lediglich in (74.5) bis (74.8) die Stücke b, c, β, γ durch $180° - b$, $180° - c$, $180° - \beta$ und $180° - \gamma$ zu ersetzen. In derselben Weise ist bei der Bestimmung von ϱ_b und ϱ_c zu verfahren. — Auch die Umkreisradien r_1, r_2, r_3 der Nebendreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ lassen sich auf einfache Weise aus den Gleichungen (74.2) bis (74.4) gewinnen.

Zwischen den Halbmessern (r, r_1, r_2, r_3, ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c) der acht Kreise am Dreieck bestehen übrigens noch interessante Beziehungen (vgl. z. B. E. Hammer, a.a.O. S. 504).

75. Fläche des sphärischen Dreiecks

Nach [53] gilt für die *Fläche F des sphärischen Dreiecks*

$$F = R^2 \operatorname{arc}(\alpha+\beta+\gamma-180^\circ) = R^2 \operatorname{arc} \varepsilon. \qquad (75.1)$$

Führt man ε im Gradmaß ein, also $\varepsilon^\circ = \varrho^\circ \operatorname{arc} \varepsilon = (180^\circ/\pi) \operatorname{arc} \varepsilon$, so wird

$$F = \frac{R^2\pi}{180^\circ}\,\varepsilon^\circ.$$

Mit der Oberfläche $O = 4R^2\pi$ der Kugel vom Radius R wird daraus

$$F = \frac{O}{720^\circ}\,\varepsilon^\circ. \qquad (75.2)$$

Die Fläche des Kugeldreieckes ist dem sphärischen Exzess proportional, die Proportionalitätskonstante ist der 720ste Teil der Kugeloberfläche. Das ist der *Satz von* GIRARD (Inventions nouvelles en Algèbre, Amsterdam 1629). — In der Stereometrie sagt man dafür meist kurz: Der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks ist gleich seinem Exzess, wobei zu beachten ist, daß als Maßeinheit die Fläche verwendet wird, die dem Exzess 1°, 1′ oder 1″ entspricht.

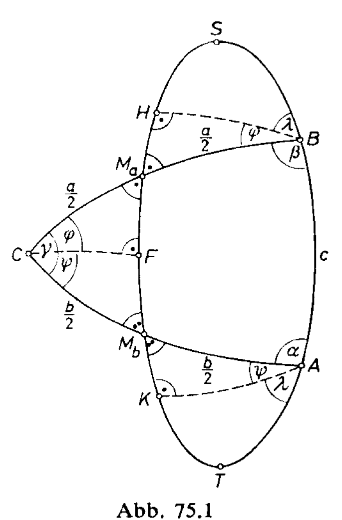


Abb. 75.1

Übrigens kann der Exzess ε von $\triangle$ auch geometrisch gedeutet werden: Bringt man den Großkreis durch die Seitenmittelpunkte M_a und M_b von a bzw. b mit dem Großkreis durch A und B zum Schnitt, so entsteht ein Kugelzweieck $TABSM_aM_bT$ (Abb. 75.1). Fällt man das Lot $CF \perp M_aM_b$ und macht $M_aH = M_aF$ und $M_bK = M_bF$, so gilt offenbar $\triangle CFM_a \cong \triangle M_aBH$, $\triangle CFM_b \cong \triangle M_bKA$. Somit gilt auch $\sphericalangle FCM_a = \sphericalangle M_aBH = \varphi$, $\sphericalangle FCM_b = \sphericalangle M_bAK = \psi$ und $HB = CF = KA = l$. Also stimmen auch die Dreiecke KTA und HSB in drei Stücken überein, und es ist $\sphericalangle TAK = \sphericalangle SBH = \lambda$. Damit lassen sich folgende Beziehungen angeben:

$$\alpha = 180^\circ-(\psi+\lambda), \quad \beta = 180^\circ-(\varphi+\lambda),$$
$$\alpha+\beta = 360^\circ-2\lambda-(\varphi+\psi) = 360^\circ-2\lambda-\gamma.$$

Bildet man daraus $(\alpha+\beta+\gamma)/2 = 180^\circ-\lambda$, so wird $\varepsilon/2 = 90^\circ-\lambda$.

Der halbe Exzess ist also gleich dem Komplement des Winkels, den das vom Endpunkt A der Seite AB auf die Mittellinie der anderen beiden Dreiecksseiten gefällte sphärische Lot mit der Verlängerung von BA einschließt (vgl. auch H. DÖRRIE, a.a.O. S. 344).

Sind die Winkel α, β, γ und somit auch der Exzess gegeben, so ist die Fläche F nach (75.1) bestimmbar. Sind die Seiten bekannt, so ist ε z. B. nach der Formel von L'HUILIER zu berechnen. — Sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, z. B. b, c und α, gegeben, so läßt sich ε wie folgt bestimmen: Aus

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = -\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \quad \text{und} \quad \cos\frac{\varepsilon}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

ergibt sich, wenn die rechten Seiten in $\alpha/2$ und $(\beta+\gamma)/2$ zerlegt und die Gleichungen mit $\cos a$ multipliziert werden, mit den DELAMBREschen Gleichungen

$$\cos\frac{a}{2}\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\alpha,$$

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2} = \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\alpha$$

und durch Division

$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin\alpha}{\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}+\cos\alpha}.$$

Nach H. DÖRRIE, a.a.O. S. 341 stammt diese Beziehung, die auch in der Form

$$\cot\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}}{\sin\alpha}+\cot\alpha$$

geschrieben werden kann, von CAGNOLI.

Die zyklische Vertauschung liefert das Gleichungssystem

$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin\alpha}{\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}+\cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{\cot\frac{c}{2}\cot\frac{a}{2}+\cos\beta} = \frac{\sin\gamma}{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cos\gamma}. \tag{75.3}$$

Sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben, so rechnet man zur Bestimmung von ε zweckmäßigerweise den dritten Winkel.

Für das rechtwinklige Dreieck gilt, wenn $\gamma = 90°$ ist und die Winkel α und β gegeben sind, für den Exzess

$$\varepsilon = \alpha+\beta-90°.$$

Sind die Katheten a und b gegeben, so folgt aus der dritten Gleichung von (75.3) noch

$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}. \tag{75.4}$$

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Fläche eines sphärischen Dreiecks durch eine Seite und den Bogen bestimmt ist, der die Mittelpunkte der anderen Seiten verbindet. Dies folgt unmittelbar aus der Beziehung

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2} = \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\alpha,$$

deren rechte Seite nichts anderes ist als der Kosinus des Bogens, der die Mitten der Seiten b und c miteinander verbindet. Der Bogen ist auch größer als die halbe erste Seite!

76. Weitere Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des sphärischen Dreiecks, die Sätze von Stewart, Ceva, Menelaos und Lexell

Außer den bisher abgeleiteten Formeln lassen sich noch zahlreiche weitere Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks angeben, die aber weniger bekannt geworden sind. Ohne auf Ableitungen einzugehen, sollen noch einige dieser Formeln angedeutet werden. Von F. W. Bessel z. B. stammt die Beziehung

$$\sin(a-b)\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta)\cos(a+b+c)$$
$$= \cos(\beta-b)\sin(\alpha+a+\gamma)-\cos(\alpha-a)\sin(\beta+b+\gamma).$$

Cagnoli hat die Beziehung

$$\sin a\sin b-\cos a\cos b\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta\cos c$$

angegeben, und Delambre werden die folgenden Formeln zugeschrieben:

$$\sin\beta(\cos\alpha\sin c+\cot b\cos c) = \sin\alpha\cot a,$$

$$\frac{\sin\gamma}{\tan b\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha} = \frac{\tan\alpha\cos\beta+\cos c\sin\beta}{\sin c}.$$

Gauss benützte gelegentlich die Ausdrücke

$$(\sin\alpha-\sin\beta)\sin c = (\sin a-\sin b)\sin\gamma,$$
$$(\sin\alpha+\sin\beta)\sin c = (\sin a+\sin b)\sin\gamma$$

und

$$(\cos\alpha+\cos\beta)\sin c = \sin(a+b)(1-\cos\gamma),$$
$$(\cos a+\cos b)\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)(1+\cos c),$$

die entweder durch Addition und Subtraktion geeigneter Grundgleichungen oder in ähnlicher Weise zu bestätigen sind. Natürlich lassen sich aus diesen Formeln durch zyklische Vertauschung und Polarisation noch weitere Beziehungen angeben. Statt dessen sollen einige der in Kapitel 6 für das ebene Dreieck angegebenen Sätze auf die Kugel übertragen werden.

Zu jedem Satz der Planimetrie gibt es einen analogen Satz für die Geometrie auf der Kugel, wobei an die Stelle der ebenen Kreise Kleinkreise auf der Kugel treten und die Geraden der Ebene durch Kugelgroßkreise zu ersetzen sind. Der Zielsetzung des Buches entsprechend ist es aber unmöglich, diese Analogien, die die ebenen Beziehungen als Spezialfälle der sphärischen erkennen lassen, vollständig darzustellen.

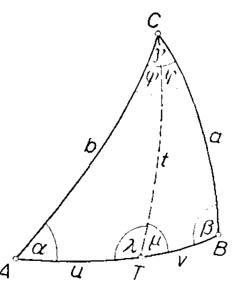


Abb. 76.1

Der *Satz von* STEWART: Für das Kugeldreieck läßt sich eine dem STEWART-Satz des ebenen Dreiecks analoge Beziehung angeben, die ebenso herzuleiten ist wie jene. Die Ecktransversale CT zerlegt das $\triangle ABC$ in die Teildreiecke ATC und TBC (Abb. 76.1). Mit den Bezeichnungen in Abb. 76.1 erhält man, wenn die Seiten b und a durch die Seitenkosinussätze ausgedrückt werden,

$$\cos\lambda = \frac{\cos b - \cos t \cos u}{\sin t \sin u}, \qquad \cos\mu = \frac{\cos a - \cos t \cos v}{\sin t \sin v}.$$

Wegen $\lambda+\mu = 180^\circ$ ist $\cos\lambda+\cos\mu = 0$, also folgt daraus

$$\frac{\cos b - \cos t \cos u}{\sin t \sin u} + \frac{\cos a - \cos t \cos v}{\sin t \sin v} = 0$$

oder, wenn mit dem Faktor $\sin u \sin v$ multipliziert wird,

$$\cos b \sin v - \cos t \cos u \sin v + \cos a \sin u - \cos t \cos v \sin u = 0.$$

Wegen $\sin v \cos u + \cos v \sin u = \sin(u+v) = \sin c$ folgt

$$\sin c \cos t = \sin u \cos a + \sin v \cos b. \tag{76.1}$$

Das ist die *erste Form des Satzes von* STEWART *für das sphärische Dreieck*; sie ist einfacher als die des ebenen Dreiecks, weil sie statt vier nur drei Glieder enthält. — Eine zweite Form läßt sich finden, wenn man die Transversale t durch die Teilwinkel φ und ψ von γ festlegt. Dividiert man (76.1) durch $\sin c \sin t$, so wird daraus

$$\cot t = \frac{\sin u \cos a + \sin v \cos b}{\sin c \sin t}.$$

Erweitert man rechts in Zähler und Nenner mit $\sin\lambda$ und formt die so entstehenden Produkte nach dem Sinussatz um, wobei $\mu = 180^\circ - \lambda$ ist, also

$$\sin u \sin\lambda = \sin b \sin\varphi, \quad \sin v \sin\lambda = \sin a \sin\psi, \quad \sin t \sin\lambda = \sin\beta \sin a,$$

so wird

$$\cot t = \frac{\cos a \sin b \sin\varphi + \sin a \cos b \sin\psi}{\sin a \sin\beta \sin c}.$$

Multipliziert man noch mit $\sin\gamma$ und schreibt

$$\sin\gamma \cot t = \sin\varphi \cot a \frac{\sin b \sin\gamma}{\sin c \sin\beta} + \sin\psi \cot b \frac{\sin b \sin\gamma}{\sin c \sin\beta},$$

so erhält man schließlich

$$\sin\gamma \cot t = \sin\varphi \cot a + \sin\psi \cot b. \tag{76.2}$$

Dies ist die *zweite Form des* STEWART*schen Satzes.* — Die Gleichungen (76.1) und (76.2) ermöglichen einige Anwendungen: Ist die Transversale CT die Winkelhalbierende t_c' des Winkels γ, also $\varphi = \psi = \gamma/2$, so liefert (76.2) für die Länge von t_c'

$$\cot t_c' = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}(\cot a + \cot b)}{\sin\gamma} = \frac{\cot a + \cot b}{2\cos\frac{\gamma}{2}}. \tag{76.3}$$

Halbiert CT die Seite c, ist also $u = v = c/2$, so gibt (76.1) für die Länge der Seitenhalbierenden t_c''

$$\sin c \cos t_c'' = \sin\frac{c}{2}(\cos a + \cos b) \quad \text{oder} \quad \cos t_c'' = \frac{\cos a + \cos b}{2\cos\frac{c}{2}}. \tag{76.4}$$

Abb. 76.2

Die entsprechenden Ausdrücke für t_a', t_b', t_a'', t_b'' erhält man aus (76.3) und (76.4) durch zyklische Vertauschung.

Mit Hilfe von (76.1) läßt sich auch der *Satz von* CASEY beweisen (vgl. H. DÖRRIE, a.a.O. S. 349). Ist O ein beliebiger Innenpunkt des Dreiecks ABC, P ein beliebiger Punkt auf der Kugeloberfläche und hat P von A, B, C, O die sphärischen Abstände l, m, n, o (Abb. 76.2), so gilt die Formel von CASEY:

$$S \cos o = S_1 \cos l + S_2 \cos m + S_3 \cos n, \tag{76.5}$$

wobei S, S_1, S_2, S_3 die Eckensinusse der Dreiecke ABC, BCO, CAO und ABO bedeuten. Für den Nachweis, den der Leser versuchen mag, hat man CO bis zum Schnitt mit AB zu verlängern und (76.1) auf die Figuren $ABPT$ und $CPTO$ anzuwenden.

Auch die in [30] für das ebene Dreieck dargestellten *Sätze von* CEVA und MENELAOS lassen sich auf die Kugel übertragen. Sind A_1, B_1, C_1 drei Punkte auf den Seiten BC, CA, AB des Kugeldreiecks ABC (Abb. 76.3), so nennt man das Produkt

$$\frac{\sin BA_1}{\sin CA_1}\,\frac{\sin CB_1}{\sin AB_1}\,\frac{\sin AC_1}{\sin BC_1} \tag{76.6}$$

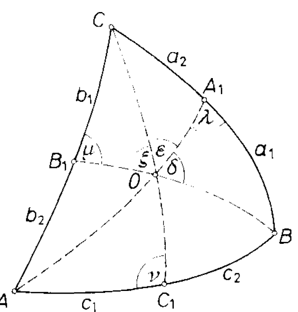


Abb. 76.3

der drei Sinusteilverhältnisse $\sin BA_1/\sin CA_1$, $\sin CB_1/\sin AB_1$ und $\sin AC_1/\sin BC_1$ wieder den *Sechsgrößenbruch* der Punkte A_1, B_1, C_1 für das Dreieck ABC. Dabei versteht man unter dem Teilverhältnis eines Punktes P in bezug auf die mit ihm auf einem Großkreis liegenden Punkte A und B das Sinusteilverhältnis des vom Kugelmittelpunkt ausgehenden Strahles MP zu den Strahlen MA und MB. Man schreibt dafür $\sin AP/\sin BP$, weil die Bögen AP und BP — im Winkelmaß ausgedrückt — nichts anderes sind als die Winkel, die der Strahl MP mit den Strahlen MA und MB bildet. Das Sinusteilverhältnis ist positiv, wenn P auf einem der Bögen AB oder AB' liegt, wobei A' und B' die Gegenpunkte von A und B sind und der Bogen AB als konkav ($< 180°$) vorausgesetzt wird. — Für den merkwürdigen Bruch (76.6) gilt, analog dem in [30] für das ebene Dreieck dargestellten, die *zweite regula sex quantitatum*: (76.6) hat dann und nur dann den Wert $+1$, wenn die drei Ecktransversalen AA_1, BB_1 und CC_1 durch einen Punkt laufen; dagegen nimmt (76.6) dann und nur dann den Wert -1 an, wenn die Punkte A_1, B_1 und C_1 auf einem Großkreis liegen.

Laufen die Ecktransversalen durch einen Punkt O (Abb. 76.3), so gilt nach dem Sinussatz für die Dreiecke OBA_1 und OA_1C:[73)]

$$\sin BA_1 = \sin OB\frac{\sin\delta}{\sin\lambda}, \quad \sin CA_1 = \sin OC\frac{\sin\varepsilon}{\sin(180°-\lambda)}.$$

[73)] Der hier angegebene Beweis stimmt im Grundgedanken mit dem von H. DÖRRIE, a.a.O. S. 360 überein; doch findet sich dort auf S. 360 eine Unstimmigkeit.

In gleicher Weise findet man aus den übrigen Teildreiecken

$$\sin CB_1 = \sin OC \frac{\sin \zeta}{\sin \mu}, \quad \sin AB_1 = \sin OA \frac{\sin \delta}{\sin \mu},$$

$$\sin AC_1 = \sin OA \frac{\sin \varepsilon}{\sin \nu}, \quad \sin BC_1 = \sin OB \frac{\sin \zeta}{\sin \nu}.$$

Bildet man daraus den Sechsgrößenbruch (76.6), so folgt daraus

$$\frac{\sin BA_1}{\sin CA_1} \frac{\sin CB_1}{\sin AB_1} \frac{\sin AC_1}{\sin BC_1} = +1.$$

Auch die Umkehrung, wonach sich die drei Transversalen in einem Punkte schneiden, wenn (76.6) den Wert $+1$ hat, ist leicht zu beweisen: O' sei der Schnitt der Transversalen AA_1 und BB_1, und die Transversale durch C und O' treffe AB in $\bar{C}_1$; dann gilt offenbar

$$\frac{\sin BA_1}{\sin CA_1} \frac{\sin CB_1}{\sin AB_1} \frac{\sin A\bar{C}_1}{\sin B\bar{C}_1} = +1,$$

woraus durch Vergleich mit (76.6) folgt, daß

$$\frac{\sin A\bar{C}_1}{\sin B\bar{C}_1} = \frac{\sin AC_1}{\sin BC_1}$$

ist. Die Punkte C_1 und $\bar{C}_1$ haben also in bezug auf A und B das gleiche Sinusteilverhältnis; das ist nur möglich, wenn C_1 und $\bar{C}_1$ zusammenfallen; denn zwei verschiedene Punkte des Bogens AB haben verschiedene Sinusteilverhältnisse. — Damit ist der Satz von Ceva für das Kugeldreieck bewiesen.

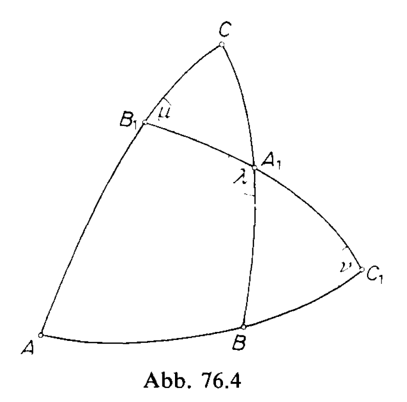


Abb. 76.4

Der Satz wird auch so formuliert: Schneiden sich die Ecktransversalen eines sphärischen Dreiecks in einem Punkt, so sind die Produkte der Sinusse je dreier nicht zusammenstoßender Seitenabschnitte einander gleich ($\sin a_1 \sin b_1 \sin c_1 = \sin a_2 \sin b_2 \sin c_2$).

Auch die zweite Behauptung der regula sex quantitatum, der *Satz von* Menelaos für die Kugel, ist einfach nachzuweisen: Liegen A_1, B_1 und C_1 auf einem Großkreis (Abb. 76.4), so gelten die Beziehungen

$$\frac{\sin BA_1}{\sin BC_1} = \frac{\sin \nu}{\sin (180^\circ - \lambda)}, \quad \frac{\sin CB_1}{\sin CA_1} = \frac{\sin (180^\circ - \lambda)}{\sin \mu},$$

$$\frac{\sin AC_1}{\sin AB_1} = \frac{\sin (180^\circ - \mu)}{\sin \nu}.$$

Der Vereinbarung entsprechend ist BC_1, also auch $\sin BC_1$, negativ. Bildet man das Produkt der drei Gleichungen, so ergibt sich für den Sechsgrößenbruch der Wert

$$\frac{\sin BA_1}{\sin CA_1}\,\frac{\sin CB_1}{\sin AB_1}\,\frac{\sin AC_1}{\sin BC_1} = -1.$$

Die Umkehrung ist wie beim Satz von CEVA zu beweisen. — Beide Sätze ermöglichen sogleich eine Anwendung, nämlich den Nachweis, daß sich die Seitenhalbierenden, die Winkelhalbierenden und die Höhen eines sphärischen Dreiecks jeweils in einem Punkt schneiden. Im Falle der Seitenhalbierenden nimmt wegen $BA_1 = CA_1$, $CB_1 = AB_1$, $AC_1 = BC_1$ der Sechsgrößenbruch (76.6) den Wert $+1$ an. Sind die Ecktransversalen die Winkelhalbierenden von α, β, γ, so gilt

$$\frac{\sin BA_1}{\sin AA_1} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta}, \quad \frac{\sin CA_1}{\sin AA_1} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\gamma}, \quad \text{also} \quad \frac{\sin BA_1}{\sin CA_1} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

In gleicher Weise findet man

$$\frac{\sin CB_1}{\sin AB_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \text{und} \quad \frac{\sin AC_1}{\sin BC_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha};$$

also lautet der Sechsgrößenbruch

$$\frac{\sin BA_1}{\sin CA_1}\,\frac{\sin CB_1}{\sin AB_1}\,\frac{\sin AC_1}{\sin BC_1} = +1.$$

Sind die Ecktransversalen die Höhen h_a, h_b, h_c (Abb. 76.5), so erkennt man zunächst, daß der Fußpunkt einer Höhe auf der entsprechenden Seite oder auf deren Verlängerung liegt, je nachdem die Anwinkel dieser Seite gleichartig oder ungleichartig sind. Dementsprechend gelten für die Rechtwinkeldreiecke ABA_1 und AA_1C die Ausdrücke

$$\sin BA_1 = \cot\beta \tan h_a$$

und

$$\sin CA_1 = \cot\gamma \tan h_a,$$

also wird

$$\frac{\sin BA_1}{\sin CA_1} = \frac{\cot\beta}{\cot\gamma}.$$

Ebenso findet man

$$\frac{\sin CB_1}{\sin AB_1} = \frac{\cot\gamma}{\cot\alpha}, \quad \frac{\sin AC_1}{\sin BC_1} = \frac{\cot\alpha}{\cot\beta},$$

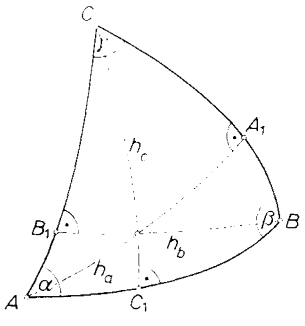


Abb. 76.5

d. h. der Sechsgrößenbruch nimmt wieder den Wert +1 an. Die Ecktransversalen schneiden sich auch für den Fall in einem Punkt, daß jede von ihnen die Dreiecksfläche halbiert. Mit der in Abb. 76.3 benützten Bezeichnung der Seitenabschnitte gilt dann nämlich

$$\sin\frac{a_1}{2}\sin\frac{b_1}{2}\sin\frac{c_1}{2}=\sin\frac{a_2}{2}\sin\frac{b_2}{2}\sin\frac{c_2}{2}\quad\text{und}$$

$$\cos\frac{a_1}{2}\cos\frac{b_1}{2}\cos\frac{c_1}{2}=\cos\frac{a_2}{2}\cos\frac{b_2}{2}\cos\frac{c_2}{2},\quad\text{oder}$$

$\sin a_1 \sin b_1 \sin c_1 = \sin a_2 \sin b_2 \sin c_2$, d. h. der Sechsgrößenbruch nimmt wieder den Wert +1 an.

Endlich soll noch der *Satz von* LEXELL angegeben werden, wonach der geometrische Ort für die freie Ecke C eines Kugeldreiecks mit gegebener Grundlinie AB und gegebener Fläche ein Kugelkreis durch die Gegenpunkte von A und B ist. — Der Beweis des Satzes von LEXELL wird besonders einfach, wenn man folgenden Satz voranstellt: Ist für ein sphärisches Dreieck ABC der Umkreis gezeichnet und bleiben die Ecken A und B konstant, während sich die Ecke C auf dem Umkreis bewegt, so bleibt der Winkel $\alpha+\beta-\gamma$ für jede Lage von C konstant. Die Bestätigung dafür folgt unmittelbar aus Abb. 74.3: Für jede Lage von C bleibt der Winkel $\zeta=\sigma-\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)/2-\gamma=(\alpha+\beta-\gamma)/2$, also auch der Winkel $\alpha+\beta-\gamma$ konstant.

Die Aufgabe läßt sich auch in folgender Weise formulieren (vgl. H. DÖRRIE, a.a.O. S. 397): Der Satz der Planimetrie, wonach der geometrische Ort der dritten Ecke C eines ebenen Dreieckes mit den festen Ecken A und B und dem vorgegebenen Sinus des Winkels γ ein durch A und B laufender Kreis mit dem Radius $r=(c/2)/\sin\gamma$ ist, hat auf der Kugel kein Analogon. Er läßt sich aber auf die Kugel übertragen, wenn man ihn wie folgt formuliert: Der geometrische Ort der dritten Ecke C eines ebenen Dreiecks mit den festen Ecken A und B und dem vorgegebenen Kosinus des Winkels $\zeta=\sigma-\gamma=(\alpha+\beta-\gamma)/2$ ist der durch A und B laufende Kreis mit dem Radius $r=(c/2)/\cos\zeta$. Für die Kugel lautet der Satz dann: Der geometrische Ort für die freie Ecke C des Kugeldreiecks ABC mit den festen Ecken A und B und dem vorgeschriebenen Kosinus des Winkels ist der durch A und B laufende Kugelkreis mit dem sphärischen Radius r, wobei $\tan r=\tan(c/2)/\cos\zeta$ ist.

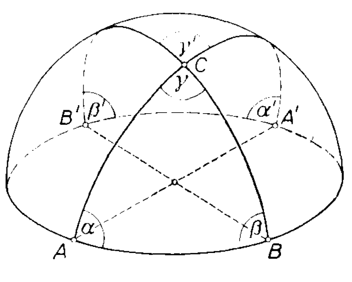


Abb. 76.6

Zum Beweis des LEXELLschen Satzes hat man den Bogen AB zu einem Großkreis zu ergänzen und die Gegenpunkte A' und B' von A und B einzutragen (Abb. 76.6). Die Bögen ACA' und BCB' sind halbe Großkreise und die Winkel

α', β', γ' von $\triangle A'B'C$ betragen $\alpha' = 180°-\alpha$, $\beta' = 180°-\beta$ und $\gamma' = \gamma$. Drückt man den Exzeß ε von $\triangle ABC$ durch die Winkel α', β', γ' aus, so wird

$$\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma-180° = 180°-\alpha'+180°-\beta'+\gamma'-180°,$$

also

$$\varepsilon = 180°-(\alpha'+\beta'-\gamma').$$

Nach dem obigen Satz bleibt der Winkel $\alpha'+\beta'-\gamma'$ und somit auch ε konstant, wenn sich die Ecke C auf dem durch A' und B' laufenden Kleinkreis — dem Umkreis des Nebendreiecks $\triangle_3'$ von $\triangle$ — bewegt.

77. Differentialformeln für das sphärische Dreieck

Ebenso wie für das ebene Dreieck sollen auch die *Differentialformeln des sphärischen Dreiecks* angegeben werden, die vor allem für die sphärische Astronomie benötigt werden (vgl. [108], [113]). Im folgenden werden daher einige der wichtigsten Formeln hergeleitet, wobei mit der Beziehung zwischen den differentiellen Änderungen der drei Seiten a, b, c und eines Winkels, etwa α, begonnen wird. Die Differentiation des Seitenkosinussatzes

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

nach den Veränderlichen a, b, c und α gibt

$$\begin{aligned} -\sin a\, da = & -\sin b \cos c\, db - \cos b \sin c\, dc \\ & +\cos b \sin c \cos \alpha\, db + \sin b \cos c \cos \alpha\, dc \\ & -\sin b \sin c \sin \alpha\, d\alpha \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \sin a\, da = & (\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos \alpha)\, db \\ & +(\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos \alpha)\, dc \\ & +\ \sin b \sin c \sin \alpha\, d\alpha. \end{aligned}$$

Vereinfacht man die Klammerausdrücke mit Hilfe der beiden Gleichungen des ersten Sinuskosinussatzes,

$$\begin{aligned} \sin a \cos \gamma &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha, \\ \sin a \cos \beta &= \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos \alpha, \end{aligned}$$

und dividiert noch durch $\sin a$, so wird daraus

$$da = \cos \gamma\, db + \cos \beta\, dc + \frac{\sin b \sin c \sin \alpha}{\sin a}\, d\alpha. \qquad (77.1a)$$

Der Koeffizient von $d\alpha$ kann nach dem Sinussatz bzw. nach der Höhenformel in der Form

$$\frac{\sin b \sin c \sin \alpha}{\sin a} = \sin b \sin \gamma = \sin c \sin \beta = \sin h_a$$

geschrieben werden, also wird aus (77.1a)

$$da = \cos \gamma \, db + \cos \beta \, dc + \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\sin b \sin c \sin \alpha}{\sin a} \\ \sin b \sin \gamma \\ \sin c \sin \beta \\ \sin h_a \end{array} \right\} d\alpha. \tag{77.1b}$$

Mit der zuletzt angegebenen Form für den Koeffizienten von $d\alpha$ entsteht aus (77.1b) durch zyklische Vertauschung das Formeltripel

$$\begin{aligned} da &= db \cos \gamma + dc \cos \beta + d\alpha \sin h_a, \\ db &= dc \cos \alpha + da \cos \gamma + d\beta \sin h_b, \\ dc &= da \cos \beta + db \cos \alpha + d\gamma \sin h_c. \end{aligned} \tag{77.1c}$$

Die Herleitung der Gleichungen (77.1) ist auch auf elementarem Wege möglich: Benützt man statt der Differentiale die kleinen Änderungen Δa, Δb, Δc und $\Delta \alpha$, so wird aus dem Seitenkosinussatz für a

$$\cos (a + \Delta a) = \cos (b + \Delta b) \cos (c + \Delta c) + \sin (b + \Delta b) \sin (c + \Delta c) \cos (\alpha + \Delta \alpha)$$

oder

$$\begin{aligned} \cos a - \sin a \, \Delta a = \; & (\cos b - \sin b \, \Delta b)(\cos c - \sin c \, \Delta c) \\ & + (\sin b + \cos b \, \Delta b)(\sin c + \cos c \, \Delta c) \\ & \quad (\cos \alpha - \sin \alpha \, \Delta \alpha). \end{aligned}$$

Multipliziert man aus und vernachlässigt die Produkte der Änderungen, so wird, wenn man die entstehende Gleichung von $\cos a$ subtrahiert,

$$\begin{aligned} \sin a \, \Delta a = \; & (\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos \alpha) \, \Delta b \\ & + (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha) \Delta c + \sin b \sin c \sin \alpha \, \Delta \alpha. \end{aligned}$$

Vereinfacht man die Klammerausdrücke und dividiert durch $\sin a$, so entsteht wieder

$$\Delta a = \cos \gamma \, \Delta b + \cos \beta \, \Delta c + \frac{\sin b \sin c \sin \alpha}{\sin a} \Delta \alpha.$$

Die polare Aufgabe, die Beziehung zwischen den Änderungen der drei Winkel α, β, γ und einer Seite, z. B. a, anzugeben, läßt sich in ähnlicher Weise mit Hilfe des Winkelkosinussatzes oder auch durch Polarisation der

Gleichungen (77.1) lösen; es ergibt sich

$$d\alpha = -\cos c\, d\beta - \cos b\, d\gamma + \left\{\begin{matrix} \dfrac{\sin\beta \sin\gamma \sin a}{\sin\alpha} \\ \sin\beta \sin c \\ \sin\gamma \sin b \\ \sin h_a \end{matrix}\right\} da, \tag{77.2a}$$

und die zyklische Vertauschung von (77.2a) liefert das Formeltripel

$$\begin{aligned} d\alpha &= -d\beta \cos c - d\gamma \cos b + da \sin h_a, \\ d\beta &= -d\gamma \cos a - d\alpha \cos c + db \sin h_b, \\ d\gamma &= -d\alpha \cos b - d\beta \cos a + dc \sin h_c. \end{aligned} \tag{77.2b}$$

Eine Beziehung zwischen den Änderungen zweier Seiten, z. B. b und c, und deren Gegenwinkel β und γ liefert der Sinussatz; differenziert man $\sin b \sin\gamma = \sin c \sin\beta$, so wird

$$\cos b \sin\gamma\, db + \sin b \cos\gamma\, d\gamma = \cos c \sin\beta\, dc + \sin c \cos\beta\, d\beta.$$

Durch $\sin b \sin\gamma = \sin c \sin\beta$ dividiert wird daraus, wenn man noch ordnet,

$$\cot b\, db - \cot c\, dc = \cot\beta\, d\beta - \cot\gamma\, d\gamma.$$

Durch zyklische Vertauschung entstehen die Formeln

$$\begin{aligned} \cot a\, da - \cot b\, db &= \cot\alpha\, d\alpha - \cot\beta\, d\beta, \\ \cot b\, db - \cot c\, dc &= \cot\beta\, d\beta - \cot\gamma\, d\gamma, \\ \cot c\, dc - \cot a\, da &= \cot\gamma\, d\gamma - \cot\alpha\, d\alpha. \end{aligned} \tag{77.3}$$

Schließlich sollen ohne Ableitung noch die Beziehungen zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln angegeben werden, wenn einer der Winkel von den Seiten eingeschlossen wird. Ausgehend vom Sinus-Kosinussatz oder vom Kotangenssatz findet man dafür die sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin\alpha\, dc - \sin\gamma \cos b\, da &= \sin b\, d\gamma + \sin c \cos\alpha\, d\beta, \\ \sin\beta\, da - \sin\alpha \cos c\, db &= \sin c\, d\alpha + \sin a \cos\beta\, d\gamma, \\ \sin\gamma\, db - \sin\beta \cos a\, dc &= \sin a\, d\beta + \sin b \cos\gamma\, d\alpha, \\ \sin\alpha\, db - \sin\beta \cos c\, da &= \sin c\, d\beta + \sin b \cos\alpha\, d\gamma, \\ \sin\beta\, dc - \sin\gamma \cos a\, db &= \sin a\, d\gamma + \sin c \cos\beta\, d\alpha, \\ \sin\gamma\, da - \sin\alpha \cos b\, dc &= \sin b\, d\alpha + \sin a \cos\gamma\, d\beta. \end{aligned} \tag{77.4}$$

Mit den Formeln (77.1)–(77.4) läßt sich die Änderung irgendeines Stükkes mit den Änderungen dreier gegebener Stücke ausdrücken. Beispiele für die Anwendung der Differentialformeln des sphärischen Dreiecks werden im Teil III angegeben.

78. Zusammenhang zwischen sphärischer und ebener Trigonometrie

Daß zwischen der Trigonometrie auf der Kugel und in der Ebene enge Beziehungen bestehen, erkennt man einmal am ähnlichen Aufbau der Formeln und zum anderen in der häufig gleichartigen Herleitung der Formeln.

Darüber hinaus ist es möglich, die Sätze für das ebene Dreieck aus den sphärischen Dreiecksformeln herzuleiten, indem man das ebene Dreieck als Grenzfall des sphärischen Dreiecks auffaßt. Zwar geht der Kugelradius in die sphärischen Dreiecksformeln nicht ein, man kann aber folgende Überlegung anstellen: Ist auf der Kugel vom Radius R ein sphärisches Dreieck gegeben, und wächst der Kugelradius über alle Grenzen ($R \to \infty$), so geht die Kugel in die durch die Ecken ABC festgelegte Ebene über. Denkt man sich auf den Kugeln mit wachsendem Radius R je ein Dreieck mit den gleichbleibenden Seitenlängen

$$\bar{a} = \frac{a^\circ}{\varrho^\circ} R, \quad \bar{b} = \frac{b^\circ}{\varrho^\circ} R \quad \text{und} \quad \bar{c} = \frac{c^\circ}{\varrho^\circ} R$$

konstruiert, so werden, je mehr sich das sphärische Dreieck dem ebenen Dreieck annähert, die Seiten a, b, c des Dreiecks, d. h. die den Seitenlängen entsprechenden Zentriwinkel immer kleiner werden und schließlich verschwinden, während die Dreieckswinkel α, β, γ, deren Summe bei diesem Übergang von $180°+\varepsilon$ auf $180°$ abnimmt, annähernd ihre Größe beibehalten. Wollte man etwa die Formeln der ebenen Trigonometrie auf diese Weise aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie gewinnen — allerdings müßte dann zuerst die sphärische Trigonometrie ohne Zuhilfenahme der ebenen abgeleitet werden —, dann wäre der oben angedeutete Grenzübergang in aller Strenge vorzunehmen.

Kommt es nur darauf an, die Beziehungen zwischen den sphärischen und ebenen Formeln aufzuzeigen, so braucht der Grenzübergang nicht streng ausgeführt zu werden; es genügt vielmehr, die für die Ebene und die Kugel abgeleiteten Sätze gegenüberzustellen, wobei die trigonometrischen Funktionen der Seiten in den sphärischen Formeln durch Reihenentwicklungen darzustellen sind.

Zunächst zu den Formeln des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks. Entwickelt man im *Seitenkosinussatz*

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

die Funktionen der Seiten in Reihen, so wird daraus

$$\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{c}}{R}\right)^2+\ldots\right]=\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{a}}{R}\right)^2+\ldots\right]\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{b}}{R}\right)^2+\ldots\right]+$$
$$+\left[\frac{\bar{a}}{R}-\ldots\right]\left[\frac{\bar{b}}{R}-\ldots\right]\cos\gamma.$$

Sind die Seitenlängen $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ klein gegen den Kugelradius R, sind also $\bar{a}/R$, $\bar{b}/R$ und $\bar{c}/R$ kleine Größen, deren dritte und höhere Potenzen ebenso wie die Produkte der Form $(\bar{a}/R)^2(\bar{b}/R)^2$ usf. vernachlässigt werden können, so folgt daraus

$$1-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{c}}{R}\right)^2=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{a}}{R}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{b}}{R}\right)^2+\frac{\overline{ab}}{R^2}\cos\gamma.$$

Multipliziert man mit $-2R^2$, so wird daraus der *ebene Kosinussatz*

$$\bar{c}^2=\bar{a}^2+\bar{b}^2-2\overline{ab}\cos\gamma.$$

Aus dem *sphärischen Sinussatz*

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}$$

ergibt sich bei Reihenentwicklung von $\sin a$ und $\sin b$ zunächst

$$\frac{\frac{\bar{a}}{R}-\ldots}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\bar{b}}{R}-\ldots}{\sin\beta},$$

und bei Multiplikation mit R folgt der *ebene Sinussatz*

$$\frac{\bar{a}}{\sin\alpha}=\frac{\bar{b}}{\sin\beta}.$$

Interessante Modifikationen der sphärischen Formeln für schwach gekrümmte sphärische Dreiecke stellen der *Satz von* LEGENDRE und die SOLDNER*sche Additamentenmethode* dar (vgl. [98]).

Der *Sinus-Kosinussatz*

$$\sin a\cos\beta=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos\alpha$$

gibt bei entsprechender Behandlung

$$\left(\frac{\bar{a}}{R}-\ldots\right)\cos\beta=\left[\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{b}}{R}\right)^2+\ldots\right]\left[\frac{\bar{c}}{R}-\ldots\right]\right.$$
$$-\left[\frac{\bar{b}}{R}-\ldots\right]\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{c}}{R}\right)^2+\ldots\right]\cos\alpha$$

oder, wenn die Produkte sowie die zweiten und höheren Potenzen der Glieder $\bar{b}/R, \bar{c}/R$ etc. vernachlässigt werden, den *Projektionssatz des ebenen Dreiecks:*

$$\bar{c} = \bar{a}\cos\beta + \bar{b}\cos\alpha.$$

Der Sinus-Kosinussatz ist also das sphärische Analogon des ebenen Projektionssatzes.

Der *Winkelkosinussatz*

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$$

geht im Grenzfall wegen $a = 0$ in

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma = -\cos(\beta+\gamma) = \cos[180^\circ - (\beta+\gamma)]$$

über, woraus sich der *Winkelsummensatz* $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ *des ebenen Dreiecks* ergibt.

Ebenso wie für die Grundformeln können auf diese Weise auch für die übrigen sphärischen Formeln entsprechende ebene Beziehungen angegeben werden. Wie leicht zu zeigen ist, führen die DELAMBRE*schen Gleichungen*

$$\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

auf die *Winkelsummen des ebenen Dreiecks*, während die Formeln

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$$

dagegen in die MOLLWEIDE*schen Gleichungen des ebenen Dreiecks* übergehen. Von den NEPER*schen Gleichungen* führt

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \cot\frac{\gamma}{2}\,\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}$$

auf die *Winkelsumme*, dagegen

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \cot\frac{\gamma}{2}\,\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

auf die NEPER*sche Gleichung des ebenen Dreiecks.*

Aus den *Halbwinkelsätzen*

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin s_a}{\sin b \sin c}} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s_b \sin s_c}{\sin b \sin c}}$$

folgen für den Grenzfall die ebenen Beziehungen (25.1), und

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s_b \sin s_c}{\sin s \sin s_a}}$$

gibt die *ebene Tangensformel* (24.1).

Die L'HUILIER*sche Gleichung* für den Exzess

$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s_a}{2}\tan\frac{s_b}{2}\tan\frac{s_c}{2}}$$

gibt, wie leicht nachzuweisen ist, die HERON*sche Flächenformel* des ebenen Dreiecks.

Der Leser mag auch die Übertragung der restlichen sphärischen Formeln versuchen: Aus den Halbseitenformeln z. B. ergibt sich zunächst nur $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; beachtet man, daß $\sigma = (\alpha+\beta+\gamma)/2 = 90^\circ + \varepsilon/2$, also $\cos\sigma = -\sin(\varepsilon/2)$, und daß $\operatorname{arc}\varepsilon = F/R^2$ ist, so wird aus

$$\tan\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}$$

für das ebene Dreieck

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{2\bar{F}\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}} = 2\bar{r}\sin\alpha,$$

wobei $\bar{F}$ die Fläche und $\bar{r}$ den Umkreisradius des ebenen Dreiecks bezeichnen.

In derselben Weise lassen sich die Formeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks auf ihre Beziehungen zu jenen des ebenen untersuchen. Ohne die Umformungen im einzelnen anzugeben, wird im folgenden den sphärischen Formeln [vgl. die Formeln (69.1) bis (69.10)] die beim Übergang zum ebenen Dreieck resultierende Formel gegenübergestellt:

$\cos c = \cos a \cos b$; beschränkt man sich auf die linearen Glieder, so resultiert die Trivialität $1 = 1$. Bei Mitnahme der quadratischen Glieder folgt aus

$$\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{c}}{R}\right)^2+\dots\right] = \left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{a}}{R}\right)^2+\dots\right]\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{b}}{R}\right)^2+\dots\right]$$

der *pythagoräische Lehrsatz* $\bar{c}^2 = \bar{a}^2+\bar{b}^2$ *des ebenen Dreiecks*, wovon auch die Bezeichnung sphärischer pythagoräischer Satz der Gleichung (69.1)

herrührt.

$\sin a = \sin c \sin \alpha$ führt auf $\sin \alpha = a/c$;

$\sin b = \sin c \sin \beta$ führt auf $\sin \beta = b/c$;

$\sin b = \cot a \cot \alpha$ führt auf $\cot \alpha = b/a$;

$\sin a = \cot b \cot \beta$ führt auf $\cot \beta = a/b$;

$\cos \alpha = \cot c \tan b$ führt auf $\cot \alpha = b/c$;

usf.

Den Grenzübergang für die restlichen Formeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks mag der Leser selbst besorgen.

79. Verallgemeinerung des sphärischen Dreiecksbegriffes

In der Behandlung der sphärischen Trigonometrie können je nach dem benützten Dreiecksbegriff verschiedene Stufen unterschieden werden. Im Vordergrund steht dabei das *elementare* EULER*sche Dreieck*, das für viele praktische Anwendungen ausreicht und dadurch gekennzeichnet ist, daß die Seiten und Winkel zwischen 0 und 180° liegen, oder präziser formuliert: Das EULERsche Dreieck ist bestimmt durch ein System von drei Punkten und drei Seiten, die als Teile von Großkreisen kleiner als 180° bleiben; die Fläche eines EULERschen Dreiecks überdeckt einen Teil der Kugel einfach und liegt zwischen den Schenkeln der Dreieckswinkel, die ebenfalls kleiner als 180° bleiben. Der EULERsche Dreiecksbegriff hat den Nachteil, daß nicht alle aus den trigonometrischen Beziehungen resultierenden Folgerungen geometrisch interpretiert werden können. MÖBIUS hat gezeigt, daß man dafür den Dreiecksbegriff wesentlich erweitern und auch überstumpfe Seiten und Winkel bis 360° zulassen muß. — E. STUDY hat auch die Beschränkung der Seiten und Winkel von Kugeldreiecken auf das Intervall von 0 bis 360° fallengelassen und untersucht, wie sich dann die Formeln der sphärischen Trigonometrie verhalten.

Als erster hat C. F. GAUSS die im EULERschen Dreiecksbegriff enthaltenen Beschränkungen über die Seiten und Winkel aufgegeben und die Gültigkeit der Formeln der sphärischen Trigonometrie unter den neuen Bedingungen untersucht. Diese Untersuchungen wurden fortgesetzt von A. F. MÖBIUS (1790–1868), der an der Universität Leipzig lehrte, und von Ch. H. E. STUDY (1862–1930), der an der Universität Bonn lehrte, von letzterem vor allem im Sinne der modernen *Gruppentheorie*. Neben das EULERsche Dreieck sind damit noch das MÖBIUS- und das GAUSS–STUDY-*Dreieck* getreten.

Eine vollständige Behandlung der Theorie der MÖBIUS- und GAUSS–STUDY-Dreiecke liegt außerhalb der Zielsetzung dieses Buches. Es soll

daher lediglich der *Begriff des* MÖBIUS-*Dreiecks* erläutert und die Gültigkeit einiger wichtiger Sätze der sphärischen Trigonometrie für das MÖBIUS-Dreieck aufgezeigt werden.

Der Interessierte ist auf die einschlägige Literatur zu verweisen: A. F. MÖBIUS, Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in größtmöglicher Allgemeinheit, Gesammelte Werke, II, 1881, S. 73 f.; E. STUDY, Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen, Abh. Sächs. Ges. d. Wiss., Bd. 20, 1893, S. 87 f. Encyclop. d. math. Wiss., Bd. III, Geometrie, Teil 1, 2. Hälfte, S. 833–854; W. LIETZMANN, Elementare Kugelgeometrie mit numerischen und konstruktiven Methoden, Verlag Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1949.

Mit den Beschränkungen des EULERschen Dreiecks bilden, wie in [53] gezeigt wurde, irgend drei durch verschiedene Punkte der Kugelfläche gehende Großkreise der Kugeloberfläche im allgemeinen acht eindeutig bestimmte EULERsche Dreiecke. Um zum MÖBIUS-Dreieck zu kommen, ist der Begriff des *gerichteten Kreises* notwendig: Entsteht der Kreis durch Drehung eines Punktes um seinen Mittelpunkt im Gegenuhrzeigersinn, dann liegt ein positiv gerichteter Kreis vor; entsprechend kann ein negativ gerichteter Kreis eingeführt werden.

Nun seien A, B, C drei Punkte auf der Kugel, die durch sie bestimmten Großkreise sollen gerichtete Kreise sein. Die Frage ist nun, wie viele sphärische Dreiecke durch die drei Punkte bestimmt sind, wenn die Bedingung, daß die Seiten und Winkel des Dreiecks kleiner als 180° sein sollen, fallen gelassen wird. Die acht möglichen Dreiecke sind in Abb. 79.1 dargestellt.

Sind in den Ecken nur die Anfangs- oder Endstücke der Seiten gezeichnet, so liegen die entsprechenden Großkreisbögen zum größten Teil auf der dem Betrachter abgewandten Seite der Kugel. Um gleich zu einer Systematik zu kommen, sind die acht Dreiecke nach vier Typen geordnet: Beim Typ I (Dreieck 1) ist angenommen, daß lauter kurze Großkreisbögen vorliegen. Beim Typ II (Dreieck 2–4) liegt ein langer Großkreisbogen vor, beim Typ III (Dreiecke 5–7) treten zwei und beim Typ IV (Dreieck 8) endlich drei lange Großkreisbögen als Seiten auf.

Abb. 79.1 zeigt, daß es beim MÖBIUS-Dreieck nicht möglich ist, die Innenwinkel des EULER-Dreiecks als Dreieckswinkel zu benützen; es ist vielmehr notwendig, die Winkel neu zu definieren: Der Winkel α der Dreiecksecke A ist jener, um den man den gerichteten Großkreisbogen CA in A drehen muß, damit er mit der (positiven) Richtung des Großkreisbogens AB zusammenfällt. Entsprechend sind die Winkel β und γ der Dreiecksecken B und C zu definieren. Da der Drehsinn für den Winkel positiv (Gegenuhrzeigersinn) oder negativ (Uhrzeigersinn) gewählt werden kann, ergeben sich insgesamt $8 \cdot 2 = 16$ MÖBIUS-Dreiecke, wovon jeweils zwei Dreiecke gleiche Seiten, aber verschiedene Dreieckswinkel besitzen. Für

positiven Drehsinn zeigt Abb. 79.1 (Dreieck 1), daß an Stelle der Innenwinkel des EULER-Dreiecks die Außenwinkel α, β, γ als Dreieckswinkel auftreten.

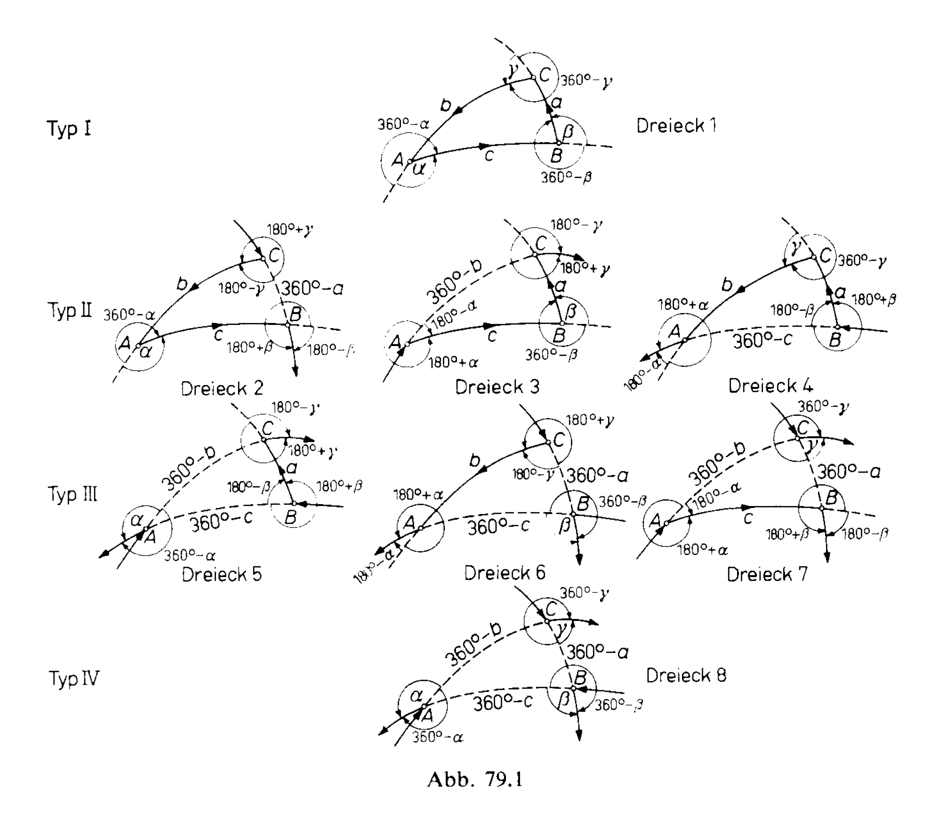


Abb. 79.1

Auch für das ebene Dreieck läßt sich in ähnlicher Weise verfahren: Versteht man ein ebenes Dreieck ABC als eine Figur, die aus drei gerichteten Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ gebildet wird, und definiert man den Dreieckswinkel α als den Winkel, um den die gerichtete Strecke $\overline{CA}$ um A gedreht werden muß, damit sie in die Richtung $\overline{AB}$ kommt, usf., so erhält man als Dreieckswinkel die Außenwinkel des Dreiecks, deren Summe nicht 180°, sondern 360° ist.

Beim *Übergang vom* EULER- *zum* MÖBIUS-*Dreieck* sind also in die Dreiecksformeln für positiven Drehsinn an Stelle der Innenwinkel, die mit α', β', γ' bezeichnet sein sollen, die Außenwinkel $\alpha = 180° - \alpha'$, $\beta = 180° - \beta'$, $\gamma = 180° - \gamma'$ einzusetzen (vgl. Dreieck 1 in Abb. 79.1). Daraus folgt, daß der *Sinussatz*

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \tag{79.1}$$

erhalten bleibt. Dagegen nimmt der Seitenkosinussatz wegen
$\cos\alpha' = \cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$ usf. die Form

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos\alpha,\\ \cos b &= \cos c \cos a - \sin c \sin a \cos\beta,\\ \cos c &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos\gamma\end{aligned} \qquad (79.2)$$

an. Beim Winkelkosinussatz tritt, wie leicht nachzuweisen ist, ebenfalls eine Vorzeichenänderung ein; er lautet jetzt

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos\beta \cos\gamma - \sin\beta \sin\gamma \cos a,\\ \cos\beta &= \cos\gamma \cos\alpha - \sin\gamma \sin\alpha \cos b,\\ \cos\gamma &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \cos c.\end{aligned} \qquad (79.3)$$

Die so übertragenen Formeln (79.1) bis (79.3) gelten zunächst nur für Dreieck 1 mit positivem Drehsinn der Winkel. Um die allgemeine Gültigkeit dieser drei Sätze für das MÖBIUS-Dreieck nachweisen zu können, ist es zweckmäßig, die Seiten und Winkel der 16 MÖBIUS-Dreiecke in einer Tabelle zusammenzustellen. Da je zwei Dreiecke gleiche Seiten, aber verschiedene Winkel haben, genügt es, die Seiten einmal anzugeben und die sich für positiven und negativen Drehsinn ergebenden Winkel daneben zu setzen. Die Werte sind in Tabelle 79.1 eingetragen. Die Stücke der insgesamt 16 MÖBIUS-Dreiecke können aus Abb. 79.1 abgelesen werden. Eine Kontrolle besteht darin, daß die Summe entsprechender Dreieckswinkel für positiven und negativen Drehsinn stets 360° ergeben muß.

Um zu einer *Systematik* zu gelangen, ist es zweckmäßig, die beiden Gruppen von je acht MÖBIUS-Dreiecken dadurch zu kennzeichnen, daß für den positiven Drehsinn (↺) der Winkel Umlaufsinn für das Dreieck und Winkeldrehsinn gleichartig, für den negativen Drehsinn (↻) ungleichartig sind, sie also kurz als gleichartig und ungleichartig zu bezeichnen.

Nun soll untersucht werden, welche Formen der Sinus-, der Seitenkosinus- und der Winkelkosinussatz für die 16 MÖBIUS-Dreiecke annehmen.

S i n u s s a t z : Zunächst zu den acht gleichartigen Dreiecken: Typ I, Dreieck 1: Der Sinussatz bleibt, wie schon gezeigt, erhalten.

Typ II, Dreieck 2:

Aus $\quad \sin(360°-a) : \sin b = \sin\alpha : \sin(180°+\beta)$ folgt

$$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta,$$

und aus $\quad \sin b : \sin c = \sin(180°+\beta) : \sin(180°+\gamma)$ wird

$$\sin b : \sin c = \sin\beta : \sin\gamma,$$

d. h. der Sinussatz bleibt erhalten. Zum gleichen Resultat gelangt man für die Dreiecke 3 und 4.

Tabelle 79.1

Typ	Dreieck	Seiten			Winkel Drehsinn ↺			Drehsinn ↻		
I	1	a	b	c	α	β	γ	$360^\circ-\alpha$	$360^\circ-\beta$	$360^\circ-\gamma$
II	2	$360^\circ-a$	b	c	α	$180^\circ+\beta$	$180^\circ+\gamma$	$360^\circ-\alpha$	$180^\circ-\beta$	$180^\circ-\gamma$
II	3	a	$360^\circ-b$	c	$180^\circ+\alpha$	β	$180^\circ+\gamma$	$180^\circ-\alpha$	$360^\circ-\beta$	$180^\circ-\gamma$
II	4	a	b	$360^\circ-c$	$180^\circ+\alpha$	$180^\circ+\beta$	γ	$180^\circ-\alpha$	$180^\circ-\beta$	$360^\circ-\gamma$
III	5	a	$360^\circ-b$	$360^\circ-c$	α	$180^\circ+\beta$	$180^\circ+\gamma$	$360^\circ-\alpha$	$180^\circ-\beta$	$180^\circ-\gamma$
III	6	$360^\circ-a$	b	$360^\circ-c$	$180^\circ+\alpha$	β	$180^\circ+\gamma$	$180^\circ-\alpha$	$360^\circ-\beta$	$180^\circ-\gamma$
III	7	$360^\circ-a$	$360^\circ-b$	c	$180^\circ+\alpha$	$180^\circ+\beta$	γ	$180^\circ-\alpha$	$180^\circ-\beta$	$360^\circ-\gamma$
IV	8	$360^\circ-a$	$360^\circ-b$	$360^\circ-c$	α	β	γ	$360^\circ-\alpha$	$360^\circ-\beta$	$360^\circ-\gamma$

Typ III, Dreieck 5:

Aus $\sin a : \sin(360^\circ-b) = \sin\alpha : \sin(180^\circ+\beta)$ folgt

$$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta,$$

und aus $\sin(360^\circ-b) : \sin(360^\circ-c) = \sin(180^\circ+\beta) : \sin(180^\circ+\gamma)$

wird $\sin b : \sin c = \sin\beta : \sin\gamma.$

Für die Dreiecke 6 und 7 gilt dasselbe.

Typ IV, Dreieck 8:

Aus $\sin(360^\circ-a) : \sin(360^\circ-b) = \sin\alpha : \sin\beta$ folgt

$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta,$ und aus

$\sin(360^\circ-b) : \sin(360^\circ-c) = \sin\beta : \sin\gamma$ wird

$$\sin b : \sin c = \sin\beta : \sin\gamma.$$

Für die acht Möbius-Dreiecke mit gleichartigen Stücken bleibt der Sinussatz also unverändert. Zum gleichen Resultat gelangt man für die übrigen acht Dreiecke mit ungleichartigen Stücken, wie an einigen Stichproben gezeigt werden soll:

Typ I, Dreieck 1:

Aus $\sin a : \sin b = \sin(360° - \alpha) : \sin(360° - \beta)$ wird

$$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Typ II, Dreieck 2:

Aus $\sin(360° - a) : \sin b = \sin(360° - \alpha) : \sin(180° - \beta)$ wird

$$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta,$$

und aus $\sin b : \sin c = \sin(180° - \beta) : \sin(180° - \gamma)$ wird

$$\sin b : \sin c = \sin\beta : \sin\gamma,$$

usf.

Typ IV, Dreieck 8:

Aus $\sin(360° - a) : \sin(360° - b) = \sin(360° - \alpha) : \sin(360° - \beta)$

wird $$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

S e i t e n k o s i n u s s a t z: Auch hier zunächst wieder die gleichartigen Dreiecke, d. h. mit gleicher Richtung von Umlauf und Winkeldrehung:

Typ I, Dreieck 1: Hierfür hatten die drei Gleichungen die Form (79.2) angenommen.

Typ II, Dreieck 2:

Aus $\cos(360° - a) = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos\alpha$

folgt $$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos\alpha;$$

die gleiche Form findet man für b und c und für die Dreiecke 4 und 5.

Typ III, Dreieck 5:

Aus $\cos a = \cos(360° - b)\cos(360° - c) - \sin(360° - b)\sin(360° - c)\cos\alpha$

wird $$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos\alpha;$$

aus $\cos(360° - b) = \cos a \cos(360° - c) - \sin a \sin(360° - c)\cos(180° + \beta)$

wird $$\cos b = \cos a \cos c - \sin a \sin c \cos\beta.$$

Typ IV, Dreieck 8:

Aus $$\cos(360° - a) = \cos(360° - b)\cos(360° - c) - \sin(360° - b)\sin(360° - c)\cos\alpha$$

wird $$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos\alpha.$$

Völlig gleichlautende Ergebnisse findet man für die übrigen acht Dreiecke, d. h. der Seitenkosinussatz hat für alle 16 MÖBIUS-Dreiecke die Form (79.2).

Ebenso ergibt sich, wie leicht nachzurechnen ist, der Winkelkosinussatz für alle 16 MÖBIUS-Dreiecke in der Form (79.3).

E. STUDY hat auch noch die Beschränkung der Seiten und Winkel von Kugeldreiecken auf den Bereich von 0° bis 360° fallen lassen und untersucht, wie sich dann die sphärischen Dreiecksformeln verhalten. Dabei zeigt sich, daß die Dreiecke in zwei Klassen zerfallen; für die *eigentlichen Dreiecke* gelten alle Formeln, für die restlichen, *uneigentlichen*, bleibt nur ein Teil der Formeln erhalten, während bei den übrigen Formeln Abweichungen in den Vorzeichen auftreten.

Hierzu können der Zielsetzung des Buches entsprechend nur noch Andeutungen gemacht werden. Bei der Übertragung der sphärischen Dreiecksformeln auf MÖBIUSsche Dreiecke zeigt sich, daß für einen Teil der Sätze der Begriff des MÖBIUS-Dreiecks ausreicht, für den anderen Teil aber nicht. Man ist daher gezwungen, den Dreiecksbegriff erneut zu erweitern: Während für MÖBIUSsche Dreiecke alle Seiten und Winkel, die sich um ganzzahlige Vielfache von 360° unterscheiden, als gleich zu rechnen sind, wird dies dann nicht mehr der Fall sein. — Dementsprechend gruppiert man die Formeln der EULER-Dreiecke in solche 1. Ordnung und solche 2. Ordnung. Zu den Formeln 1. Ordnung gehören der Sinussatz, der Seitenkosinus- und der Winkelkosinussatz, die aber schon für das MÖBIUS-Dreieck angegeben wurden; vgl. die Gl. (79.1) bis (79.3). Weiter gehören dazu die Sinus-Kosinussätze, der Kotangenssatz, die NEPERschen Analogien, der Tangenssatz und die NEPERschen Regeln für das rechtwinklige Dreieck. Zu den Formeln 2. Ordnung zählen die Halbseitensätze, die Halbwinkelsätze, die GAUSS–DELAMBREschen Gleichungen und die Formeln von L'HUILIER–SERRET.

Für die Formeln 1. Ordnung reicht der Begriff des MÖBIUS-Dreiecks aus; ihre Übertragung bereitet, wie schon gezeigt wurde, keine Schwierigkeiten: Es genügt, die Formeln für das MÖBIUS-Dreieck 1 (Abb. 79.1) anzusetzen und, wenn die Seiten und Winkel des EULER-Dreiecks mit $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ bezeichnet werden, statt dessen die Stücke $a = a', b = b', c = c', \alpha = 180°-\alpha', \beta = 180°-\beta', \gamma = 180°-\gamma'$ einzuführen. Damit lassen sich, wie an einigen Beispielen gezeigt wird, auch die übrigen Formeln 1. Ordnung übertragen. Aus der 1. Gleichung des Sinus-Kosinussatzes (58.3), die für das EULER-Dreieck jetzt

$$\sin a' \cos \beta' = \cos b' \sin c' - \sin b' \cos c' \cos \alpha'$$

lautet, wird

$$-\sin a \cos \beta = \cos b \sin c + \sin b \cos c \cos \alpha$$

oder

$$\sin a \cos \beta + \cos b \sin c + \sin b \cos c \cos \alpha = 0. \tag{79.4}$$

Entsprechend gibt die 1. Gleichung des polaren Sinus-Kosinussatzes (60.2b)

$$\sin \alpha' \cos c' = \cos \gamma' \sin \beta' + \sin \gamma' \cos \beta' \cos a'$$

für das MÖBIUS-Dreieck

$$\sin \alpha \cos c + \cos \gamma \sin \beta + \sin \gamma \cos \beta \cos a = 0. \tag{79.5}$$

Aus der ersten Gleichung des Kotangenssatzes (60.3)

$$\sin \alpha' \cot \beta' = \cot b' \sin c' - \cos c' \cos \alpha'$$

folgt

$$\sin \alpha \cot \beta + \cot b \sin c + \cos c \cos \alpha = 0. \tag{79.6}$$

usf.

In derselben Weise können die übrigen Gleichungen dieser Formelgruppe übertragen werden; (79.4) bis (79.6) können aber auch zyklisch vertauscht werden.

Komplizierter ist die Übertragung der Formeln 2. Ordnung, weil dafür, wie schon erwähnt, der MÖBIUSsche Dreiecksbegriff nochmals erweitert werden muß. Auch hierzu ist auf die oben angegebene Literatur zu verweisen; vgl. z. B. auch H. ATHEN, a.a.O. S. 84 f.

Endlich sei noch erwähnt, daß auch versucht wurde, eine Trigonometrie zu entwickeln für den Fall, daß die Seiten der Kugeldreiecke Kleinkreise sind. Die resultierenden Formeln sind allerdings sehr kompliziert.

A. v. BRAUNMÜHL, a.a.O. Bd. II, S. 210 gibt zu diesem Thema folgende Arbeiten an: Eine erste Betrachtung für eine Trigonometrie der Kleinkreise stammt von JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717–1783); weitergeführt wurden die Arbeiten von dem Belgier A. QUETELET (1796–1874), Ann. de Mathém. II, 257. Weitere Arbeiten hierzu stammen von TOWNSEND, Nouv. Ann. IX, 1850, 364 und H. FAUVE, ebenda XII, 1853, 221–224; E. C. HUDSON, Quarterly Journal of Mathematics XXVII, 378–386 und XXIX, 202–205.

Teil III: Trigonometrische Lösung von Aufgaben der mathematischen Geographie, Geodäsie und sphärischen Astronomie

Kapitel 16: Grundaufgaben der mathematischen Geographie

87. Gestalt und Größe der Erde

Für die folgenden Abschnitte, die der Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die mathematische Geographie gewidmet sind, soll die *Erde als kugelförmig* angesehen werden. — Natürlich ist dies nur eine Näherung, die für viele Aufgaben, insbesondere für die *Geodäsie*, nicht ausreicht.

Der Begriff *mathematische Geographie* wird oft, allerdings fälschlicherweise, synonym mit elementarer Astronomie benützt. Hier soll darunter die Berechnung von Entfernungen, Winkeln und Flächen auf der kugelförmigen Erde verstanden werden. Der Zielsetzung des Buches entsprechend werden nur einige Grundaufgaben behandelt, insbesondere werden die nautischen Aufgaben nur angedeutet.

Die *Geodäsie* oder *Erdmessung* ist nach einer Definition von F. R. HELMERT (Geodät, 1843–1917) die Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche.

Um beurteilen zu können, inwieweit diese Näherung berechtigt ist, seien einige Angaben über die Erdgestalt vorausgeschickt, die je nach der Aufgabenstellung und Betrachtungsweise verschieden definiert wird: Unter der *physischen Erdoberfläche* versteht man die Trennfläche zwischen dem festen Erdkörper und der Atmosphäre. Die Wassermassen der Ozeane zählen zum *Erdkörper*. Da die physische Erdoberfläche wegen ihrer Unregelmäßigkeit analytisch nicht dargestellt werden kann und somit einer Berechnung nicht zugänglich ist, versucht man, diese durch eine *mathematische Erdfigur* zu approximieren. In erster Näherung kann dafür eine *Kugel* dienen.

Daß die Erde genähert eine Kugel ist, bestätigt auch der kreisförmige Erdschatten bei Mondfinsternissen.

Wesentlich genauer kann die Erde durch einen abgeplatteten Körper approximiert werden, den man sich durch die Erdrotation entstanden

denkt: Nach der Theorie der Gleichgewichtsfiguren treten *Rotationsellipsoide* als Oberflächen rotierender Körper nur dann auf, wenn überall gleiche Dichte herrscht; die Abplattung hängt dann außer von der Dichte noch von der Winkelgeschwindigkeit der Rotation ab. — Nach einer Vereinbarung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik aus dem Jahre 1924 gelten für das *Internationale Erdellipsoid* per definitionem die folgenden, von HAYFORD[77] abgeleiteten Maße:

Äquatorradius	$a =$	6 378,388 km,
Abplattung	$\frac{a-b}{a} =$	1 : 297

Daraus leiten sich die folgende Größen ab:

Polradius	$b =$	6 356,912 km
Achsendifferenz	$a-b =$	21,476 km
Äquatorquadrant		10 019,148 km
Meridianquadrant		10 002,288 km
Äquatorgrad		111,324 km
mittlerer Meridiangrad		111,137 km
1 geogr. Meile $= \frac{1}{15}$ Äquatorgrad		7,420 km
1 Seemeile (sm) = 1 mittl. Längenminute		1,852 km
Radius der oberflächengleichen Kugel	R =	6 371,228 km
Radius der volumengleichen Kugel	R =	6 371,221 km
Oberfläche		510 100 933,5 km²
Volumen		1 083 319 780 000,0 km³

Wenn in den folgenden Kapiteln wegen der geringen Abplattung des Erdkörpers mit der Näherung einer kugelförmigen Erde gearbeitet wird, so sei dafür die *mit dem Internationalen Erdellipsoid volumengleiche Kugel* mit dem Radius $R = 6371{,}221$ km (lg R = 3.804 2227) gewählt, für die noch folgende Daten von Interesse sind:

Bogenlänge eines Großkreises:	$2R\pi =$	40 031,562 km
Meridianquadrant:	$\frac{R\pi}{2}$	10 007,891 km
Meridian- bzw. Äquatorgrad: $2R\pi/360$	$= R/\varrho =$	111,199 km
Geographische Meile $= \frac{1}{15}$ Äquatorgrad	$=$	7,413 km
1 Seemeile (sm) = 1 Längenminute	$=$	1,853 km
Oberfläche:	$4\pi R^2 =$	510 099 859,027 km²

---

[77] J. F. HAYFORD, 1868–1925, amerikanischer Geodät.

Diese unter den Begriffen Erdkugel und Erdellipsoid bekannten geometrischen Vorstellungen sind als Bezugs- und Rechenflächen für die Aufgaben der Landesvermessung und Kartographie unentbehrlich, stehen aber in keinem Zusammenhang mit der physikalisch zu definierenden *wahren Erdfigur*. Überdies entsprechen nur die Oberflächen der Ozeane einigermaßen diesen mathematischen Idealisierungen, während die Kontinente, die sich mit den höchsten Berggipfeln bis zu fast 9 km über das Meeresniveau erheben, beträchtlich davon abweichen. — Die Geodäsie benützt daher neben der mathematischen noch eine *physikalisch definierte Erdfigur*: Die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit stellt sich immer senkrecht zur Richtung der Schwerkraft, der Lotrichtung. Ermittelt man nun z. B. die Lotrichtung mittels eines hängenden Fadenlotes für viele Punkte auf der Erde, so kann man eine ellipsoidähnliche Fläche konstruieren, die von allen Lotrichtungen senkrecht durchstoßen wird. Man nennt eine solche Fläche *Niveaufläche*. Es gibt unendlich viele Niveauflächen. Eine davon wird durch die ruhende, vom Einfluß der Gezeiten und des Windes befreite Oberfläche des Meeres gebildet. Diese Niveaufläche, die man sich unter den Kontinenten fortgesetzt denken kann, ist die *wahre Erdfigur*, das *Geoid*. Diese geometrisch anschaulich erläuterten Niveauflächen sind identisch mit den Flächen konstanten Schwerkraftpotentials.

Während das Geoid auf den Weltmeeren weitgehend mit dem Rotationsellipsoid, d. h. mit dem geometrisch definierten Erdkörper übereinstimmt — die Gleichgewichtstheorie und die Potentialtheorie zeigen, daß die Niveauflächen einer eingeebneten, hydrostatisch geschichteten Erde Sphäroide sind, die nur wenig von den achsengleichen Rotationsellipsoiden abweichen —, erhebt sich das Geoid im Bereich der Kontinente stellenweise bis zu etwa hundert Meter über das Erdellipsoid. Das kommt daher, daß die Lotrichtung an den Rändern der Kontinente, aber auch bei Dichteunterschieden in der Erdkruste, abgelenkt wird. Die Bestimmung des Geoides in bezug auf eine geeignete Referenzfläche ist Aufgabe der Geodäsie. Zu ihrer Lösung bedient man sich astronomischer und gravimetrischer Messungen, neuerdings auch Satellitenbeobachtungen.

88. Geographische Koordinaten auf der Erdkugel

Die Lage eines Punktes P auf der Kugel kann in Anlehnung an die ebenen kartesischen Koordinaten in bezug auf zwei Großkreise, einen Horizontalkreis K_h und einen dazu senkrechten Vertikalkreis K_v, deren einer Schnittpunkt O ist, festgelegt werden (Abb. 88.1). Der zu K_h senkrechte Kugeldurchmesser ist zugleich ein Durchmesser

von K_v und trifft die Kugel in den Polen M_1 und M_2. — Legt man durch P noch den zu K_h senkrechten Großkreis K'_v, so ist die Lage von P durch die sphärischen Distanzen OP' und $P'P$ eindeutig festgelegt, wenn noch eine Zählrichtung für diese rechtwinklig sphärischen Koordinaten vereinbart wird. Weiter gilt $OP' = \sphericalangle\, OMP'$ und $P'P = \sphericalangle\, P'MP$.

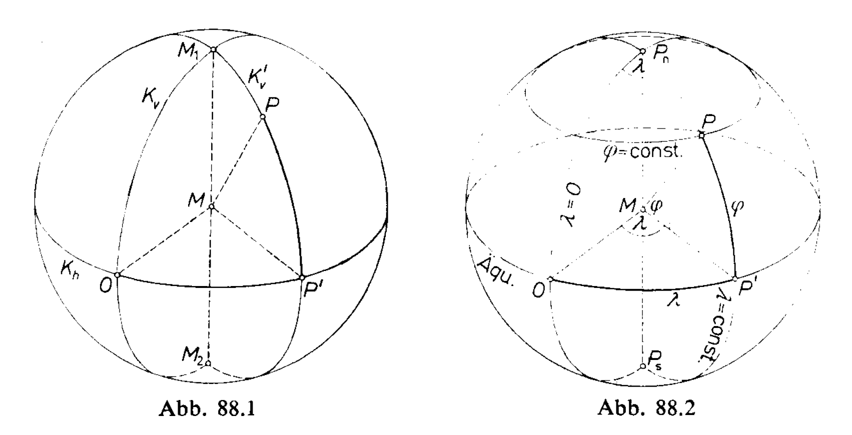


Abb. 88.1 Abb. 88.2

Das *System* der *geographischen Koordinaten* oder Erdkoordinaten erhält man, wenn K_h der Erdäquator wird — der dazu senkrechte Kugeldurchmesser ist dann die *Erdrotationsachse* und trifft die Erde im *Nordpol* P_n und im *Südpol* P_s —, und die Vertikalkreise das System der *Meridiane* bilden: Der Winkel $P'MP$ bzw. der Bogen $P'P$ ist dann die nach Norden positiv von 0°–90° gezählte *geographische Breite* φ; ist K_v der durch Greenwich laufende Meridian, so ist OP' bzw. der Winkel OMP' die *geographische Länge* λ, die ostwärts positiv von 0°–360° gezählt wird (Abb. 88.2). Geographische Breite und Länge werden üblicherweise in sexagesimaler Winkelteilung angegeben.

Die Herkunft der Bezeichnungen *Breite* und *Länge* ist nicht gesichert; nach E. Hammer, a.a.O. S. 492 wurden sie in ältester Zeit im Zusammenhang mit der christlichen Ökumene benützt, die sich in Richtung Ost — West sehr weit (Länge!), in Richtung Nord- Süd dagegen nur gering erstreckte (Breite!).

Entsprechend einer internationalen Vereinbarung wird der *Meridian von Greenwich* einheitlich als *Nullmeridian* für die Längenzählung benützt; dagegen findet man mitunter noch eine Zählung der Längen nach Osten und Westen von 0° bis ±180°. — Die Astronomie rechnet die Längen im Zeitmaß, also in Stunden, Minuten und Sekunden, wobei gilt: 360° ≙ 24h, 15° ≙ 1h, 15′ ≙ 1m, 15″ ≙ 1s.

Alle auf dem Meridian von P liegenden Punkte haben die gleiche Länge λ, ebenso ist die Breite φ für alle auf dem Kleinkreis mit dem Radius $90° - \varphi$ um P_n liegenden Punkte gleich. Die Meridiane werden daher auch als *Längenkreise*, die zum Äquator parallelen Kleinkreise als

Breitenkreise oder *Parallelkreise* bezeichnet. Die Meridiane oder Längenkreise sind also die Linien λ = const., die Breitenkreise oder Parallele die Linien φ = const. — Die Gesamtheit der Meridiane und Parallelkreise bildet das *Gradnetz* der Erdkugel, d. h. ein orthogonales System geographischer Netzlinien.

Daß die Meridiane und Parallelkreise einander senkrecht schneiden, läßt sich auf elementarem Wege nachweisen: Liegt der Meridian von P samt seiner Tangente T in der Zeichenebene (Abb. 88.3), so steht die Tangente an den Parallelkreis in P senkrecht zur Zeichenebene, d. h. Meridian und Parallel schneiden einander senkrecht.

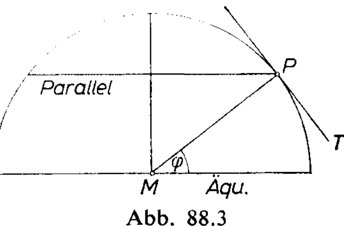


Abb. 88.3

Für das Rotationsellipsoid ist lediglich der Begriff der geographischen Breite zu modifizieren: Die geographische Breite ist der Winkel, den die Flächennormale des Ellipsoidpunktes P mit der Äquatorebene bildet. — Für einen Geoid- bzw. Oberflächenpunkt der Erde verlieren Breite und Länge die Bedeutung einer unmittelbaren Lagebestimmung: Die Meridiane und Parallele sind keine ebenen Kurven mehr, und die Flächennormale des Ellipsoides ist durch die Lotrichtung in P, d. h. die Tangente an die gekrümmte Lotlinie zu ersetzen. Breite und Länge bestimmen also nicht mehr die Lage, sondern nur noch die Lotrichtung von P. — Hinzu kommt, daß Breite und Länge nur mehr mit Hilfe der Rotationsachse definiert werden können: Die Lotrichtung bildet mit der Rotationsachse den Winkel $90° - \varphi$; für die Länge ist zu beachten, daß die Rotationsachse und die Lotrichtung in P im allgemeinen zueinander windschief liegen, die Meridianebene eines Geoid- bzw. Oberflächenpunktes P der Erde also durch die Lotrichtung von P und eine zur Rotationsachse parallele Gerade festzulegen ist.

89. Parallelkreis- und Meridianbögen, Zonenflächen

Der Radius R_φ des Parallels der Breite φ ergibt sich zu $R_\varphi = R \cos \varphi$, wenn R den Kugelradius bedeutet (Abb. 89.1). Also wird die *Bogenlänge des Parallels*

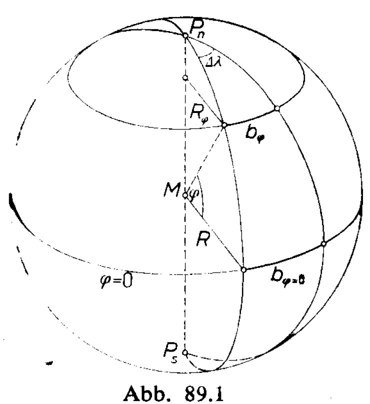


Abb. 89.1

$$U_\varphi = 2R_\varphi \pi = 2R\pi \cos \varphi. \quad (89.1)$$

Der Abstand des Parallels vom Äquator beträgt $R \sin \varphi$. — Der Bogen b_φ eines Parallels zwischen zwei Punkten mit dem Längenunterschied $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ folgt daraus zu

$$b_\varphi = 2R\pi \cos \varphi \frac{\Delta\lambda°}{360°}. \quad (89.2)$$

Die Bogenstücke, die zwei Meridiane auf den Parallelkreisen ausschneiden,

nehmen vom Äquator (Parallel zur Breite $\varphi = 0$) zu den Polen hin ab, und zwar im Verhältnis der zugehörigen Radien; es gilt

$$\frac{b_{\varphi=0}}{b_\varphi} = \frac{2R\pi}{2R_\varphi\pi} = \frac{1}{\cos\varphi}\,, \text{ d. h. } b_\varphi = (b_{\varphi=0})\cos\varphi, \tag{89.3}$$

wenn $b_{\varphi=0}$ den entsprechenden Bogen auf dem Äquator bedeutet. Während die Längenminute auf dem Äquator einer Entfernung von einer Seemeile entspricht ($\Delta\lambda = 1' = 1$ sm), reduziert sich diese Entfernung auf dem Parallel der Breite φ auf 1 sm$\cdot\cos\varphi$. — Den in Seemeilen ausgedrückten Parallelkreisbogen zwischen zwei Punkten bezeichnet man in der Nautik als die *Abweitung a*. — Für einen Längenunterschied $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ zweier Punkte desselben Parallels ergibt sich die Abweitung zu $a = R\cos\varphi \operatorname{arc}\Delta\lambda$. Die Abweitung ist aber nicht die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten desselben Parallels.

Die *Länge eines Meridianbogens* zwischen den Breiten φ_1 und φ_2 findet man aus

$$l = 2R\pi\frac{(\varphi_2-\varphi_1)^\circ}{360^\circ} = R\frac{\Delta\varphi^\circ}{\varrho^\circ} = R\operatorname{arc}\Delta\varphi, \tag{89.4}$$

wenn $\Delta\varphi$ den Breitenunterschied bedeutet. —

Die *Zonenfläche* zwischen zwei Parallelkreisen φ_1 und φ_2 ergibt sich zu $F = 2R\pi h$, wobei $h = R\sin\varphi_2 - R\sin\varphi_1$ den Abstand der Parallelkreisebenen bedeutet; also wird

$$F = 2R^2\pi(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) = 4R^2\pi\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}. \tag{89.5}$$

Die Fläche F' des von den Parallelen φ_1 und φ_2 und den Meridianen λ_1 und λ_2 begrenzten Kugelausschnittes wird

$$F' = F\frac{(\lambda_2-\lambda_1)^\circ}{360^\circ} = 4R^2\pi\frac{(\lambda_2-\lambda_1)^\circ}{360^\circ}\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}. \tag{89.6}$$

Die Fläche des durch die Parallelkreise $\varphi_1 = 48^\circ$, $\varphi_2 = 49^\circ$ und die Meridiane $\lambda_1 = 9^\circ$, $\lambda_2 = 10^\circ$ begrenzten Kugelausschnittes *(Gradabteilung)* ergibt sich z. B. nach (89.6) zu $F' = 8193{,}0$ km². Das Blatt München der topographischen Karte 1 : 50 000, das durch die Parallele $\varphi_1 = 48^\circ00'$, $\varphi_2 = 48^\circ12'$ und die Meridiane $\lambda_1 = 11^\circ20'$ und $\lambda_2 = 11^\circ40'$ begrenzt wird, umfaßt einen Kugelausschnitt mit einer Fläche von 550,5 km².

90. Entfernungen, Kurswinkel und Flächen

Kennt man für zwei Punkte P_1 und P_2 die geographischen Koordinaten, so läßt sich sofort die *kürzeste Entfernung* zwischen ihnen berechnen (Abb. 90.1). Die Meridianbögen P_1P_n und P_2P_n bilden mit dem Großkreisbogen P_1P_2 ein sphärisches Dreieck, von dem die Seiten $a = 90° - \varphi_2$ und $b = 90° - \varphi_1$ sowie der eingeschlossene Winkel $\gamma = \lambda_2 - \lambda_1$ bekannt sind. Für die kürzeste Entfernung $c = P_1P_2$ gibt der Seitenkosinussatz

$$\cos c = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1), \qquad (90.1)$$

und die Länge des Bogens P_1P_2 auf der Kugel vom Radius R wird

$$P_1P_2 = \frac{c}{\varrho} R = R \operatorname{arc} c. \qquad (90.2)$$

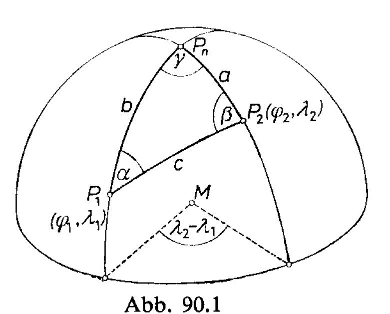


Abb. 90.1

Liegen P_1 und P_2 auf demselben Meridian, ist also $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0$, so wird aus (90.1)

$$\cos c = \cos (\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$c = \varphi_2 - \varphi_1,$$

$$P_1P_2 = R \operatorname{arc} (\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (90.3)$$

Die Gleichung (90.3) wird genähert auch dann gelten, wenn die beiden Punkte nahezu auf demselben Meridian liegen, und zwar darf $\lambda_2 - \lambda_1$ um so größer werden, je größer der Breitenunterschied $\varphi_2 - \varphi_1$ ist.

Liegen P_1 und P_2 auf demselben Parallel, ist also $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, so wird

$$\cos c = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos (\lambda_2 - \lambda_1),$$

woraus man mit $\cos c = 1 - 2 \sin^2(c/2)$ und $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ erhält

$$\sin \frac{c}{2} = \cos \varphi \sin \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}. \qquad (90.4)$$

Damit läßt sich nun auch die Differenz zwischen dem Parallelkreisbogen P_1P_2 und der kürzesten Entfernung P_1P_2 angeben. Einerseits ist c in Winkelminuten ausgedrückt die kürzeste Entfernung P_1P_2 in Seemeilen; andererseits ist die Winkelentfernung w auf dem Breitenkreis gleich $\lambda_2 - \lambda_1$, d. h. es ist $\sin (w/2) = \sin (\lambda_2 - \lambda_1)/2$; also gilt

$$\sin (c/2) : \sin (w/2) = \cos \varphi,$$

womit wegen $\cos \varphi \leqq 1$ bewiesen ist, daß die Entfernung auf dem Großkreis (in Seemeilen) kleiner ist als die Abweitung.

Wird die Entfernung P_1P_2 im Vergleich zum Kugelradius R klein, so versagt die Gleichung (90.1) für $\cos c$; man nimmt dann entweder die

NEPERschen Gleichungen zu Hilfe, die sowohl für große als auch kleine Entfernungen brauchbar sind, oder man entwickelt mit Hilfe von Potenzreihen spezielle Formeln für kurze Seiten.

Letztere Lösung ist vor allem für die geodätischen Aufgaben von Bedeutung: Die Seiten geodätischer Triangulationen sind im Verhältnis zum Erdradius immer klein (vgl. die Lösung der ersten und zweiten geodätischen Hauptaufgabe für die Kugel in [101]).

Die NEPERsche Formel gibt

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2},\qquad \tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}.$$

Nun ist

$$\frac{a-b}{2}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2},\qquad \frac{a+b}{2}=90^\circ-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2},\qquad \frac{\gamma}{2}=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2},$$

also wird

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\cot\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2},$$

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\cot\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}. \qquad (90.5)$$

Die Punkte P_1 und P_2 bezeichnet man dabei so, daß $\lambda_2-\lambda_1>0$ wird; weiter ist das $\triangle P_1P_2P_n$ zweckmäßig so zu wählen, daß $\lambda_2-\lambda_1<180^\circ$ ist, weil dann stets ein EULERsches Dreieck vorliegt, auch wenn einer der Punkte P_1 oder P_2 auf der Südhalbkugel liegt.

Sind α und β bekannt, so erhält man, wieder nach einer der NEPERschen Formeln,

$$\tan\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\tan\frac{a+b}{2},\qquad \tan\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\cot\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}. \qquad (90.6)$$

Mit den Formeln (90.5) ist übrigens auch die Aufgabe der *Kursbestimmung* in der Nautik gelöst: Fährt ein Schiff auf dem Großkreis von P_1

nach P_2, so spricht man von einem *orthodromischen Kurs* und bezeichnet α als den *Abfahrts-*, β als den *Ankunftskurs*[78]. Jedoch ist die Einhaltung der Orthodromen mit Schwierigkeiten verbunden, weil sich der Kurswinkel ständig ändert.

Wie man dem in der Nautik abhilft, wird in [91] bei der Ableitung der Loxodrome gezeigt.

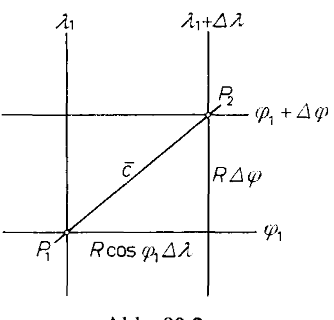


Abb. 90.2

Hier noch eine E r g ä n z u n g z u r E n t f e r n u n g s a u f g a b e: Ist $c = = P_1P_2$ sehr klein, dann führt die Überlegung zum Ziel, daß man kurze Großkreisbögen auf der Kugel ebenso berechnen darf, als ob die entsprechenden Strecken einer Ebene angehören würden, d. h. man darf für ein kleines rechtwinkliges Kugeldreieck den ebenen pythagoräischen Satz anwenden: Aus Abb. 90.2 findet man mit $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ und $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ sofort

$$\bar{c} = \overline{P_1P_2} = R\sqrt{\cos^2\varphi_1(\Delta\lambda)^2 + (\Delta\varphi)^2}, \tag{90.7}$$

wobei $\Delta\lambda$ und $\Delta\varphi$ im Bogenmaß einzuführen sind.

(90.7) läßt sich auch aus (90.1) ableiten, wenn man die Kosinusse der Stücke c und $\Delta\lambda$ in Reihen entwickelt. Berücksichtigt man die Glieder $\bar{c}^2$ und $(\Delta\lambda)^2$, so wird

$$1 - \frac{c^2}{2} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \left[1 - \frac{(\Delta\lambda)^2}{2}\right]$$

oder

$$1 - \frac{\bar{c}^2}{2} = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \frac{(\Delta\lambda)^2}{2}.$$

Für $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos\Delta\varphi$ erhält man durch Reihenentwicklung $1 \doteq (\Delta\varphi)^2/2$; setzt man $\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1$, so wird daraus wieder, wenn noch mit R multipliziert wird,

$$\bar{c} = R\sqrt{(\Delta\varphi)^2 + \cos^2\varphi_1(\Delta\lambda)^2}.$$

Soll endlich der *Flächeninhalt des Kugeldreiecks* $P_1(\varphi_1,\lambda_1)$, $P_2(\varphi_2,\lambda_2)$ und $P_3(\varphi_3, \lambda_3)$ berechnet werden, so ist zunächst der Exzess zu bestimmen, wofür zwei Möglichkeiten offen stehen: Entweder rechnet man aus den geographischen Koordinaten die Seiten P_1P_2, P_1P_3 und P_2P_3 und bestimmt dann ε nach der L'HUILIERschen Formel, oder man leitet die

---

[78] In der Geodäsie wird der Winkel α als das *Azimut* der Seite P_1P_2 in P_1 bezeichnet; darauf ist in [100] noch zurückzukommen.

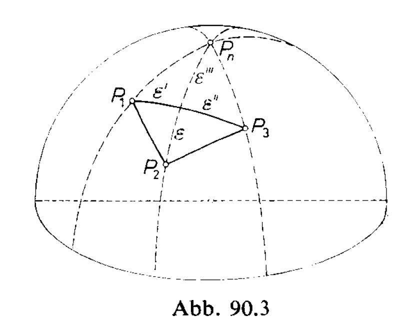


Abb. 90.3

Exzesse ε', ε'' und ε''' der Teildreiecke $P_1P_2P_n$, $P_2P_3P_n$ und $P_3P_nP_1$ ab (Abb. 90.3) und bildet $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'' - \varepsilon'''$.

Die letzte Lösung ermöglicht es, ε über die Exzesse ε', ε'' und ε''' der Teildreiecke durch die geographischen Koordinaten der Dreieckspunkte auszudrücken. Unter Verwendung der CAGNOLIschen Formel (vgl. S. 301) wird nämlich

$$\cot\frac{\varepsilon'}{2} = \frac{\cot\dfrac{90^\circ-\varphi_1}{2}\cot\dfrac{90^\circ-\varphi_2}{2}}{\sin(\lambda_2-\lambda_1)} + \cot(\lambda_2-\lambda_1)$$

usw.

Diese Methode ist auch für beliebige Flächen auf der Kugel anwendbar, die durch Großkreisbögen begrenzt und deren Ecken durch geographische Koordinaten gegeben sind.

In Ergänzung zu [68] soll auch noch die z e i c h n e r i s c h e L ö s u n g d e r E n t f e r n u n g s a u f g a b e n u n d d e r K u r s b e s t i m m u n g mittels *orthogonaler Parallelprojektion* der Erdkugel gezeigt werden. Die Bildebene (Zeichenebene) sei so gewählt, daß der Meridian $\lambda = 0°$ als Umrißkreis der Kugel abgebildet wird (Abb. 90.4); das Bild des Meridians $\lambda = 90°$ ist dann der Durchmesser $\overline{P_nP_s}$ der Kugel, und der Äquator bildet sich als der zu $\overline{P_nP_s}$ senkrechte Durchmesser ab. Das Bild P' des Punktes $P(\varphi, \lambda)$ ist nach der in Abb. 90.4 gezeigten Konstruktion zu bestimmen, die keiner weiteren Erläuterung bedarf. Der

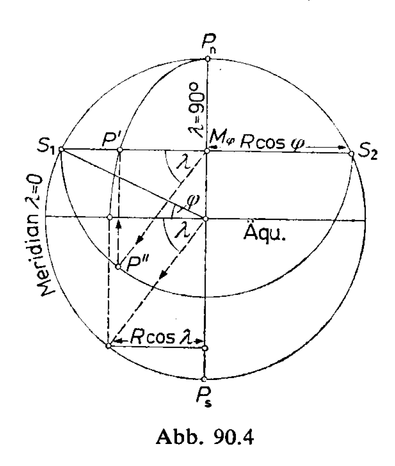


Abb. 90.4

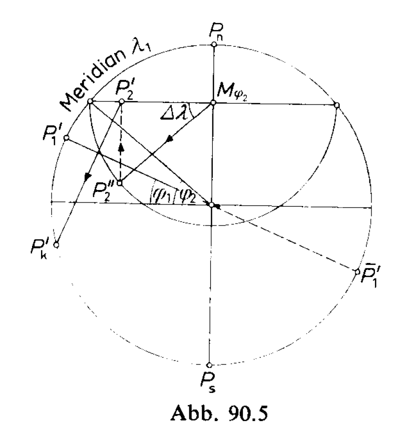


Abb. 90.5

Parallel durch P bildet sich als die Strecke $\overline{S_1S_2} = 2R \cos \varphi$, der Meridian durch P als Ellipse mit den Achsen R und $R \cos \lambda$ ab.

Um die *kürzeste Entfernung* P_1P_2 zweier Punkte $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ und $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$ zu bestimmen, legt man die Bildebene in den Meridian von P_1 (Abb. 90.5); P_1' liegt dann auf dem Umrißkreis und dem Parallel φ_1, und für die Konstruktion des Bildpunktes P_2' ist jetzt statt λ der Längenunterschied $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ einzuführen. Nun ist der Bogen P_1P_2 des durch P_1 und P_2 führenden Großkreises zu bestimmen. Klappt man diesen Großkreis um den in der Zeichenebene liegenden Durchmesser $\overline{P_1'\bar{P}_1'}$ um ($\bar{P}_1'$ ist der Gegenpunkt von P_1'), so wandert P_2' auf einem Kleinkreis, der sich als die zu $\overline{P_1'\bar{P}_1'}$ senkrechte Gerade $\overline{P_2'P_k'}$ abbildet. Der Bogen $P_1'P_k'$ gibt die gesuchte Entfernung P_1P_2 in wahrer Größe wieder.

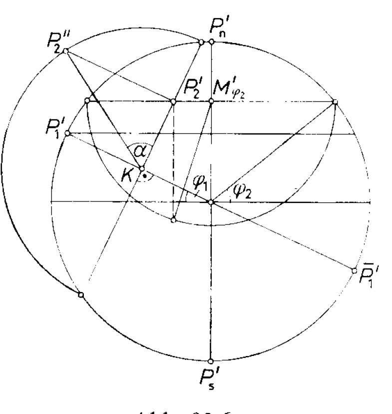


Abb. 90.6

Um z. B. den *Kurswinkel* α der Seite P_1P_2 zeichnerisch zu bestimmen, ist die Bildebene so zu legen, daß die Bildpunkte von P_1 und P_n auf den Umrißkreis zu liegen kommen (Abb. 90.6). Ist P_2' der Bildpunkt von $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$, dann ist der Kurswinkel α jetzt als der Winkel zwischen dem Meridian von P_1 und dem Großkreis durch P_1 und P_2 zu bestimmen. Wird der durch P_2' laufende, zu $\overline{P_1'\bar{P}_1'}$ senkrechte Kleinkreis in die Zeichenebene umgelegt, darauf die Lage von P_2' bestimmt ($= P_2''$), dann ist $\sphericalangle P_2'KP_2''$ gleich dem gesuchten Kurswinkel α. Die beiden Beispiele werden genügen, die Arbeitsweise dieser Zeichenmethode aufzuzeigen.

Die Lösungen weiterer Aufgaben mit Hilfe orthogonaler Parallelprojektionen finden sich u. a. bei W. LIETZMANN, a.a.O. S. 183 f. oder bei W. KRAMER, Zeichnerische Lösung der Grundaufgaben der mathematischen Erd- und Himmelskunde, Zeitschrift für physik. und chem. Unterricht, 40 (1927), S. 60. f.

Zu bemerken ist, daß die für die Abb. 90.4 bis 90.6 gewählte Projektion im Sinne der Darstellenden Geometrie als *äquatorständiges Eintafelbild* anzusprechen und deshalb als Sonderfall der allgemeinen Grund- und Aufrißdarstellung aufzufassen ist.

Orientiert man die Aufrißebene so, daß sich als Umriß der Kugel bei orthogonaler Parallelprojektion der Meridian der Länge $\lambda = 0$ ergibt, dann wird der Meridian der Länge $\lambda = 90°$ im Aufriß die Gerade $\overline{P_n'P_s'}$, während sich die übrigen Meridiane der Länge λ als Ellipsen mit den Achsen R und $R \cos \lambda$ abbilden. Die Parallelkreise bilden

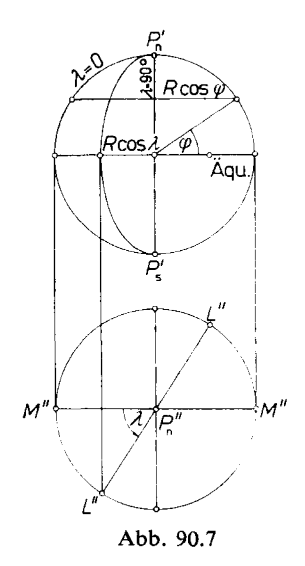


Abb. 90.7

sich als zu $\overline{P_n'P_s'}$ senkrechte Gerade der Länge $2R\cos\varphi$ ab (Abb. 90.7). Beschränkt man sich auf diesen Aufriß, so liegt ein äquatorständiges Eintafelbild vor. — Wird die Grundrißebene senkrecht zur Achse $\overline{P_nP_s}$ gewählt, so ist der Umrißkreis der Kugel bei orthogonaler Parallelprojektion der Äquator, also wieder ein Kreis vom Radius R der Kugel. Die Achse $\overline{P_nP_s}$ bildet sich als Punkt P_n'' ab, der Meridian $\lambda = 0$ als der Durchmesser $\overline{M''M''}$, die übrigen Meridiane als Durchmesser $\overline{L''L''}$, die mit $\overline{M''M''}$ den Winkel λ einschließen. Die Breitenkreise erscheinen als konzentrische Kreise um P_n'' mit den Radien $R\cos\varphi$ (vgl. Abb. 90.7). Dieser Grundriß wird als polständiges Eintafelbild bezeichnet, das man sich so entstanden denken kann, daß die Kugel senkrecht auf die im Pol angelegte, also polständige Tangentialebene projiziert wird.

Die für die Abbildungen 90.4 bis 90.6 benützte Darstellung der Kugel in einem äquatorständigen Eintafelbild ermöglicht keine anschauliche Darstellung, weil der Äquator und die Parallelkreise als Gerade abgebildet werden. Anschaulicher wird diese Projektion, wenn man die Bildebene unverändert beibehält, aber die Achse $\overline{P_nP_s}$ nach vorne neigt. Dann wandern die Bildpunkte P_n' und P_s' zum Bild M' des Kugelmittelpunktes hin, der Äquator und die Parallelkreise bilden sich als Ellipsen ab.

Die Konstruktion von P_n', P_s' und der Äquatorellipse ist in Abb. 90.8a gezeigt, wofür noch der Kreuzriß (die von links gesehene Seitenansicht, Abb. 90.8b) zu Hilfe genommen ist. Ist ω der Neigungswinkel der Achse P_nP_s, so liegen P_n' und P_s' in der Entfernung $R\cos\omega$ von M', und die Halbachsen der Äquatorellipse betragen R bzw. $R\sin\omega$.

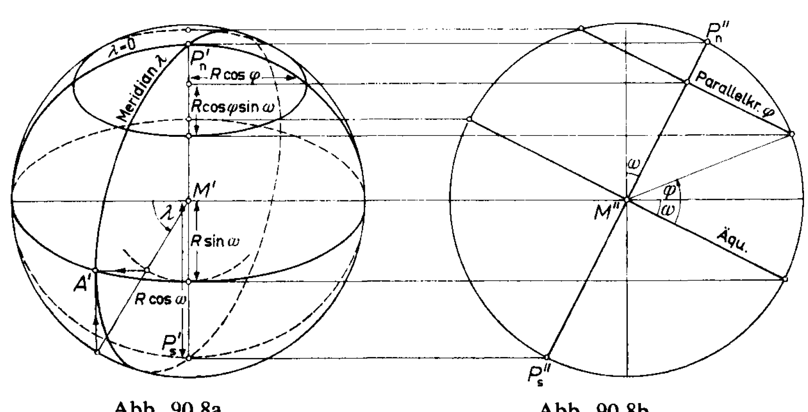


Abb. 90.8a Abb. 90.8b

Weiter ist in Abb. 90.8 die Konstruktion des Bildes für den Parallelkreis der Breite φ gezeigt; der Kreuzriß liefert die große und kleine Halbachse der Bildellipse. Sollen in Abb. 90.8 auch die Meridiane eingetragen werden, die sich ebenfalls als Ellipsen abbilden, so ist wie folgt zu verfahren: Der Meridian $\lambda = 0$ liege in der Zeichenebene; dann kann für den Meridian λ in einfacher Weise der Schnittpunkt A' mit dem Äquator konstruiert werden (Abb. 90.8a). $\overline{M'P'_n}$ und $\overline{M'A'}$ sind dann konjugierte Halbmesser der Meridianellipse, woraus in bekannter Weise (RYTZsche Konstruktion) die Ellipse konstruiert werden kann.

In diesem Buch sind deshalb für die Abbildungen der ganzen Kugel stets orthogonale Parallelprojektionen dieser Art benützt worden; dagegen wurden für die Darstellung sphärischer Figuren oder Dreiecke aus verständlichen Gründen auch schematische Zeichnungen (ohne Konstruktion) herangezogen.

91. Die Loxodrome

Die Fahrt bzw. Steuerung entlang einer Orthodrome erfordert, wie in [90] gezeigt wurde, eine laufende Änderung des Kurswinkels. Lediglich auf den Meridianen und auf dem Äquator bleiben die Kurswinkel unverändert. Da eine ständige Kursänderung unmöglich ist, fahren die Schiffe meist größere Strecken — einige hundert Kilometer — mit festem Kurs, wodurch die Orthodrome durch einen gebrochenen Linienzug aus loxodromischen Bogenstücken ersetzt wird. Dabei versteht man unter einer *Loxodromen* eine Linie auf der Kugel, die alle Meridiane unter dem gleichen Kurswinkel schneidet.

Sonderfälle der Loxodromen sind also die Meridiane, der Äquator, aber auch die Parallelkreise. — Die Bezeichnung Loxodrome stammt von W. SNELLIUS. — Der Portugiese NUÑEZ (1492–1577) erkannte als erster, daß die loxodromische Distanz nicht die kürzeste Distanz ist und daß die Loxodrome dem Pol immer näher kommt, ohne ihn (theoretisch) jemals zu erreichen.

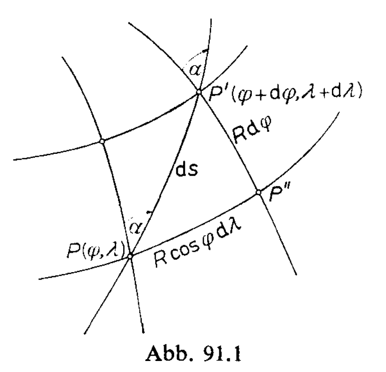


Abb. 91.1

Zur Bestimmung der *Gleichung der Loxodrome* wird die Differential- und Integralrechnung benötigt. P und P' seien zwei infinitesimal benachbarte Punkte der Loxodrome mit den geographischen Koordinaten φ, λ und $\varphi + d\varphi$, $\lambda + d\lambda$ (Abb. 91.1). Dann bildet der Bogen $PP'' = R \cos\varphi \, d\lambda$ des Parallels φ und der Bogen $P''P' = R \, d\varphi$ des Meridians $\lambda + d\lambda$ mit dem Teilstück $PP' = ds$ der Loxodrome ein rechtwinkliges Dreieck, das

(infinitesimal) eben behandelt werden kann. Es gilt dann:

$$\tan\alpha = \frac{R\cos\varphi\,d\lambda}{R\,d\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\tan\alpha}{\cos\varphi}. \tag{91.1}$$

(91.1) ist die *Differentialgleichung der Loxodrome* vom Kurswinkel α. Für die Integration von (91.1) setzt man $\varphi = 90°-\psi$, $d\varphi = -d\psi$, $\psi = 90°-\varphi$ und erhält

$$\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = -\int\frac{d\psi}{\sin\psi} = -\int\frac{d\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}}$$

$$= -\int\frac{d\frac{\psi}{2}}{\dfrac{\sin\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}}\cos^2\frac{\psi}{2}} = -\int\frac{\dfrac{d\frac{\psi}{2}}{\cos^2\frac{\psi}{2}}}{\tan\frac{\psi}{2}}.$$

Führt man noch $\tan(\psi/2) = t$, $dt = d(\psi/2)/\cos^2(\psi/2)$ ein, so wird daraus

$$\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = -\int\frac{dt}{t} = -\ln t + C = -\ln\tan\frac{\psi}{2} + C = \ln\cot\frac{\psi}{2} + C$$

$$= \ln\cot\left(45°-\frac{\varphi}{2}\right) + C = \ln\tan\left(45°+\frac{\varphi}{2}\right) + C.$$

Also wird endlich

$$\lambda = \tan\alpha\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \tan\alpha\left[\ln\tan\left(45°+\frac{\varphi}{2}\right)\right] + C. \tag{91.2}$$

(91.2) ist die Gleichung einer Loxodrome mit dem Kurswinkel α. Die Integrationskonstante C bedeutet, daß (91.2) die Gleichung einer unendlichen Schar von Loxodromen darstellt. — Soll durch den Punkt $P_1(\varphi_1,\lambda_1)$ eine Loxodrome mit dem Kurswinkel α gelegt werden, so ergibt sich die Konstante C aus der Bedingung

$$\frac{\lambda_1}{\tan\alpha} = \ln\tan\left(45°+\frac{\varphi_1}{2}\right) + C \quad \text{oder} \quad C = \frac{\lambda_1}{\tan\alpha} - \ln\tan\left(45°+\frac{\varphi_1}{2}\right). \tag{91.3a}$$

C in (91.2) eingesetzt gibt die Gleichung der gesuchten Loxodrome zu

$$\frac{\lambda}{\tan\alpha} - \frac{\lambda_1}{\tan\alpha} = \ln\tan\left(45°+\frac{\varphi}{2}\right) - \ln\tan\left(45°+\frac{\varphi_1}{2}\right)$$

oder

$$\lambda - \lambda_1 = \tan\alpha \ln \frac{\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right)}. \tag{91.3b}$$

(91.3) ist die Gleichung der von $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ unter dem Kurswinkel α ausgehenden Loxodrome. — Noch wichtiger ist die Aufgabe, den Kurswinkel der Loxodrome zu bestimmen, die zwei gegebene Punkte $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ und $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$ miteinander verbindet: Nach (91.3a) lauten die Bedingungen dafür

$$\frac{\lambda_1}{\tan\alpha} = \ln\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right) + C \quad \text{und} \quad \frac{\lambda_2}{\tan\alpha} = \ln\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2}\right) + C.$$

Mit $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ erhält man daraus

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\tan\alpha} = \Delta\lambda \cot\alpha = \ln \frac{\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right)},$$

und der Kurswinkel α der gesuchten Loxodrome ergibt sich aus

$$\cot\alpha = \frac{\ln \dfrac{\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right)}}{\Delta\lambda}. \tag{91.4}$$

Für die *Bogenlänge der Loxodrome* zwischen P_1 und P_2 liefert Abb. 91.1 die Differentialgleichung

$$\cos\alpha = \frac{R\,d\varphi}{ds} \quad \text{oder} \quad ds = \frac{R\,d\varphi}{\cos\alpha},$$

woraus man durch Integration

$$s = P_1P_2 = \int_{P_1}^{P_2} ds = \frac{R}{\cos\alpha}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \frac{R}{\cos\alpha}(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{91.5}$$

erhält. Endlich läßt sich an Hand von (91.3) noch der V e r l a u f d e r L o x o d r o m e diskutieren: Um für

$$\ln \frac{\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right)}$$

einen endlichen Wert zu erhalten, sind die Erdpole P_n und P_s als Ausgangspunkte von Loxodromen auszuschließen. Für jeden anderen Punkt $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ ist der Nenner von (91.3) endlich und positiv, und der natürliche Logarithmus des Bruches hat einen endlichen Wert. Hier zunächst einige Spezialfälle: Für $\alpha = 0°$ bzw. 180° wird nach (91.3) $\lambda = \lambda_1$, d. h. die Loxodrome mit den Kurswinkeln $\alpha = 0°$ und 180° sind die Meridiane. — Wird $\alpha = 90°$ bzw. 270°, so hat die Gleichung (91.3) nur dann Gültigkeit, wenn $\varphi = \varphi_1$ wird; also sind die Loxodromen mit den Kurswinkeln 90°, 270° die Parallelkreise.

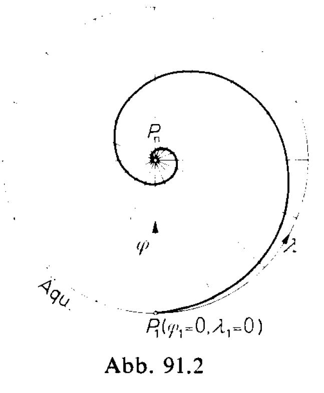


Abb. 91.2

Der allgemeine Verlauf der Loxodrome soll an einem Beispiel diskutiert werden: Von $P_1(\varphi_1 = 0, \lambda_1 = 0)$, also dem Schnittpunkt des Nullmeridians mit dem Äquator, soll eine Loxodrome mit einem Kurswinkel $0° < \alpha < 90°$ ausgehen. Dann nimmt (91.3) die Form $\lambda = \tan\alpha \ln \tan(45° + \varphi/2)$ an. Für $\varphi = 0$ wird auch $\lambda = 0$; wächst φ, so wächst auch λ, und zwar monoton, weil $\tan(45° + \varphi/2)$ von 1 bis $+\infty$ und somit $\ln \tan(45° + \varphi/2)$ von 0 bis $+\infty$ wächst. Geht φ gegen 90°, so wächst λ über alle Grenzen, also über 360°, 720° usw. Die von P_1 ausgehende Loxodrome nähert sich also asymptotisch dem Nordpol, ohne ihn zu erreichen (Abb. 91.2). — Für südliche Breiten ergibt sich ein entsprechender Verlauf. — Die Bogenlänge der Loxodrome von P_1 bis zum Nordpol P_n erreicht für einen Kurswinkel von $\alpha = 45°$ nach (91.5) mit $1/\cos\alpha = \sqrt{2}$, $\varphi_2 - \varphi_1 = 90° = \pi/2$ und $R = 6371{,}2$ km den Wert $s = 6371{,}2 \cdot \pi/\sqrt{2}$ km $= 14153{,}3$ km. Trotz der asymptotischen Annäherung der Loxodrome an den Nordpol ergibt sich also eine endliche Entfernung P_1P_n.

92. Die Peilungsaufgaben

Ein wichtiges Verfahren der Navigation ist die Ortsbestimmung eines Schiffes oder Flugzeuges durch Funkpeilung. Werden die am Schiffsort P gesendeten Funkzeichen — z. B. die SOS-Rufe bei Seenot — an den ortsfesten Stationen $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ und $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$ bekannter Lage aufgenommen, so läßt sich die Lage von P bestimmen: Die elektromagnetischen Wellen breiten sich auf Großkreisen aus; bestimmt man durch Peilung die Winkel α und β (Abb. 92.1), so bilden P_1, P und P_2 ein sphärisches Dreieck. Die Lösung dieser Aufgabe, die als *Fremdpeilung* bezeichnet wird und offenbar das *sphärische Analogon zum Vorwärtseinschneiden der Ebene*

darstellt, gestaltet sich wie folgt: Aus den Positionen von P_1 und P_2 findet man zunächst die Winkel α_1 und α_2 nach den NEPERschen Gleichungen:

$$\tan\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \cot\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\,\frac{\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}},$$

$$\tan\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} = \cot\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\,\frac{\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}}. \qquad (92.1)$$

Abb. 92.1

Die Entfernung $e = P_1P_2$ wird

$$\tan\frac{e}{2} = \cot\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\,\frac{\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}. \qquad (92.2)$$

Damit kennt man für $\triangle P_1PP_2$ die Stücke $\beta_1 = \alpha-\alpha_1$, $\beta_2 = \beta-\alpha_2$ und e, woraus die Seiten $\mu = P_1P$ und $\nu = P_2P$ abgeleitet werden können; die NEPERschen Gleichungen geben dafür

$$\tan\frac{\mu+\nu}{2} = \tan\frac{e}{2}\,\frac{\cos\frac{\beta_2-\beta_1}{2}}{\cos\frac{\beta_2+\beta_1}{2}}, \quad \tan\frac{\mu-\nu}{2} = \tan\frac{e}{2}\,\frac{\sin\frac{\beta_2-\beta_1}{2}}{\sin\frac{\beta_2+\beta_1}{2}}. \qquad (92.3)$$

Damit lassen sich die geographischen Koordinaten φ und λ von P aus den Dreiecken P_1PP_n und P_nPP_2 finden. Der Seitenkosinussatz gibt für die Breite

$$\sin\varphi = \cos\mu\sin\varphi_1+\sin\mu\cos\varphi_1\cos\alpha = \cos\nu\sin\varphi_2+\sin\nu\cos\varphi_2\cos\beta, \qquad (92.4)$$

und der Sinussatz liefert

$$\sin(\lambda-\lambda_1) = \sin\mu\,\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi}, \quad \sin(\lambda_2-\lambda) = \sin\nu\,\frac{\sin\beta}{\cos\varphi}. \qquad (92.5)$$

Die Berechnung von Breite und Länge nach dem Seitenkosinus- bzw. Sinussatz läßt sich auch umgehen. Mit den Bezeichnungen $\lambda-\lambda_1 = \varepsilon$ und $\sphericalangle P_1PP_n = \delta$ gibt die

NEPERsche Formel für $\triangle P_1PP_n$

$$\tan\frac{\delta+\varepsilon}{2} = \frac{\cos\frac{90^\circ-\varphi_1-\mu}{2}}{\cos\frac{90^\circ-\varphi_1+\mu}{2}}\cot\alpha, \qquad \tan\frac{\delta-\varepsilon}{2} = \frac{\sin\frac{90^\circ-\varphi_1-\mu}{2}}{\sin\frac{90^\circ-\varphi_1+\mu}{2}}\cot\alpha.$$

Damit ist ε und auch $\lambda = \lambda_1+\varepsilon$ bekannt, und die Breite wird

$$\tan\frac{90^\circ-\varphi}{2} = \tan\frac{90^\circ-\varphi_1+\mu}{2}\,\frac{\cos\frac{\delta+\varepsilon}{2}}{\cos\frac{\delta-\varepsilon}{2}}$$

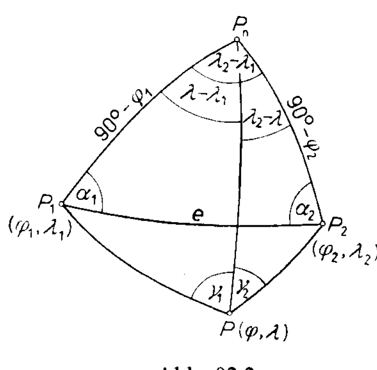


Abb. 92.2

Die so berechneten Werte für Breite und Länge werden dem Schiff drahtlos mitgeteilt.

Die Position P eines Flugzeuges oder Schiffes kann auch durch sogenannte *Eigenpeilung* gefunden werden. Bestimmt man in P durch Peilung die Winkel γ_1 und γ_2 für die in den festen Stationen P_1 (φ_1, λ_1) und $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$ gesendeten Funksignale, so läßt sich die Lage von P durch *sphärisches Rückwärtseinschneiden* ableiten (Abb. 92.2).

Auch auf der Kugel sind zur Festlegung von P die Richtungen nach drei bekannten Stationen notwendig: Hier ist die dritte Richtung die zum Nordpol P_n, die z. B. durch einen Kompaß realisiert werden kann.

Rechnet man wie vorhin aus dem $\triangle P_1P_2P_n$ die Stücke α_1, α_2 und $e = P_1P_2$, dann gibt der Kotangenssatz für die Dreiecke P_1PP_n und P_2P_nP die Beziehungen

$$\cos(\lambda-\lambda_1)\sin\varphi = \cos\varphi\tan\varphi_1-\sin(\lambda-\lambda_1)\cot\gamma_1,$$
$$\cos(\lambda_2-\lambda)\sin\varphi = \cos\varphi\tan\varphi_2-\sin(\lambda_2-\lambda)\cot\gamma_2,$$

woraus φ und λ bestimmt werden können. Die strenge Auflösung der beiden Gleichungen ist mühsam und wird daher in der Praxis meist durch Näherungsverfahren ersetzt[79]. Die strenge Lösung wird deshalb nur angedeutet; zunächst findet man

$$\sin\varphi = \frac{\sin(\lambda_2-\lambda)\cot\gamma_2\tan\varphi_1-\sin(\lambda-\lambda_1)\cot\gamma_1\tan\varphi_2}{\cos(\lambda-\lambda_1)\tan\varphi_2-\cos(\lambda_2-\lambda)\tan\varphi_1}$$

[79] Ein Näherungsverfahren für das sphärische Rückwärtseinschneiden ist in [99] angegeben.

und

$$\cos\varphi = \frac{\sin(\lambda_2-\lambda)\cos(\lambda-\lambda_1)\cot\gamma_2-\sin(\lambda-\lambda_1)\cos(\lambda_2-\lambda)\cot\gamma_1}{\cos(\lambda-\lambda_1)\tan\varphi_2-\cos(\lambda_2-\lambda)\tan\varphi_1}.$$

Quadriert und addiert man die beiden Gleichungen, so erhält man wegen $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi = 1$ eine Gleichung für λ, in der die Unbekannte φ nicht auftritt.

93. Verschiedene Aufgaben zur mathematischen Geographie

Instruktive Beispiele für die Anwendung der sphärischen Trigonometrie sind noch die folgenden Aufgaben:

1. Für den von P_1 (φ_1, λ_1) auslaufenden Großkreisbogen P_1P_2 sind die Länge $s_{1.2}$ und der Winkel $a_{1.2}$ gegeben (Abb. 93.1). Dabei ist der Winkel $a_{1.2}$ das Nordazimut des Großkreisbogens P_1P_2; es wird gewöhnlich von Nord über Ost von 0° bis 360° gezählt. Gesucht sind die geographischen Koordinaten φ_2 und λ_2 des Bogenendpunktes P_2. Eine erste Lösung dieser Aufgabe folgt aus der Lösung der Grundaufgabe (SWS)[80]: Aus $\triangle P_1P_2P_n$ findet man

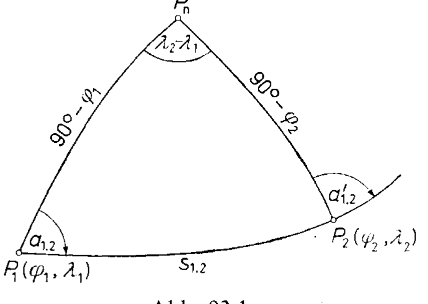


Abb. 93.1

$$\sin\varphi_2 = \sin\varphi_1 \cos s_{1.2}+\cos\varphi_1 \sin s_{1.2}\cos a_{1.2} \qquad (93.1\text{a})$$

und

$$\sin(\lambda_2-\lambda_1) = \sin s_{1.2}\frac{\sin a_{1.2}}{\cos\varphi_2}. \qquad (93.1\text{b})$$

Bequem logarithmierbare Formeln liefern wieder die NEPERschen Gleichungen. Auch das Azimut $a'_{1.2}$ des Bogens P_1P_2 in P_2 läßt sich nach der NEPERschen Formel bestimmen.

2. Durch die Punkte P_1 (φ_1, λ_1) und P_2 (φ_2, λ_2) verläuft ein Großkreis (Abb. 93.2). Unter welcher Breite schneidet P_1P_2 den Meridian der Länge λ und unter welcher Länge den Parallel zur Breite φ? Hat man die Winkel $a_{1.2}$ und $180°-a'_{1.2}$ gerechnet, etwa nach den NEPERschen Formeln, so ist für den zweiten Teil der Lösung entweder λ, also auch $\lambda-\lambda_1$

[80] Eine ausführliche Darstellung dieser geodätischen Hauptaufgabe und deren Umkehrung einschließlich der Näherungslösungen mittels Potenzreihen wird in [101] besorgt.

bekannt, so daß die Seite $P_nP = 90° - \varphi$ gerechnet werden kann [vgl. die Grundaufgabe (WSW)], oder es ist $90° - \varphi$ bekannt, so daß nur noch $(\lambda - \lambda_1)$ zu berechnen ist [vgl. die Grundaufgabe (SWS)].

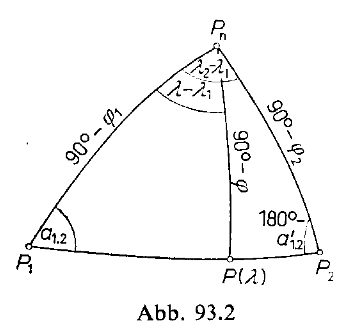


Abb. 93.2

3. Gesucht ist der Schnittwinkel ψ zwischen dem Parallel φ und einem Großkreis, der den Äquator unter dem Winkel γ schneidet (Abb. 93.3). Aus dem bei P' rechtwinkligen Dreieck PQP' folgt nach der NEPERschen Regel

$$\cos\gamma = \sin(90° - \psi)\sin(90° - \varphi)$$

oder
$$\cos\psi = \frac{\cos\gamma}{\cos\varphi}. \tag{93.2}$$

4. In den Punkten $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ und $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$ werden jeweils die zu den Meridianen senkrechten Großkreise gezeichnet (Abb. 93.4). Gesucht ist der Schnittwinkel ψ im Schnittpunkt Q der beiden Großkreise. Mit $P_nP' = m$ findet man aus dem bei P_1 rechtwinkligen Dreieck $P_1P'P_n$ zunächst

$$\tan m = \frac{\cot\varphi_1}{\cos(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad \text{und} \quad \cot\beta = \tan(\lambda_2 - \lambda_1)\cos m.$$

Mit $P_2P' = 90° - \varphi_2 - m$ und $P_2Q = n$ gibt das bei P_2 rechtwinklige Dreieck P_2QP' zunächst $\tan n = \tan\beta\cos(\varphi_2 + m)$ und schließlich

$$\tan\psi = \frac{\cot(\varphi_2 + m)}{\sin n}.$$

Für die Entfernung $P_nQ = x$ zwischen dem Schnittpunkt Q und dem

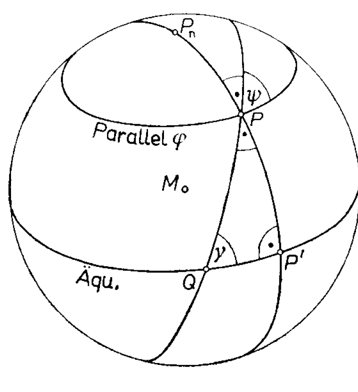


Abb. 93.3

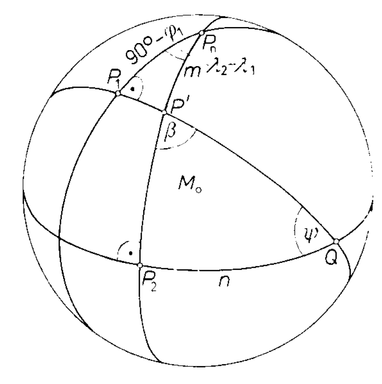


Abb. 93.4

Nordpol P_n endlich gibt das rechtwinklige Dreieck P_nP_2Q noch

$$\cos x = \sin \varphi_2 \cos n.$$

5. Eine weitere sphärische Aufgabe, die als das *sphärische Analogon zum ebenen Bogenschnitt* aufgefaßt werden kann, ist noch die folgende: Auf den Erdbebenstationen P_1 (φ_1, λ_1) und P_2 (φ_2, λ_2) sind die Entfernungen s_1 und s_2 zum Herd P eines Bebens bestimmt worden. Gesucht sind die geographischen Koordinaten φ und λ von P. Die Lösung ist wiederum durch die Berechnung zweier Dreiecke möglich.

Kapitel 17: Einige kartographische Netzentwürfe

94. Grundbegriffe der Kartenentwurfslehre

Grundlage jeder topographischen oder geographischen Karte als einem ebenen und verkleinerten Bild der Erdoberfläche oder eines Teils davon ist das aus den Meridianen und Parallelkreisen bestehende Liniennetz, das *Kartengitter*. Aufgabe der Kartenentwurfslehre ist, das ideelle Netz der Meridiane und Parallelkreise von der Erdoberfläche (Kugeloberfläche) in die Ebene zu übertragen, d. h. in eine Ebene abzubilden. Unter einer *Abbildung* ist also der Vorgang zu verstehen, daß einem Punkt P (φ, λ) auf der Erdoberfläche nach einem mathematischen Gesetz ein Bildpunkt P' in einer Ebene zugeordnet wird.

Es ist nicht beabsichtigt, hier die zahlreichen, für geodätische und geographische Karten benutzten Abbildungsarten darzustellen — das ist Aufgabe der Kartenentwurfslehre —, sondern es soll an Hand einiger Netzentwürfe die Anwendungsmöglichkeit der Trigonometrie für dieses Arbeitsgebiet aufgezeigt werden.

Für ein eingehendes Studium der Kartenentwurfslehre ist auf die Fachliteratur zu verweisen, z. B. K. Wagner, Kartographische Netzentwürfe, Bibl. Institut, Mannheim, 2. Aufl. 1962; Handbuch der Vermessungskunde, Jordan/Eggert/Kneissl, Bd. Ia von W. Beck, Geländeformen, Reproduktion, Topographische Karten und Karten-Abbildungen, Verlag J. B. Metzler, Stuttgart 1957; F. Löbell, Allgemeine Theorie der Flächenabbildungen, Sonderdruck aus den Nachr. aus dem Reichsvermessungsdienst, Berlin, 1942, Nr. 5; H. Merkel, Grundzüge der Kartenprojektionslehre, Veröff. d. Deutschen Geod. Komm., Reihe A, Heft Nr. 17, München 1956.

Der Vereinbarung in Abschnitt [87] entsprechend wird als Erdoberfläche bzw. Erdfigur wieder die Oberfläche der dem Internationalen Erdellipsoid volumengleichen Kugel benützt.

Natürlich liegt den meisten Karten, vor allem den Karten größerer Maßstäbe, eine Abbildung des Erdellipsoids zugrunde, den amtlichen deutschen Kartenwerken z. B. das Bessel-Ellipsoid. Daß aber eine kugelförmige Erde für viele kartographische Arbeiten, insbesondere in kleinen Maßstäben (1:1 Million und kleiner) völlig ausreichend ist, zeigt die folgende Rechnung: Ein Meridianbogen zwischen 46° und 47° Breite hat auf dem Internationalen Erdellipsoid die Länge von 111,165 km, auf der volumgleichen Kugel dagegen 111,199 km; die Differenz beträgt etwa 34 m. Soll ein Gebiet zwischen den genannten Breitenkreisen im Maßstab 1:1 Million längentreu

abgebildet werden, so ergibt sich daraus ein Fehler von 0,03 mm, der innerhalb der Zeichengenauigkeit liegt.

Vorweg ist zu bemerken, daß die Kugeloberfläche oder Teile derselben nicht ohne *Verzerrungen* in eine Ebene abgebildet werden können, d. h. nur unter Verzicht auf gewisse Eigenschaften können bestimmte Forderungen, etwa die der *Winkel-*, *Längen-* oder *Flächentreue* eingehalten werden.

Die Differentialgeometrie lehrt, daß nur die abwickelbaren Flächen wie *Zylinder*, *Kegel* und *Torsen* (Tangentenflächen an Raumkurven) ohne Verzerrung in die Ebene übertragen werden können.

Dabei versteht man unter *Winkeltreue*, daß zwei beliebige Kurven auf der Kugel, die miteinander den Winkel α bilden, in der ebenen Abbildung in zwei Kurven übergehen, die wieder den Winkel α bilden. *Längentreue* ist dann gegeben, wenn alle Längen auf der Kugel in der Ebene im gleichen Verhältnis verkleinert werden: sinngemäß ist die *Flächentreue* definiert.

Bei den verschiedenen Abbildungsmöglichkeiten der Kugeloberfläche unterscheidet man zunächst zwischen *echten* und *unechten Entwürfen*. Für die *echten Entwürfe* läßt sich das Abbildungsprinzip geometrisch anschaulich darstellen. Die *unechten* oder *konventionellen Entwürfe* gehen daraus durch zusätzliche Bedingungen hervor, wodurch die ursprünglichen Eigenschaften häufig verloren gehen.

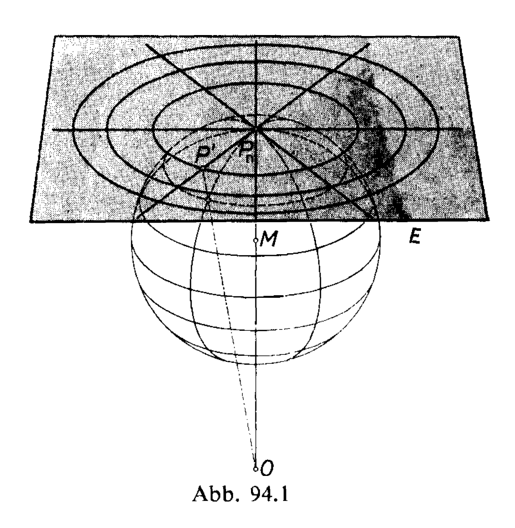


Abb. 94.1

Am einfachsten sind die *azimutalen Entwürfe* (Abb. 94.1): Von einem beliebigen Punkt O auf der Erdachse, dem Projektionszentrum, wird der Kugelpunkt P mit Hilfe des Projektionsstrahles $\overline{OP}$ nach dem Bildpunkt P' der Ebene E abgebildet, die die Kugel im Nordpol P_n berührt; der Bildpunkt von P_n ist der Kartenmittelpunkt oder Hauptpunkt H. Dabei bilden sich die Meridiane (λ = const.), die sich im Hauptpunkt H schneiden, als Gerade ab; die Bilder der Parallelkreise (φ = const.) sind konzentrische Kreise um H. Offenbar ändert die Verschiebung des Projektionszentrums nichts an der Abbildung der Meridiane, lediglich die Radien der Parallelkreise ändern sich. Weiter erkennt man, daß die Abbildung für jede Lage von O im Hauptpunkt winkeltreu ist: Die

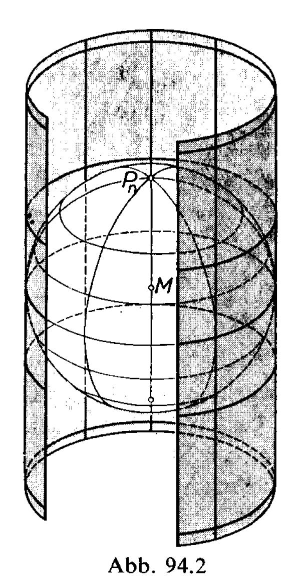


Abb. 94.2

geraden Meridianbilder schließen den gleichen Winkel ein wie die Meridiane. Die Winkeltreue im Hauptpunkt bleibt auch dann erhalten, wenn die Bildebene die Kugel nicht im Pol, sondern in einem beliebigen Oberflächenpunkt berührt — Einer der wichtigsten azimutalen Entwürfe, die *stereographische Projektion*, ist in [95] und [96] dargestellt.

Eine *zylindrische Abbildung* liegt vor, wenn die Meridiane und Parallelkreise zunächst auf den Mantel eines Zylinders abgebildet werden, dessen Achse mit der Erdachse zusammenfällt. Der Zylinder kann die Erde entweder im Äquator berühren (Abb. 94.2) oder in zwei Parallelkreisen schneiden. Die Meridian- und Parallelkreisbilder ergeben sich hier als die Schnitte der Meridian- und Parallelkreisebenen mit dem Zylindermantel. Schneidet man den Zylinder längs eines Meridianbildes auf und wickelt den Mantel in die Ebene ab, so entsteht ein rechteckiges Netzgitter. Als Beispiel für eine zylindrische Abbildung wird in [97] die *Mercatorkarte* dargestellt.

An Stelle eines Zylinders läßt sich auch ein Kegel verwenden, dessen Achse mit der Erdachse zusammenfällt und die Kugel in einem Parallel berührt (Abb. 94.3) oder in zwei Parallelen schneidet. Bei diesen *konischen Abbildungen* ergeben sich die Meridianbilder als Schnitte der Meridianebenen, die Parallelkreisbilder als Schnitte der Parallelkreisebenen mit dem Kegelmantel. Wickelt man den längs eines geraden Meridianbildes aufgeschnittenen Kegelmantel in die Ebene ab, so erhält man das in Abb. 94.3 erkennbare Kartennetz: Die Meridianbilder sind Geraden, die in der Kegelspitze

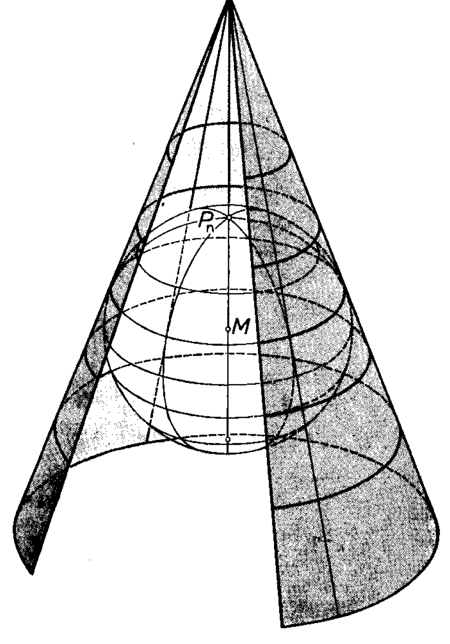


Abb. 94.3

zusammenlaufen. Der von zwei Meridianbildern eingeschlossene Winkel ist offenbar stets kleiner als der Längenunterschied der Meridiane auf der Kugel. Die Parallelkreise sind konzentrische Kreise um die Kegelspitze als Mittelpunkt.

Die konischen Abbildungen stellen den allgemeinsten Fall der echten Abbildungen dar: Aus ihnen lassen sich die zylindrischen gewinnen, wenn die Kegelspitze ins Unendliche rückt, und die azimutalen, wenn der Öffnungswinkel des Kegels 180° wird.

Diese Gliederung und Beschreibung der Netzentwürfe mag als Einführung genügen. Nicht erwähnt wurden die polykonischen Abbildungen und die daraus hervorgehenden Polyederabbildungen.

Eine weitere Einteilung der Netzentwürfe ergibt sich durch die verschiedene gegenseitige Lage von Erdachse und Zylinder- bzw. Kegelachse bei den zylindrischen bzw. konischen Entwürfen, bzw. von Erdachse und Hauptstrahl, von Projektionszentrum und Hauptpunkt bei den azimutalen Entwürfen: Die in Abb. 94.1 bis 94.3 dargestellten Entwürfe nennt man normal; stehen die Erdachse und die Figurenachse von Zylinder und Kegel bzw. der Hauptstrahl aufeinander senkrecht, so liegt ein querachsiger oder transversaler Entwurf vor. Bei beliebiger Lage der genannten Elemente spricht man von einem schiefachsigen Entwurf.

95. Das Abbildungsgesetz für die echten azimutalen Entwürfe

Zur Einführung wird zunächst die *normale azimutale Abbildung* dargestellt. Der Hauptpunkt H der Kartenebene sei der Nordpol P_n, und der Abstand des Projektionszentrums O vom Kugelmittelpunkt M sei d (Abb. 95.1). Wird statt der geographischen Breite die Poldistanz $\delta = (90° - \varphi)$ des Punktes P benützt, so erhält man für das Bild des Parallelkreises durch P den Radius

$$m = \frac{(R+d)R \sin \delta}{R \cos \delta + d}. \qquad (95.1a)$$

(95.1a) wird als *Halbmessergesetz* bezeichnet.

Der Winkel l, den zwei Meridianbilder einschließen, ist gleich dem Längenunterschied $\Delta\lambda$ der Kugelmeridiane, also gilt

$$l = \Delta\lambda. \qquad (95.1b)$$

(95.1) stellt die *allgemeine Abbildungsvorschrift für die echten azimutalen Entwürfe* dar, die auch als *Perspektiven* bezeichnet werden.

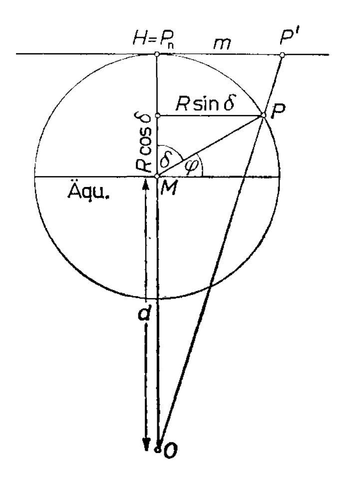


Abb. 95.1

Auf Grund der damit gegebenen Kartengitter läßt sich jeder beliebige Punkt $Q(\varphi, \lambda)$ durch rechtwinklige Koordinaten in der Bildebene festlegen: Wählt man das Bild des Nullmeridians als x-Achse, H als Ursprung (Abb. 95.2), so erhält der Bildpunkt Q' die Koordinaten

$$x = \frac{(R+d)R \sin \delta}{R \cos \delta + d} \cos \lambda, \quad y = \frac{(R+d)R \sin \delta}{R \cos \delta + d} \sin \lambda. \qquad (95.2)$$

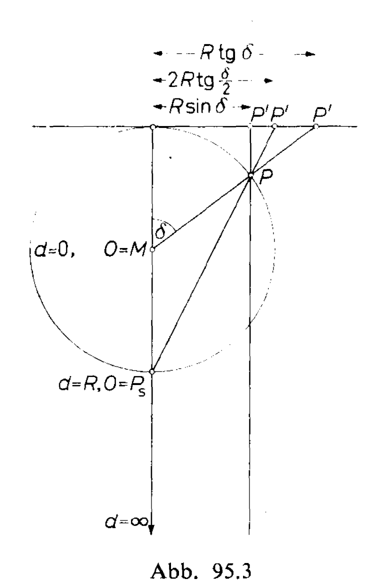


Abb. 95.2

Abb. 95.3

Der wichtigste azimutale Entwurf ist die *stereographische Projektion*, bei der das Projektionszentrum im Gegenpunkt des Hauptpunkts, hier also in P_s liegt (Abb. 95.3). Für $d = R$ wird aus (95.1a)

$$m = \frac{2R^2 \sin \delta}{R(\cos \delta + 1)} = 2R \tan \frac{\delta}{2}, \qquad (95.3)$$

wie auch aus Abb. 95.3 zu ersehen ist. Wird $d = 0$, d. h. fällt O in den Kugelmittelpunkt, so wird

$$m = R \tan \delta. \qquad (95.4)$$

Diese Zentralperspektive nennt man eine *gnomonische Abbildung*, bei der — vor allem in niederen Breiten — erhebliche Längenverzerrungen auftreten.

Einen *orthographischen Entwurf* erhält man, wenn O ins Unendliche rückt. Aus Abb. 95.3 oder für $d \to \infty$ aus Gleichung (95.1a) erhält man, wenn Zähler und Nenner noch durch d dividiert werden,

$$m = R \sin \delta. \qquad (95.5)$$

Diese drei normalen (oder polaren) azimutalen Entwürfe haben den Nachteil, daß sie nur für die Abbildung polnaher Gebiete geeignet sind. Für äquatornahe Gebiete sind transversale, für Gebiete in mittleren Breiten dagegen schiefachsige azimutale Entwürfe vorzuziehen.

Die allgemeine *Abbildungsgleichung für einen schiefachsigen Entwurf* ist wie folgt abzuleiten: Der Hauptpunkt H habe die Koordinaten φ_0, λ_0;

führt man für den Punkt $P(\varphi, \lambda)$, dessen Länge auf den Meridian von H bezogen werden soll, $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, die Polarkoordinaten a und δ ein, wobei a das von Nord über Ost positiv gezählte Azimut von P in H bedeutet (Abb. 95.4), so ergibt sich für den Bildpunkt P' von P zunächst

$$m = \frac{(R+d)\sin\delta}{R\cos\delta + d}.$$

Wählt man als x-Achse das Bild des Meridians von H und orientiert die y-Achse ausnahmsweise nach Osten — diese Anordnung entspricht dem allgemeinen geodätischen Koordinatensystem —, so ergeben sich die rechtwinkligen Koordinaten x und y von P' zu

$$x = \frac{(R+d)R\sin\delta\cos a}{R\cos\delta + d}, \qquad y = \frac{(R+d)R\sin\delta\sin a}{R\cos\delta + d}. \qquad (95.6)$$

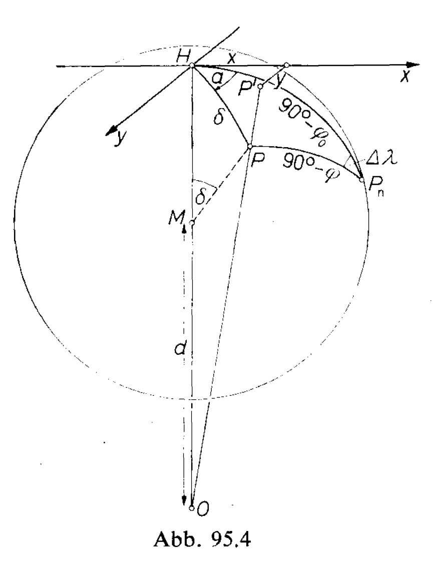


Abb. 95.4

Ein Vergleich zwischen (95.6) und (95.2) zeigt, daß die Form der Abbildungsgleichungen völlig unverändert bleibt, wenn für P statt der geographischen Koordinaten φ und λ die auf H bezogenen Polarkoordinaten a und δ benützt werden. —

Zwischen den polaren und geographischen Koordinaten von P bestehen die aus $\triangle P_n HP$ (Abb. 95.4) ablesbaren Beziehungen

$$\begin{aligned}\sin\delta\sin a &= \sin\Delta\lambda\cos\varphi,\\ \sin\delta\cos a &= \sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos\Delta\lambda,\\ \cos\delta &= \sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos\Delta\lambda,\end{aligned}$$

womit die Abbildungsgleichungen (95.6) die Form

$$\begin{aligned}x &= \frac{R(R+d)(\sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos\Delta\lambda)}{d + R(\sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos\Delta\lambda)},\\ y &= \frac{R(R+d)\sin\Delta\lambda\cos\varphi}{d + R(\sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos\Delta\lambda)}\end{aligned} \qquad (95.7)$$

annehmen.

Die Berechnung der Netzentwürfe gestaltet sich besonders einfach, wenn für die Schnittpunkte der geographischen Netzlinien in bezug auf den Hauptpunkt die Polar-

koordinaten a und δ vorgerechnet werden. E. HAMMER hat in seinem Werk: Die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen, Stuttgart 1889, für die Hauptpunktsbreiten $\varphi_0 = 0°, 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 50°, 55°, 60°, 75°$ und die Längenunterschiede $\Delta\lambda = 5°, 10°$ die Werte a und δ angegeben.

An Hand von (95.7) können nun auch die Abbildungsvorschriften für alle Sonderfälle der stereographischen, gnomonischen und orthographischen Projektion angegeben werden. Für die *transversale stereographische Projektion*, also für $\varphi_0 = 0°$ und $d = R$ wird daraus z. B.

$$x = -\frac{2R\cos\varphi\cos\Delta\lambda}{1+\cos\varphi\cos\Delta\lambda}, \quad y = \frac{2R\cos\varphi\sin\Delta\lambda}{1+\cos\varphi\cos\Delta\lambda}.$$

Schließlich sei noch kurz auf die Anwendungsmöglichkeit der drei echten azimutalen Entwürfe hingewiesen. Die stereographische Projektion ist wegen der schnell anwachsenden Flächenverzerrung am Kartenrand für geographische Karten nicht geeignet, dagegen ist sie wegen ihrer Winkel- und Kreistreue für Sternkarten sehr vorteilhaft. — Auch die gnomonische Projektion ist wegen der großen Verzerrungen am Kartenrand für geographische Karten nicht geeignet; ihr Vorteil liegt darin, daß alle Großkreise als Gerade abgebildet werden, weshalb sie mitunter für See- und Navigationskarten verwendet wird. In welcher Weise diese beiden azimutalen Entwürfe für die zeichnerische Lösung sphärischer Aufgaben benützt werden können, wird in [96] gezeigt. Weiter werden dort auch die Kreis- und Winkeltreue der stereographischen Projektion geometrisch anschaulich bewiesen. — Der orthographische Entwurf ist für geographische Karten ebenfalls ungeeignet; mitunter findet man ihn in transversaler Anordnung bei Mondkarten.

96. Zeichnerische Lösung sphärischer Aufgaben mit Hilfe der stereographischen und gnomonischen Projektion

In Ergänzung der Abschnitte [68] und [90] soll noch skizziert werden, wie die stereographische und die gnomonische Projektion für die Lösung sphärischer Aufgaben eingesetzt werden können. — Ist die Tangentialebene in P_n die Bildebene, P_s das Zentrum der Projektion (Abb. 96.1), so liegt eine *normale stereographische Projektion* vor. Man sieht ohne weiteres, daß die durch $\overline{P_nP_s}$ gehenden Großkreise als Geraden abgebildet werden, die zu $\overline{P_nP_s}$ senkrechten Kleinkreise als konzentrische Kreise, der Äquator als Kreis vom doppelten Kugelradius. Für den Radius des Parallelkreisbildes

der Poldistanz δ gilt nach (95.3)

$$\overline{P_nP''} = m = 2R\tan\frac{\delta}{2} \quad \text{bzw.} \quad m = 2R\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right),$$

woraus sich für $\varphi = 0°$ und $\varphi = 90°$ die Sonderwerte $m = 2R$ und $m = 0$ ergeben.

Die stereographische Projektion ist, wie schon erwähnt, *winkel-* und *kreistreu.* Beide Eigenschaften können geometrisch anschaulich nachgewiesen werden.

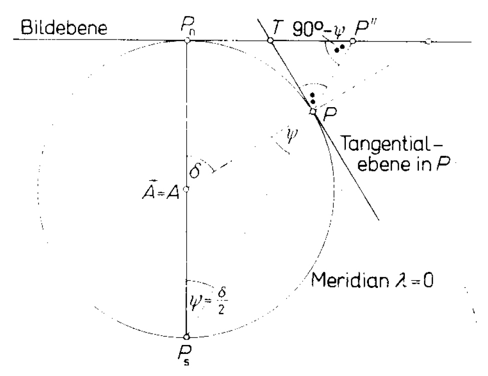


Abb. 96.1

Die Kartenentwurfslehre benützt für den Nachweis der Winkeltreue vorzugsweise die Differentialgeometrie, vgl. z. B. K. Wagner, a.a.O. S. 14 f.

Ist P'' das stereographische Bild des Punktes P ($\delta = 90° - \varphi$, $\lambda = 0$), so gilt, wenn $\overline{TP}$ die Spur der an P gelegten Tangentialebene ist, für $\triangle PP''T$ die Beziehung $\sphericalangle TP''P = \sphericalangle PPT = 90° - \psi$, d. h. $\triangle TPP''$ ist gleichschenklig mit $\overline{TP} = \overline{TP''}$. Legt man die Tangentialebene um die Schnittlinie mit der Bildebene (Spur T) um, so gelangt P nach P''. Betrachtet man nun zwei Großkreise, die durch die Punkte A und B gehen und sich in P unter dem Winkel α schneiden, so ist α der Winkel zwischen den Tangenten $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$, die in der Tangentialebene liegen und als die Geraden $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$ dargestellt werden können (Abb. 96.2); die Bilder A' und B' von A und B fallen mit diesen zusammen. Da $\overline{TP''} = \overline{TP}$ ist und beide Strecken senkrecht zur Schnittlinie zwischen Bild- und Tangentialebene stehen, ist $\triangle APB \cong \triangle AP''B$, d. h. $\sphericalangle APB = \sphericalangle AP''B = \alpha$, womit die *Winkeltreue* nachgewiesen ist.

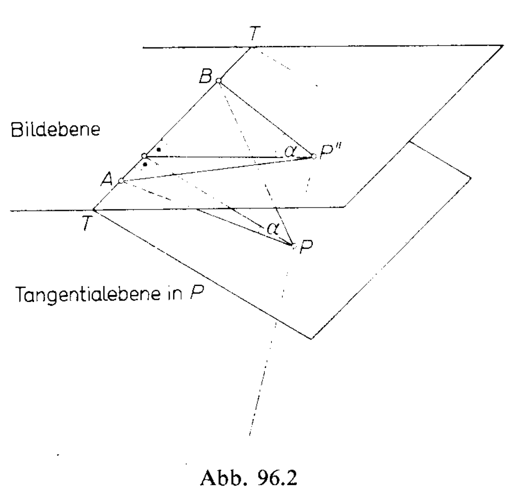


Abb. 96.2

Der Nachweis der *Kreistreue* läßt sich auf die soeben bewiesene Winkeltreue zurückführen: Betrachtet sei ein Kleinkreis K, den man sich wie jeden Kugelkreis als Schnitt einer Ebene mit einer Kugel enstanden denken kann. Wird die Kugel so um die Achse $\overline{P_nP_s}$ gedreht, daß diese Ebene senkrecht zur Zeichenebene steht, so kann sie durch die Geradenspur kk dargestellt werden (Abb. 96.3); der Kleinkreis bildet sich als die Strecke $\overline{K_1K_2}$ ab. Die Spitze U^* des Berührkegels des Kleinkreises K wird nach U'' abgebildet. Der Kreis K schneidet die Mantellinien dieses Kegels senkrecht. Wegen der Winkeltreue muß diese Eigenschaft auch in der Projektion erhalten bleiben. Da die stereographische Projektion (als Zentralperspektive) alle Raumgeraden wieder als Gerade abbildet, gehen die Mantellinien des Berührkegels in ein durch U'' laufendes Strahlenbüschel über. Das Bild des Kreises K muß dieses Geradenbüschel senkrecht schneiden, was nur möglich ist, wenn das Bild K'' von K ein Kreis um U'' ist. In Abb. 96.3 ist der vor der Zeichenebene liegende Teil der Bildebene nach oben geklappt, um das Bild K'' des Kreises und die Bilder der Mantellinien angeben zu können.

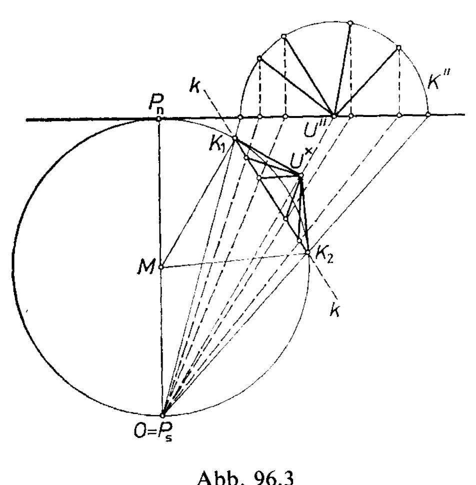


Abb. 96.3

Dabei ist zu beachten, daß U'' nicht das Bild des Mittelpunktes des Kreises K ist.

In ähnlicher Weise ist die Kreistreue für die Abbildung von Großkreisen nachzuweisen; allerdings ist dabei zu beachten, daß Großkreise keine Berührkegel, sondern Berührzylinder haben. Weil jeder Großkreis den Äquator in Gegenwinkeln schneidet und der Äquator in der stereographischen Projektion ähnlich abgebildet wird, schneidet auch das Bild eines jeden Großkreises das Äquatorbild in diametralen Punkten.

Übrigens kann, wie die Perspektive lehrt, statt der Bildebene im Gegenpunkt jede zu $\overline{P_nP_s}$ senkrechte, z. B. die durch den Kugelmittelpunkt gehende Ebene als Bildebene benützt werden. Der Übergang zu einer anderen Bildebene bedeutet, wie leicht einzusehen ist, nur eine Maßstabsänderung; die Eigenschaften der Winkel- und Kreistreue bleiben erhalten.

Mit den oben angegebenen Sätzen ist es möglich, sphärische Figuren in stereographischer Projektion zu konstruieren. Dabei wird es genügen, die Grundkonstruktionen und als Beispiel die Konstruktion eines sphärischen Dreiecks anzugeben.

An Literatur zur Anwendung der stereographischen Projektion für die Lösung sphärischer Dreiecksaufgaben sind zu nennen: W. LIETZMANN, a.a.O. S. 197 f.; W. SCHMID und W. BORSDORF, Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen, 2 Bände, Bergakademie Freiberg, Fernstudium, 1959, Bd. 2, S. 19 f.

Zunächst zu den Grundkonstruktionen. Dazu nochmals Abb. 96.1: A und $\bar{A}$ seien die Endpunkte des zur Zeichenebene senkrechten Durchmessers, also auf dem Äquator liegende Gegenpunkte. Von den durch A und $\bar{A}$ laufenden Großkreisen wird einer, der Äquator, als Kreis vom Durchmesser $\overline{A'\bar{A}'} = 4R$ um den Mittelpunkt $M = P_n'$ abgebildet (Abb. 96.4). Der dazu senkrechte, durch A, $\bar{A}$ und P_n gehende Großkreis hat alsBild die Gerade $\overline{A'\bar{A}'}$. — Das Bild des Äquators, der Kreis um M mit dem Radius $2R$, der durch die Punkte A' und $\bar{A}'$ geht, wird als der Grundkreis der Projektion, manchmal auch als Begrenzungskreis der Halbkugeln bezeichnet. Der letztere Name ist zweckmäßiger, denn in der Tat ist dieser Kreis eine Grenze: Die dem Projektionszentrum abgewandte Halbkugel wird innerhalb, die zugewandte Halbkugel wird außerhalb des Begrenzungskreises abgebildet.

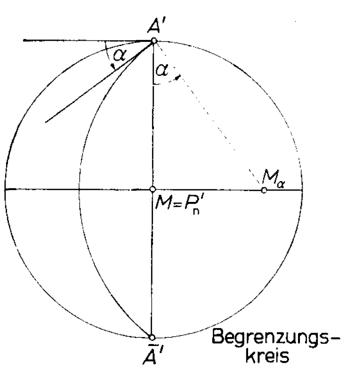


Abb. 96.4

Liegt eine sphärische Figur ganz innerhalb einer der beiden Halbkugeln, so wird man das Projektionszentrum so wählen, daß das Bild der Figur in das Innere des Begrenzungskreises fällt. Freilich kann auch der Fall eintreten, daß die Abbildung einer sphärischen Figur den Begrenzungskreis überschreitet.

Als erstes soll ein halber Großkreis abgebildet werden, der durch A und $\bar{A}$ geht, mit dem Äquator den Winkel α einschließt und im Innern des Begrenzungskreises abgebildet wird. Für die Konstruktion ist zu beachten, daß das Bild ein Kreis durch die Bildpunkte A' und $\bar{A}'$ sein muß (Kreistreue!), und daß dieser Kreis mit dem Äquatorbild den Winkel α einschließen muß (Winkeltreue!), d. h., die z. B. in A' an den Begrenzungskreis (als Bild des Äquators) und diesen Kreis gelegten Tangenten müssen den Winkel α einschließen. Damit kann der Mittelpunkt M dieses Kreises

konstruiert werden: M_α muß auf der Mittelsenkrechten von $A'\bar{A}'$ liegen, und die z. B. in A' gezeichneten Radien $A'M$ und $A'M_\alpha$ müssen ebenfalls den Winkel α einschließen (Abb. 96.4).

Als zweites soll die Aufgabe gelöst werden, die wahre Länge eines Bogens AB zu bestimmen, wenn die stereographischen Bilder A' und B' der Endpunkte gegeben sind. Dabei soll A auf dem Äquator liegen, so daß A' auf dem Begrenzungskreis erscheint, und B soll im Innern des Begrenzungskreises nach B' abgebildet werden (Abb. 96.5).

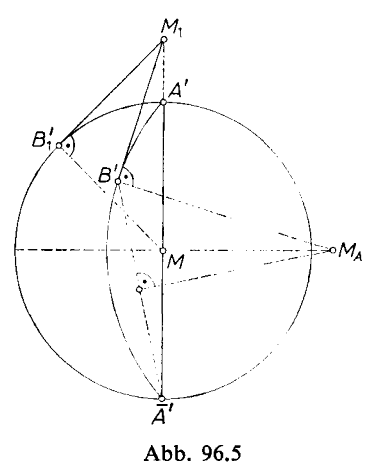


Abb. 96.5

Auf dem Äquator liegende Bögen werden auf dem Begrenzungskreis in wahrer (Winkel-) Größe abgebildet. Die Aufgabe ist also dadurch lösbar, daß man den Bogen AB in den Begrenzungskreis dreht. Gelangt B' dabei in die Lage B_1', so ist $A'B_1$ die wahre Länge des Bogens AB. Die Drehung läßt sich so vornehmen, daß man in B' die Tangente an den Kreis $A'B'\bar{A}'$ (bzw. die Senkrechte zum Radius) zeichnet, die die Verlängerung $\overline{A'\bar{A}'}$ in M_1 trifft. Legt man von M_1 aus die Tangente $\overline{M_1B_1'}$ an den Begrenzungskreis, so ist B_1' die Lage von B' nach der Drehung und $A'B_1'$ die gesuchte wahre Länge des Bogens AB.

Ist nur das Bild B' von B gegeben, so kann das Bild des halben, durch A, B und $\bar{A}$ führenden Großkreises bzw. der Mittelpunkt M_1 dieses Bildkreises, ähnlich der ersten Grundkonstruktion, bestimmt werden.

Jetzt kann auch das stereographische Bild A', B', C' eines sphärischen Dreiecks ABC gezeichnet bzw. das Bilddreieck benützt werden, um die fehlenden Stücke des sphärischen Dreiecks zu bestimmen. Hierzu ein Beispiel: Gegeben seien die Stücke c, α und β eines Dreiecks, gesucht der Winkel γ und die Seiten a und b. — Legt man die Punkte A und B auf den Äquator, so wird die Seite $c = AB$ auf dem Begrenzungskreis in wahrer Größe abgebildet, d. h. es ist $\sphericalangle A'MB' = c$ (Abb. 96.6). Liegt C auf der dem Projektionszentrum abgewandten Seite, so fällt das Bild C' von C in das Innere des Begrenzungskreises.

Für die Konstruktion von C' ist nach der ersten Grundkonstruktion zu verfahren: Die Seite AC gehört einem durch A und $\bar{A}$ laufenden Großkreis an, der mit dem Äquator den Winkel α einschließt; sein Bild ist ein Kreis um M_α durch A' und $\bar{A}'$. Entsprechend

ist der durch B und $\bar{B}$ führende Großkreis abzubilden (Kreis durch B' und $\bar{B}'$, Mittelpunkt M_β). C' ist der Schnitt dieser beiden Bildkreise.

Aus der stereographischen Projektion $A'B'C'$ von $\triangle ABC$ kann der Winkel γ in wahrer Größe als der Schnittwinkel der in C' an die Kreisbogen $C'B'$ und $C'A'$ gelegten Tangenten bzw. der von C' ausgehenden Radien $C'M_\alpha$ und $C'M_\beta$ entnommen werden (Abb. 96.6). Um die Seiten a und b des sphärischen Dreiecks ABC zu erhalten, ist nach der zweiten Grundkonstruktion zu verfahren (Abb. 96.6). Um b zu bestimmen, ist $A'C'$ um $\overline{A'\bar{A}'}$ in den Begrenzungskreis zu drehen (M_1, Tangente $\overline{M_1C_1'}$); damit ist $\sphericalangle A'MC_1' = b$. Entsprechend ist $B'C'$ um $\overline{B'\bar{B}'}$ in den Begrenzungskreis zu drehen (M_2, Tangente $\overline{M_2C_2'}$); dann ist $\sphericalangle B'MC_2' = a$.

Das Beispiel zeigt die konstruktive Lösung der Grundaufgabe 4, gegeben eine Seite und zwei anliegende Winkel (WSW). Aber auch die Lösung der übrigen fünf Grundaufgaben, die der Leser selbst versuchen mag, ist nach diesem Verfahren möglich.

Dazu noch einige Hinweise: Bei den Grundaufgaben 1, 3 und 5 ist mindestens eine Seite, die als $AB = c$ angenommen sei, gegeben; somit lassen sich die Bilder A' und B' auf dem Begrenzungskreis angeben. Es handelt sich also noch darum, den Bildpunkt C' von C zu konstruieren und mit dessen Hilfe die restlichen Stücke zu bestimmen. — Die Grundaufgaben 2 und 6 können mit Hilfe des Polardreiecks auf die Aufgaben 1 und 5 zurückgeführt werden.

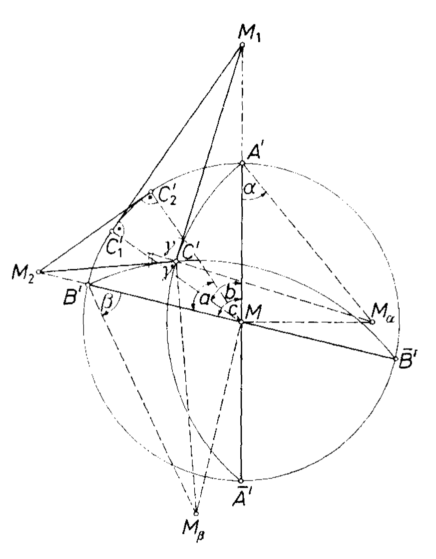


Abb. 96.6

Schließlich sei noch erwähnt, daß mit Hilfe der stereographischen Projektion eines sphärischen Dreiecks auch die beiden Kosinussätze und der Sinussatz abgeleitet werden können. Am einfachsten ist der *Seitenkosinussatz* zu gewinnen; er folgt unmittelbar aus Abb. 96.6, wenn man auf die Strecke $\overline{M_1M_2}$ zweimal den ebenen Kosinussatz anwendet. Es ist in

$$\triangle M_1M_2C': \quad \overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_1C'}^2 + \overline{M_2C'}^2 - 2\overline{M_1C'}\;\overline{M_2C'}\cos\gamma,$$

$$\triangle M_1M_2M: \quad \overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_1M}^2 + \overline{M_2M}^2 - 2\overline{M_1M}\;\overline{M_2M}\cos c.$$

Setzt man den Radius des Begrenzungskreises gleich der Einheit, dann ist

$$\overline{M_1C'} = \overline{M_1C_1'} = \tan b, \qquad \overline{M_2C'} = \overline{M_2C_2'} = \tan a,$$
$$\overline{M_1M} = 1/\cos b, \qquad \overline{M_2M} = 1/\cos a.$$

Setzt man die beiden ebenen Kosinussätze einander gleich und berücksichtigt diese Beziehungen, so entsteht die Gleichung

$$\tan^2 b + \tan^2 a - 2\tan a \tan b \cos\gamma = \frac{1}{\cos^2 b} + \frac{1}{\cos^2 a} - \frac{2\cos c}{\cos a \cos b}.$$

Ersetzt man hierin

$$\frac{1}{\cos^2 b} = 1 + \tan^2 b, \qquad \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a,$$

so wird daraus, wenn man noch durch 2 kürzt,

$$-2\tan a \tan b \cos\gamma = 1 - \frac{\cos c}{\cos a \cos b}.$$

Mit $\cos a \cos b$ multipliziert und geordnet ergibt sich der Seitenkosinussatz

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma.$$

Die Herleitung des *Winkelkosinussatzes*, die der Leser selbst versuchen mag, ist in ähnlicher Weise möglich; man hat auf die Strecke $\overline{M_\alpha M_\beta}$ zweimal den ebenen Kosinussatz anzuwenden, und zwar in den Dreiecken $M_\alpha C' M_\beta$ und $M_\alpha M M_\beta$, und erhält nach einiger Umformung den Winkelkosinussatz.

Weniger durchsichtig ist die Herleitung des *Sinussatzes*, wofür von C aus die Höhe h_c auf c zu errichten ist. Für die Ableitung, die der Leser ebenfalls selbst versuchen mag, wird folgender Hinweis helfen: Die Höhe h_c erscheint als ein zum Bogen AB senkrechter Kreis, in der Abbildung als eine zum Begrenzungskreis senkrechte Gerade, die diesen z. B. im Punkt B schneidet und überdies zur Geraden $\overline{M_1M_2}$ senkrecht steht.

An Literatur zu diesem Thema ist noch zu nennen: W. Lietzmann, a.a.O. S. 205; V. Vranic, Über die Ableitung der Formeln der sphärischen Trigonometrie mit Hilfe der stereographischen Projektion, Zeitschrift f. math. und naturwiss. Unterricht 59 (1928), S. 164 f.

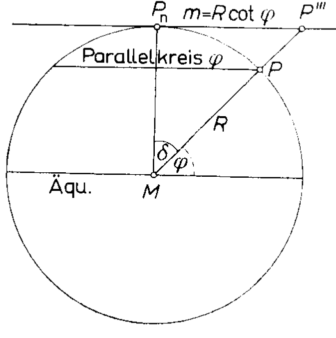


Abb. 96.7

Nun zur *gnomonischen Projektion.* Im Normalfall liegt das Projektionszentrum im Kugelmittelpunkt M (Abb. 96.7), während die Bildebene wiederum die Tangentialebene in einem der Pole ist. Die besondere Eigenart dieser Projektion liegt darin, daß alle G r o ß k r e i s e d e r K u g e l a l s G e r a d e abgebildet werden, die sich als die Schnitt-

geraden der Großkreisebenen mit der Bildebene erweisen. Die durch P_n laufenden Großkreise, die Meridiane, ergeben ein Strahlenbüschel durch P_n — nach [94] ist die gnomonische Projektion im Hauptpunkt winkeltreu —, die Parallelkreise eine Schar konzentrischer Kreise um P_n mit den Radien

$$\overline{P_n P'''} = m = R \tan \delta = R \cot \varphi.$$

Bei der in Abb. 96.7 gewählten Anordnung kann nur die dem Nordpol zugekehrte Halbkugel abgebildet werden.

Wie kann die gnomonische Projektion für die Lösung sphärischer Aufgaben eingesetzt werden? Dazu ein Beispiel: Gegeben seien die Stücke a, b und γ eines sphärischen Dreiecks; c, α und β sollen mit Hilfe einer gnomonischen Projektion konstruiert werden. Läßt man die Bildebene, auf die das Dreieck ABC von M aus zu projizieren ist, die Kugel in C berühren (Abb. 96.8), so wird γ in der Projektion in wahrer Größe abgebildet. Um die Bilder A''' und B''' der Ecken A und B des Dreiecks zu erhalten, die in der Projektion auf den Schenkeln des Winkels γ abzutragen sind, ist das $\triangle MB'''C$ um $\overline{CB'''}$ in die Bildebene umzuklappen (Abb. 96.9): In $\triangle MB'''C$ ist $\overline{CM} = R$

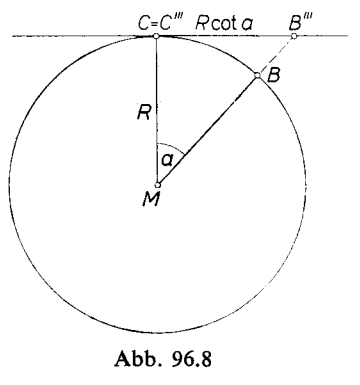


Abb. 96.8

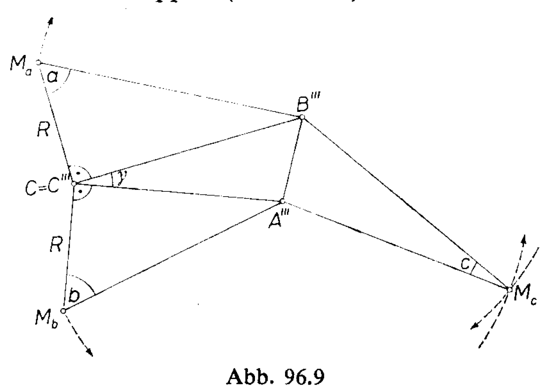


Abb. 96.9

und $\sphericalangle B'''MC = \sphericalangle BMC$ gleich der Seite a des sphärischen Dreiecks; damit kann B''' konstruiert werden. In gleicher Weise ist A''' zu bestimmen. Also ist $\triangle CA'''B'''$ die gnomonische Projektion des durch a, b und γ bestimmten sphärischen Dreiecks ABC.

Ist umgekehrt das $\triangle CA'''B'''$ als gnomonische Projektion des sphärischen Dreiecks ABC auf einer die Kugel im Punkt C berührenden Bildebene gegeben, so lassen sich daraus a, b und γ entnehmen. Die Konstruktion der Seite c des sphärischen Dreiecks ergibt sich aus folgender Überlegung: Das durch die Punkte M, C, A''' und B''' bestimmte räumliche Gebilde kann als dreiseitige Ecke mit dem Scheitel M und den Kanten $\overline{MC}$, $\overline{MA'''}$ und $\overline{MB'''}$ aufgefaßt werden; die Ecke wird durch die durch

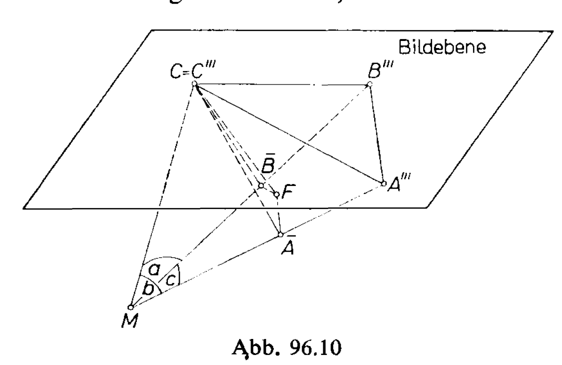


Abb. 96.10

C laufende Bildebene geschnitten, wobei die Winkel MCA''' und MCB''' Rechte sind (Abb. 96.10). Der Winkel $A'''MB'''$ zwischen den Kanten $\overline{MA'''}$ und $\overline{MB'''}$ ist gleich der gesuchten Seite c des sphärischen Dreiecks. Die Konstruktion von c kann also durch Umklappung in Abb. 96.9 erfolgen, wobei $\overline{A'''M_c} = \overline{A'''M} = \overline{A'''M_b}$ und $\overline{B'''M_c} = \overline{B'''M} = \overline{B'''M_a}$ ist.

Die körperliche Ecke $MCA'''B'''$ in Abb. 96.10 zeigt auch, wie die noch fehlenden Dreieckswinkel α und β konstruiert werden können: Fällt man von C das Lot $\overline{CF}$ auf die Seitenfläche $\overline{MA'''B'''}$ und legt durch $\overline{CF}$ eine Ebene $\perp$ zu $\overline{MA'''}$, die $\overline{MA'''}$ in $\bar{A}$ schneidet, so ist $\overline{C\bar{A}} \perp \overline{MA'''}$ und $\overline{F\bar{A}} \perp \overline{MA'''}$, also ist $\sphericalangle C\bar{A}F = \alpha$; legt man durch $\overline{CF}$ noch eine Ebene $\perp \overline{MB'''}$, die $\overline{MB'''}$ in $\bar{B}$ schneidet, so ist $\overline{C\bar{B}} \perp \overline{MB'''}$ und $\overline{F\bar{B}} \perp \overline{MB'''}$, also ist $\sphericalangle C\bar{B}F = \beta$. Somit ist es möglich, die Winkel α und β aus der Konstruktion für das Netz des Dreikants zu bestimmen; die Konstruktion von α und β, die keiner weiteren Erläuterung bedarf, ist in Abb. 96.11 ausgeführt. Grundsätzlich können damit die verschiedenen Dreiecksauf-

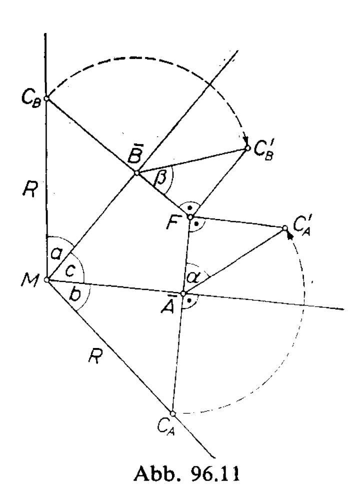


Abb. 96.11

gaben mit Hilfe der gnomonischen Projektion konstruktiv gelöst werden. Allerdings ist die hier gezeigte Lösung nicht ganz befriedigend, weil streng genommen zwei verschiedene Methoden benützt sind, nämlich die gnomonische Projektion und die Netzkonstruktion für das Dreikant. — Es läßt sich zeigen, daß die Dreieckskonstruktionen auch unmittelbar in der gnomonischen Projektion ausgeführt werden können.

Weitere Einzelheiten findet der interessierte Leser bei W. LIETZMANN, a.a.O. S. 209 f. und O. FRIESECKE, Die konstruktive Lösung der Grundaufgaben der sphärischen Trigonometrie mit Hilfe der gnomonischen Projektion, Zeitschrift f. math. und naturwiss. Unterricht, 63, 1932, S. 105 f.

Endlich sei noch erwähnt, daß die G r u n d f o r m e l n d e r s p h ä r i s c h e n T r i g o n o m e t r i e a u c h m i t H i l f e d e r g n o m o n i s c h e n P r o j e k t i o n gewonnen werden können. Aus Abb. 96.11 folgt unmittelbar der *Sinussatz*, wenn man beachtet, daß $\overline{FC'_B} = \overline{FC'_A}$ ist; also gilt

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\overline{FC'_A}:\overline{AC'_A}}{\overline{FC'_B}:\overline{BC'_B}} = \overline{BC'_B}/\overline{AC'_A} = \overline{BC_B}/\overline{AC_A} = \frac{R\sin a}{R\sin b} = \frac{\sin a}{\sin b}.$$

Aus Abb. 96.10 folgt noch der *Seitenkosinussatz*, wenn auf die Strecke $\overline{A'''B'''}$ zweimal der ebene Kosinussatz angewendet wird:

$$\triangle A'''B'''C:\ (\overline{A'''B'''})^2 = (\overline{B'''C})^2+(\overline{A'''C})^2-2\,\overline{B'''C}\ \overline{A'''C}\cos\gamma,$$

$$\triangle A'''B'''M:\ (\overline{A'''B'''})^2 = (\overline{B'''M})^2+(\overline{A'''M})^2-2\,\overline{B'''M}\ \overline{A'''M}\cos c.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke gleich und beachtet, daß

$$(\overline{B'''M})^2-(\overline{B'''C})^2 = R^2, \quad (\overline{A'''M})^2-(\overline{A'''C})^2 = R^2$$

ist, so wird

$$\overline{B'''M}\ \overline{A'''M}\cos c = R^2+\overline{B'''C}\ \overline{A'''C}\cos\gamma$$

oder

$$\cos c = \frac{R}{\overline{B'''M}}\ \frac{R}{\overline{A'''M}}+\frac{\overline{B'''C}}{\overline{B'''M}}\ \frac{\overline{A'''C}}{\overline{A'''M}}\cos\gamma$$

und schließlich

$$\cos c = \cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma.$$

97. Die normale und die transversale Mercatorprojektion

Als Beispiele für zylindrische Entwürfe werden zwei winkeltreue Abbildungen behandelt, die für die Nautik und die Geodäsie von besonderer Bedeutung sind. — Dafür ist zunächst die A b b i l d u n g s v o r-

schrift für einen Berührzylinder in normaler Lage anzugeben: Der Äquator wird als horizontale Gerade längentreu abgebildet und kann als Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems benützt werden. Die Meridianbilder sind gleichabständige, parallele Gerade, die senkrecht auf dem Äquator stehen. Als Kartenmittelpunkt kann jeder beliebige Äquatorpunkt dienen, doch ist es zweckmäßig, den Schnittpunkt zwischen dem Äquatorbild und dem Bild des Nullmeridians als Ursprung der Bildkoordinaten zu verwenden (Abb. 97.1a). Die

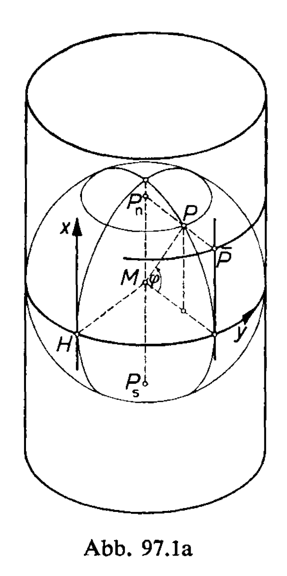


Abb. 97.1a

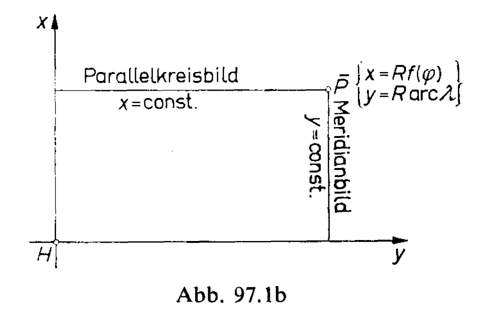


Abb. 97.1b

Bilder der Parallelkreise sind geradlinig und verlaufen parallel zum Äquator. Sämtliche Parallelkreise (auch der entartete für $\varphi = 90°$) haben die gleiche Länge wie der Äquator. Für die Abstände der Meridian- und Parallelkreisbilder zeigt die Abb. 97.1a, daß der Meridian in die zur x-Achse parallele Gerade $y = R \operatorname{arc} \lambda$ übergeht und der Parallelkreis φ sich als die zur y-Achse parallele Gerade $x = R \sin \varphi$ abbildet, wenn die Parallelkreisebenen mit dem Zylindermantel zum Schnitt gebracht werden. Allgemein gilt dafür $x = Rf(\varphi)$, wobei über $f(\varphi)$ entsprechend der an die Abbildung zu stellenden Forderung (Konvention) noch anders verfügt werden kann. Der Punkt $P(\varphi, \lambda)$ hat also den Bildpunkt $\bar{P}(x, y)$ mit den ebenen rechtwinkligen Koordinaten (Abb. 97.1b)

$$x = Rf(\varphi), \quad y = R \operatorname{arc} \lambda. \tag{97.1}$$

Nunmehr soll der *winkeltreue, normale Entwurf nach* Mercator[81] dargestellt werden. Die Abb. 97.2a zeigt ein differentielles Kugelviereck, dessen Seiten durch die Meridiane λ und $\lambda + d\lambda$ und die Parallelkreise

[81] Mercator, Gerhard Krämer, 1512–1594.

φ und $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ gebildet werden. Das Azimut der Diagonale PP' ergibt sich zu

$$\tan\alpha = \frac{R\cos\varphi\,\mathrm{d}\lambda}{R\,\mathrm{d}\varphi} = \frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\varphi}.$$

Soll die Abbildung winkeltreu sein, so muß der Winkel α auch in der Abbildung erhalten bleiben; sind $\bar{P}(x, y)$ und $\bar{P}'(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$ die

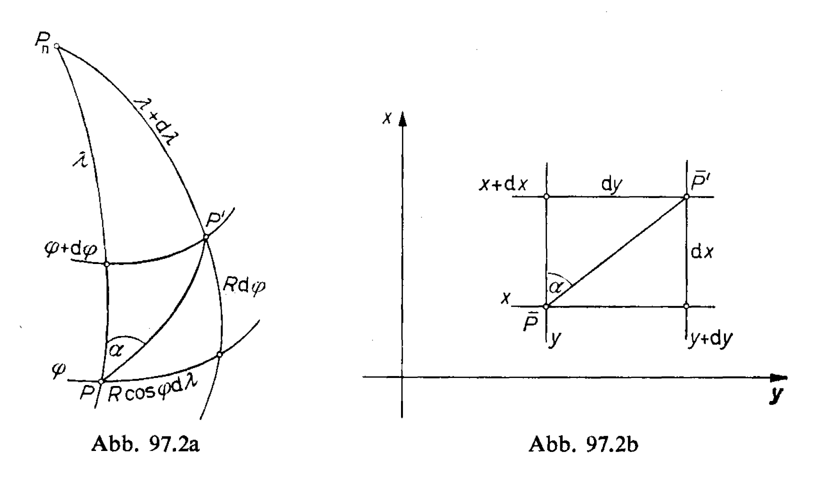


Abb. 97.2a Abb. 97.2b

Bildpunkte von $P(\varphi, \lambda)$ und $P'(\varphi+\mathrm{d}\varphi, \lambda+\mathrm{d}\lambda)$, so muß offenbar $\tan\alpha = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gelten (Abb. 97.2b). Nun ist aber $y = R \operatorname{arc}\lambda$, $\mathrm{d}y = R\,\mathrm{d}\lambda$ und $x = Rf(\varphi)$, $\mathrm{d}x = R\,\mathrm{d}f(\varphi)$; also wird

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{R\,\mathrm{d}\lambda}{R\,\mathrm{d}f(\varphi)},$$

d. h. die Funktion $f(\varphi)$ ist so zu bestimmen, daß

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{R\,\mathrm{d}\lambda}{R\,\mathrm{d}f(\varphi)} = \frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\varphi}$$

wird; die *Differentialgleichung des winkeltreuen normalen Zylinderentwurfs* lautet also

$$\mathrm{d}f(\varphi) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi}. \tag{97.2}$$

Die Integration liefert

$$f(\varphi) = \int \mathrm{d}f(\varphi) = \int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi} = \ln\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + C,$$

wobei sich die Additionskonstante C aus der Bedingung ergibt, daß der Äquator die y-Achse sein soll, also für $\varphi = 0$ auch $x = 0$ sein muß. Dies ist nur möglich für $C = 0$. Die *Abbildungsvorschrift der Mercatorprojektion* lautet also

$$y = R \operatorname{arc} \lambda, \quad x = R \ln \tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right). \tag{97.3}$$

Da es sich nicht mehr um eine echte, sondern eine konventionelle zylindrische Abbildung handelt, ist Projektion im Sinne von Projekt bzw. Entwurf zu verstehen. — Natürlich läßt sich (97.3) auch wieder mit Hilfe der Poldistanz $\delta = 90° - \varphi$ von P darstellen, dann wird $x = R \ln \cot(\delta/2)$.

Für geographische Karten ist die Mercatorprojektion wegen der rasch anwachsenden Längen- und Flächenverzerrung nicht geeignet; von großer Bedeutung ist sie jedoch für die Nautik und die Luftnavigation, weil sich die *Loxodrome als Gerade* abbildet.

Die Geradlinigkeit der Loxodrome folgt unmittelbar aus der Winkeltreue, kann aber auch analytisch bestätigt werden: Setzt man in der Gleichung der Loxodrome

$$\lambda - \lambda_1 = \tan\alpha \left[\ln \tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) - \ln \tan\left(45° + \frac{\varphi_1}{2}\right)\right]$$

entsprechend (97.3)

$$\lambda - \lambda_1 = \frac{y - y_1}{R}, \quad \left[\ln \tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) - \ln \tan\left(45° + \frac{\varphi_1}{2}\right)\right] = \frac{x - x_1}{R},$$

so wird

$$y - y_1 = \tan\alpha\,(x - x_1).$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden durch $P_1(x_1, y_1)$ mit dem Richtungswinkel α.

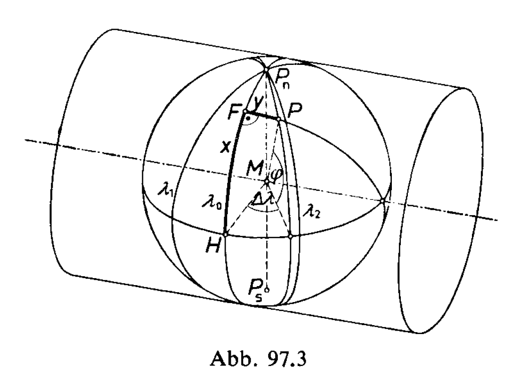


Abb. 97.3

Von besonderer Bedeutung ist noch der *transversale Mercatorentwurf*, bei dem der Zylinder die Kugel in einem Meridian berührt (Abb. 97.3). Die Aufgabe lautet, das von den Meridianen λ_1 und λ_2 begrenzte Kugelzweieck (Meridianstreifen) derart auf den Zylinder abzubilden, daß nach der Abwicklung eine winkeltreue Abbildung vorliegt. Wie lautet die Abbildungsvorschrift für den Punkt $P(\varphi, \Delta\lambda)$, dessen Länge $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ auf den Berührmeridian λ_0 bezogen ist? Am einfachsten wird die Ableitung, wenn man statt φ und $\Delta\lambda$ rechtwinklig sphärische Koordinaten (vgl. auch [100]) benützt: Legt man durch P den zum Berührmeri-

dian senkrechten Großkreis, so ist FP die Ordinate Y und der vom Schnitt mit dem Äquator gezählte Bogen HF die Abszisse X. Dann findet man die Abbildungsvorschrift durch Vergleich mit dem normalen Mercatorentwurf: Dreht man den Zylinder um 90°, so sieht man, daß X der geographischen Länge entspricht und Y die Rolle der geographischen Breite übernimmt, also gilt für den Bildpunkt $P'(x, y)$

$$x = R \operatorname{arc} X, \quad y = R \ln \tan \left(45° + \frac{Y}{2}\right), \tag{97.4}$$

wobei man für X und Y aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck FPP_n noch

$$\sin Y = \cos \varphi \sin \Delta\lambda, \quad \cot X = \cos \Delta\lambda \cot \varphi \tag{97.5}$$

findet. Dieser *transversale Mercatorentwurf*, vielfach als GAUSS*sche konforme Abbildung mit längentreuem Hauptmeridian* bezeichnet, ist eigentlich keine kartographische, sondern eine geodätische Abbildung. Sie wird vorzugsweise für die großmaßstäbliche Abbildung kleiner Teile der Erdoberfläche (Länder) verwendet, wobei nicht die ebene Abbildung der Meridiane und Parallelkreise, sondern die Berechnung ebener rechtwinkliger Koordinaten für die durch geographische Koordinaten festgelegten Kugelpunkte im Vordergrund steht.

Kapitel 18: Geodätische Aufgaben

98. Der Satz von LEGENDRE und die SOLDNERsche Additamentenmethode

Eine wichtige geodätische Aufgabe ist die Berechnung von Dreiecksnetzen aus beobachteten Winkeln und Strecken. Liegen in einem Netz überwiegend Winkel und nur wenige, aus Grundlinien abgeleitete Seiten vor, so spricht man von einer *Triangulation*; sind überwiegend Seiten gemessen worden, etwa mit Hilfe der modernen elektromagnetischen Entfernungsmeßverfahren, so sagt man, das Netz sei durch *Trilateration* bestimmt. — Die einzelnen Dreiecke dieser geodätischen Netze können, wenn eine kugelförmige Erdoberfläche angenommen wird, als sphärische Dreiecke berechnet werden. Indessen sind selbst die Seiten der größten Dreiecke sehr kleine Winkel — für eine Dreiecksseite von der Länge $S = 60$ km beträgt der zugehörige Zentriwinkel nur rund 0,5° —, so daß die Formeln der sphärischen Trigonometrie überhaupt nicht oder nur bei vielstelliger Rechnung zur gewünschten Genauigkeit führen. Es ist daher zweckmäßig, die strengen sphärischen Formeln durch Reihenentwicklungen so aufzubereiten, daß die Berechnung kleiner sphärischer Dreiecke auf die Auflösung ebener Dreiecke zurückgeführt werden kann.

Nachfolgend sollen zwei Verfahren dieser Art, das von LEGENDRE[82] und das von SOLDNER[83], dargestellt werden.

Nach LEGENDRE läßt sich ein kleines sphärisches Dreieck eben berechnen, wenn die Seiten im metrischen Maß eingeführt und die sphärischen Winkel je um ein Drittel des Exzesses vermindert werden. Ist also ABC ein sphärisches Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ, so entspricht diesem ein ebenes Dreieck $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mit den Seiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und den Winkeln

$$\alpha' = \alpha - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \beta' = \beta - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \gamma' = \gamma - \frac{\varepsilon}{3},$$

das nach den Sätzen der ebenen Trigonometrie berechnet werden kann (Abb. 98.1a, b).

---

[82] LEGENDRE, ADRIEN-MARIE (1752–1833).
[83] v. SOLDNER, JOHANN GEORG, (1776–1833).

Für den Beweis des Satzes von LEGENDRE ist prinzipiell jede Formel des sphärischen Dreiecks geeignet, die eine Beziehung zwischen den Seiten und einem oder zwei Winkeln angibt. Am nächsten liegt die Ableitung mit Hilfe des Halbwinkelsatzes, weil damit die Winkel sowohl des sphärischen als auch des ebenen Dreiecks durch die Seiten ausgedrückt und die Tangens der halben Winkel, $\tan(\alpha/2)$ und $\tan(\alpha'/2)$ usf., miteinander verglichen werden können.

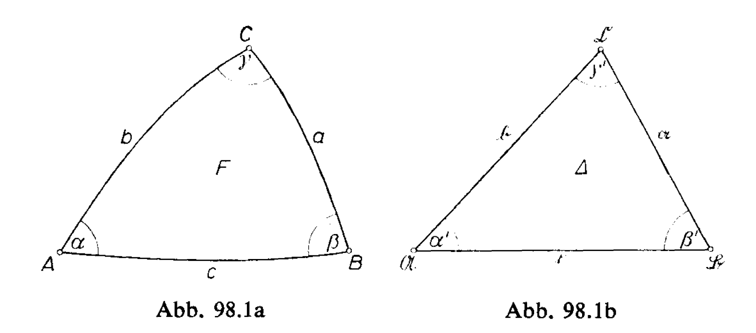


Abb. 98.1a Abb. 98.1b

Eine Ableitung mit Hilfe des Sinus- bzw. Seitenkosinussatzes findet sich bei M. KNEISSL, Mathematische Geodäsie (Landesvermessung), Handbuch der Vermessungskunde JORDAN/EGGERT/KNEISSL, 10. Aufl., J. B. Metzler'sche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1959, Bd. IV. 2. Hälfte, S. 686 f.

Bezeichnet man die Seitenlängen des Dreiecks (im metrischen Maß) mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, im Bogenmaß mit $\mathfrak{a}/R$, $\mathfrak{b}/R$ und $\mathfrak{c}/R$, (R ist der Kugelradius) im Winkelmaß mit a, b, c, wobei

$$a = \varrho \frac{\mathfrak{a}}{R}, \quad b = \varrho \frac{\mathfrak{b}}{R}, \quad c = \varrho \frac{\mathfrak{c}}{R},$$

so gelten für das sphärische bzw. für das nach LEGENDRE verebnete Dreieck die Halbwinkelsätze

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin s_b \sin s_c}{\sin s_a \sin s}, \quad \tan^2 \frac{\alpha'}{2} = \frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{b}\mathfrak{s}_\mathfrak{c}}{\mathfrak{s}_\mathfrak{a}\mathfrak{s}} \quad \text{usf.,} \tag{98.1a}$$

mit

$$s = \frac{a+b+c}{2}, \quad s_a = s-a, \quad s_b = s-b, \quad s_c = s-c$$

und (98.1b)

$$\mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{2}, \quad \mathfrak{s}_\mathfrak{a} = \mathfrak{s}-\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{s}_\mathfrak{b} = \mathfrak{s}-\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{s}_\mathfrak{c} = \mathfrak{s}-\mathfrak{c}.$$

Zwischen s, s_a, s_b, s_c und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$, $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$, $\mathfrak{s}_\mathfrak{c}$ gelten die Beziehungen

$$s = \varrho \frac{\mathfrak{s}}{R}, \quad s_a = \varrho \frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{a}}{R}, \quad s_b = \varrho \frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{b}}{R}, \quad s_c = \varrho \frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{c}}{R}. \tag{98.1c}$$

Da die Seiten a, b, c und somit auch s, s_a, s_b, s_c kleine Winkel sind, können die Sinusse von s, s_a, s_b, s_c in (98.1a) durch Reihenentwicklung in der Form

$$\begin{aligned} \sin s_a &= \frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{a}}{R} - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{a}}{R}\right)^3 \ldots, \quad & \sin s_b &= \frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{b}}{R} - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{b}}{R}\right)^3 \ldots, \\ \sin s_c &= \frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{c}}{R} - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{c}}{R}\right)^3 \ldots, \quad & \sin s &= \frac{\mathfrak{s}}{R} - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}}{R}\right)^3 \ldots, \end{aligned} \tag{98.1d}$$

dargestellt werden, wobei Größen der 5. Potenz vernachlässigt sind.

Ohne auf eine Genauigkeitsabschätzung einzugehen — dies ist Aufgabe der mathematischen Geodäsie —, sei erwähnt: Die Seitenlängen geodätischer Dreiecke sind nur selten größer als 50 km; das Verhältnis $\mathfrak{S}/R$ einer Seite $\mathfrak{S}$ zum Erdradius R ist daher meist kleiner als 1/100 und wird daher als kleine Größe erster Ordnung (G^1) bezeichnet. Entsprechend sind Glieder der Form $(\mathfrak{S}/R)^2$, $(\mathfrak{S}/R)^3$ usf. kleine Größen der zweiten und dritten Ordnung (G^2, G^3) usf. Setzt man (98.1a) in (98.1a) für $\tan^2(\alpha/2)$ ein, so wird daraus

$$\begin{aligned} \tan^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{\left[\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{b}}{R} - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{b}}{R}\right)^3\right]\left[\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{c}}{R} - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{c}}{R}\right)^3\right]}{\left[\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{a}}{R} - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{a}}{R}\right)^3\right]\left[\frac{\mathfrak{s}}{R} - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}}{R}\right)^3\right]} \\ &= \frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{b}\mathfrak{s}_\mathfrak{c}}{\mathfrak{s}_\mathfrak{a}\mathfrak{s}} \, \frac{\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{b}}{R}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{c}}{R}\right)^2\right]}{\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{a}}{R}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}}{R}\right)^2\right]}. \end{aligned} \tag{98.2a}$$

Der erste Faktor der rechten Seite ist nach (98.1a) gleich $\tan^2(\alpha'/2)$; setzt man noch, da $(1/6)(\mathfrak{s}_\mathfrak{a}/R)^2$ und $(1/6)(\mathfrak{s}/R)^2$ kleine Größen (G^2) sind,

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{a}}{R}\right)^2} = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{a}}{R}\right)^2, \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}}{R}\right)^2} = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}}{R}\right)^2,$$

so wird

$$\frac{\tan^2 \dfrac{\alpha}{2}}{\tan^2 \dfrac{\alpha'}{2}} = \left[1-\frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{b}}{R}\right)^2\right]\left[1-\frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{c}}{R}\right)^2\right]\left[1+\frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{a}}{R}\right)^2\right]\left[1+\frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{s}}{R}\right)^2\right]. \tag{98.2b}$$

Multipliziert man rechts aus und beachtet dabei, daß die Produkte $(1/6)(\mathfrak{s}_\mathfrak{b}/R)^2(1/6)(\mathfrak{s}_\mathfrak{c}/R)^2$ usf. als kleine Größen (G^4) vernachlässigt werden können, so erhält man genügend genau

$$\frac{\tan^2 \dfrac{\alpha}{2}}{\tan^2 \dfrac{\alpha'}{2}} = 1+\frac{1}{6R^2}\left(\mathfrak{s}_\mathfrak{a}^2+\mathfrak{s}^2-\mathfrak{s}_\mathfrak{b}^2-\mathfrak{s}_\mathfrak{c}^2\right) = 1+\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{3R^2}$$

oder

$$\frac{\tan \dfrac{\alpha}{2}}{\tan \dfrac{\alpha'}{2}} = \sqrt{1+\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{3R^2}} = 1+\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{6R^2}, \tag{98.2c}$$

weil auch $\mathfrak{b}\mathfrak{c}/3R^2$ eine kleine Größe (G^2) darstellt. Schreibt man die linke Seite in der Form $\{\sin(\alpha/2)\ \cos(\alpha'/2)\} : \{\cos(\alpha/2)\ \sin(\alpha'/2)\}$ und wendet nun die korrespondierende Addition und Subtraktion an,

$$\frac{\sin \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\alpha'}{2}}{\cos \dfrac{\alpha}{2} \sin \dfrac{\alpha'}{2}} \pm 1 = 1+\frac{1}{6R^2}\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \pm 1, \tag{98.2d}$$

so erhält man

$$\frac{\sin \dfrac{\alpha-\alpha'}{2}}{\sin \dfrac{\alpha+\alpha'}{2}} = \frac{\dfrac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{6R^2}}{2\left(1+\dfrac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{12R^2}\right)} = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{12R^2}. \tag{98.2e}$$

Da $(\alpha-\alpha')/2$ ein kleiner Winkel ist, kann man $\sin\{(\alpha-\alpha')/2\}$ durch $(\alpha-\alpha')/2$ und $\sin\{(\alpha+\alpha')/2\}$ durch $\sin\alpha$ ersetzen. Also wird, wenn man noch zum Gradmaß übergeht,

$$\alpha-\alpha' = \frac{\varrho}{6R^2}\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,\sin\alpha. \tag{98.2f}$$

Nun ist $(1/2)\mathfrak{bc}\sin\alpha$ näherungsweise gleich der Fläche Δ des verebneten Dreiecks $\mathfrak{ABC}$, also wird $\alpha-\alpha' = \varrho\Delta/3R^2$; in gleicher Weise läßt sich $\beta-\beta' = \varrho\Delta/3R^2$, $\gamma-\gamma' = \varrho\Delta/3R^2$ ableiten. Bildet man die Summe, so wird

$$\alpha+\beta+\gamma-(\alpha'+\beta'+\gamma') = \sigma-180^\circ = \varepsilon = \varrho\Delta/R^2. \tag{98.2g}$$

Daraus folgt endlich, daß

$$\alpha-\alpha' = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \beta-\beta' = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \gamma-\gamma' = \frac{\varepsilon}{3}, \tag{98.3}$$

womit der *Satz von* LEGENDRE bewiesen ist.

(98.2g) zeigt noch, daß ein kleines sphärisches Dreieck und das zugehörige, nach LEGENDRE verebnete Dreieck nahezu flächengleich sind.

Der Nachweis hierzu kann auch auf andere Weise geführt werden. Für die Fläche des sphärischen Dreiecks gilt $F = R^2\varepsilon$, wobei ε durch

$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}$$

und somit auch die Fläche F durch die Seiten ausgedrückt werden kann. Für die Fläche Δ des ebenen Dreiecks gilt

$$\Delta = \sqrt{\mathfrak{s}(\mathfrak{s}-\mathfrak{a})(\mathfrak{s}-\mathfrak{b})(\mathfrak{s}-\mathfrak{c})}.$$

Setzt man in der Gleichung für $\tan(\varepsilon/4)$ rechts $s/2 = \mathfrak{s}/2R$, $(s-a)/2 = (\mathfrak{s}-\mathfrak{a})/2R$ usf. und entwickelt in Reihe — auf der linken Seite kann ohne Genauigkeitsverlust $\tan(\varepsilon/4) = \varepsilon/4$ gesetzt werden, denn selbst für ein Dreieck mit den Seiten 70, 80 und 100 km erreicht der Exzess nur rund 14″ —, so gilt bis auf kleine Größen (G^4)

$$\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\frac{\mathfrak{s}}{2R}\,\frac{\mathfrak{s}-\mathfrak{a}}{2R}\,\frac{\mathfrak{s}-\mathfrak{b}}{2R}\,\frac{\mathfrak{s}-\mathfrak{c}}{2R}} = \frac{\Delta}{4R^2},$$

woraus $F = 4R^2\varepsilon/4 = \Delta$ folgt.

Im Gegensatz zur LEGENDREschen Methode werden bei der *Additamentenmethode von* SOLDNER die Seiten geändert und die Winkel unverändert beibehalten. Ausgehend vom Sinussatz $\sin\alpha/\sin\beta = \sin a/\sin b$ erhält man, wenn man die Sinus der Seiten in Reihe entwickelt,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\dfrac{\mathfrak{a}}{R}}{\sin\dfrac{\mathfrak{b}}{R}} = \frac{\dfrac{\mathfrak{a}}{R}-\dfrac{\mathfrak{a}^3}{6R^3}}{\dfrac{\mathfrak{b}}{R}-\dfrac{\mathfrak{b}^3}{6R^3}} = \frac{\mathfrak{a}-\dfrac{\mathfrak{a}^3}{6R^2}}{\mathfrak{b}-\dfrac{\mathfrak{b}^3}{6R^2}}.$$

Setzt man $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}-\mathfrak{a}^3/6R^2$, $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}-\mathfrak{b}^3/6R^2$, so kann man die Seite $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{a}$ nach der Formel

$$\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}'\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \tag{98.4a}$$

berechnen, wenn die Seite $\mathfrak{a}$ zunächst um das *Additament* $\mathfrak{a}^3/6R^2$ vermindert und das Ergebnis um das Additament $\mathfrak{b}^3/6R^2$ vermehrt wird. — Für die logarithmische Rechnung ergibt sich, wenn man allgemein

$$\mathfrak{s}' = \mathfrak{s} - \frac{\mathfrak{s}^3}{6R^2}, \quad \lg \mathfrak{s}' = \lg \mathfrak{s} - \frac{\text{Mod}\, \mathfrak{s}^2}{6R^2} = \lg \mathfrak{s} - A_{\mathfrak{s}} \tag{98.4b}$$

schreibt, wobei $A_{\mathfrak{s}}$ das *logarithmische Additament* bedeutet, für die Seite $\mathfrak{b}$

$$\lg \mathfrak{b} = \lg \mathfrak{a} - A_{\mathfrak{a}} + A_{\mathfrak{b}} + \lg \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \tag{98.4c}$$

Da sowohl der Satz von LEGENDRE als auch die SOLDNERsche Additamentenmethode durch Reihenentwicklung sphärischer Formeln entstehen, müßte sich zwischen beiden Verfahren ein Zusammenhang herstellen lassen. — Schreibt man den Sinussatz für das nach LEGENDRE verebnete Dreieck

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \sin\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\right) : \sin\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

in der Form

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\sin\alpha - \frac{\widehat{\varepsilon}}{3}\cos\alpha}{\sin\beta - \frac{\widehat{\varepsilon}}{3}\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\left(1 - \frac{\widehat{\varepsilon}}{3}\cot\alpha\right)}{\sin\beta\left(1 - \frac{\widehat{\varepsilon}}{3}\cot\beta\right)},$$

so lassen sich wegen $\varepsilon = \Delta/R^2$ die Glieder $(\widehat{\varepsilon}/3)\cot\alpha$ und $(\widehat{\varepsilon}/3)\cot\beta$ mit Hilfe ebener Beziehungen ausdrücken. Mit

$$2\mathfrak{b}\mathfrak{c}\cos\alpha = \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}\mathfrak{c}\sin\alpha = 2\Delta$$

wird

$$\cot\alpha = \frac{\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2}{4\Delta}, \quad \text{also} \quad \frac{\widehat{\varepsilon}}{3}\cot\alpha = \frac{\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2}{12R^2}.$$

Ebenso findet man

$$\frac{\widehat{\varepsilon}}{3}\cot\beta = \frac{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2 - \mathfrak{b}^2}{12R^2},$$

also wird

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \frac{\left(1 - \frac{\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2}{12R^2}\right)}{\left(1 - \frac{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2 - \mathfrak{b}^2}{12R^2}\right)}$$

oder

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \frac{1+\dfrac{\mathfrak{b}^2-\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2}{12R^2}}{1+\dfrac{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2}{12R^2}} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\left(1+\frac{2\mathfrak{b}^2-2\mathfrak{a}^2}{12R^2}\right).$$

Schreibt man dafür noch

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\left(1-\frac{\mathfrak{a}^2}{6R^2}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{b}^2}{6R^2}\right) = \frac{\mathfrak{a}\left(1-\dfrac{\mathfrak{a}^2}{6R^2}\right)}{\mathfrak{b}\left(1-\dfrac{\mathfrak{b}^2}{6R^2}\right)},$$

so ist der Zusammenhang zwischen beiden Verfahren gezeigt.

Die Ableitung stimmt mit der in JORDAN/EGGERT/KNEISSL, Bd. IV/2 a.a.O. S. 690 mitgeteilten überein.

Schließlich ist noch zu erwähnen, daß sich durch Fortsetzung der Reihenentwicklung ein *erweiterter* LEGENDRE*scher Satz* gewinnen läßt. Dabei erhält man zunächst einen genaueren Zusammenhang zwischen den Flächen des sphärischen und ebenen Dreiecks, nämlich

$$F = \Delta\left(1+\frac{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2}{R^2}\right) \tag{98.5}$$

und weiter noch ein verschärftes Formelsystem für die Verebnung der Winkel,

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha-\frac{\varepsilon}{3}-\frac{\varepsilon}{180}\,\frac{-2\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2}{R^2},\\ \beta' &= \beta-\frac{\varepsilon}{3}-\frac{\varepsilon}{180}\,\frac{\mathfrak{a}^2-2\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2}{R^2},\\ \gamma' &= \gamma-\frac{\varepsilon}{3}-\frac{\varepsilon}{180}\,\frac{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2-2\mathfrak{c}^2}{R^2}, \end{aligned} \tag{98.6}$$

das aber für geodätische Dreiecke ohne Bedeutung ist.

Die Formeln wurden erstmals 1818 von BUZENGEIGER angegeben. Später hat C. F. GAUSS in Art. 24 seiner Disquisitiones generales circa superficies curvas eine allgemeine Entwicklung für geodätische Dreiecke auf beliebigen Flächen angegeben.

99. Berechnung geodätischer Dreiecke und Vierecke nach LEGENDRE und SOLDNER

Mit Hilfe der beiden Verfahren lassen sich praktisch alle sphärischen Triangulierungsaufgaben auf ebene Berechnungen zurückführen.

Die mathematische Geodäsie lehrt, daß der Satz von LEGENDRE und die SOLDNERsche Additamentenmethode auch für ellipsoidische Berechnungen von Vorteil sind. Man hat dann das Ellipsoid an der betrachteten Stelle durch eine Kugel zu approximieren, deren Krümmung mit der des Ellipsoides gut übereinstimmt. Statt der volumgleichen Kugel benützt man dann entweder eine GAUSS*sche Schmiegungskugel* (Radius $R = \sqrt{M_0 N_0}$) oder eine SOLDNER*sche Bildkugel* (Radius $R = N_0$), wobei M_0 bzw. N_0 den Meridian- bzw. Normalkrümmungshalbmesser des Ellipsoids etwa für den Schwerpunkt des Dreiecks bedeuten.

Obgleich beide Verfahren gleich genau sind, wird man, wie leicht einzusehen ist, die LEGENDREsche Methode nur für die Berechnung einzelner Dreiecke oder Vierecke, bei kettenförmigen oder flächenhaften Dreiecksnetzen jedoch die Additamentenmethode anwenden. Hier noch einige Beispiele:

1. Für ein sphärisches Dreieck sind eine Seite und zwei Winkel, z. B. $\mathfrak{a}$, β, γ gegeben. Die übrigen Stücke sind nach LEGENDRE bzw. nach SOLDNER zu berechnen. — Zunächst ist der Exzess zu bestimmen, wobei man in $\varepsilon = \varrho F/R^2$ ohne Einbuße an Genauigkeit statt F die genäherte Fläche des ebenen Dreiecks

$$\Delta = \frac{\mathfrak{a}^2}{\cot\beta + \cot\gamma} = \frac{\mathfrak{a}^2 \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

setzen kann. Damit sind die verebneten Winkel bekannt,

$$\beta' = \beta - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \gamma' = \gamma - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \alpha' = 180° - (\beta' + \gamma'),$$

und die fehlenden Seiten ergeben sich nach LEGENDRE zu

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\frac{\sin\beta'}{\sin\alpha'}, \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{a}\frac{\sin\gamma'}{\sin\alpha'}.$$

Dazu ein Zahlenbeispiel. Gegeben seien die Stücke

$$\mathfrak{a} = 36\,259{,}12 \text{ m}, \quad \beta = 41°44'26{,}20'' \quad \text{und} \quad \gamma = 64°12'21{,}28'';$$

mit $\varepsilon = 2{,}08''$ und $\varepsilon/3 = 0{,}693''$ ergeben sich die verebneten Winkel zu

$$\beta' = 41°44'25{,}51'', \quad \gamma' = 64°12'20{,}59'', \quad \alpha' = 74°03'13{,}90''.$$

Für die Seiten ist folgende Rechnung anzusetzen:

lg $\mathfrak{b}$	4,399 7744 4	$\mathfrak{b}$ = 25 105,82 m;
lg sin β'	9,823 3156 8	
lg $\mathfrak{a}$	4,559 4172 6	
cpl lg sin α'	0,017 0415 0	
lg sin γ'	9,954 4172 6	
lg $\mathfrak{c}$	4,530 8760 2	$\mathfrak{c}$ = 33 952,83 m.

Für die Lösung nach der Additamentenmethode gilt nach (98.4)

$$\lg \mathfrak{b}' = \lg \mathfrak{a}' + \lg \sin \beta + E \lg \sin \alpha,$$

$$\lg \mathfrak{c}' = \lg \mathfrak{a}' + \lg \sin \gamma + E \lg \sin \alpha,$$

mit $\mathfrak{a}' = \lg \mathfrak{a} - A_\mathfrak{a}$ und $\alpha = 180° + \varepsilon - (\beta + \gamma)$. Mit den sphärischen Winkeln $\beta = 41°44'26{,}20''$, $\gamma = 64°12'21{,}28''$ und $\alpha = 74°03'14{,}59''$ ergeben sich die Seiten zu:

lg $\mathfrak{b}$	4,399 7744 3	
$A_\mathfrak{b}$	11,2	
lg $\mathfrak{b}'$	4,399 7733 1	Ausgangsseite
lg sin β	9,823 3173 1	lg $\mathfrak{a}$ = 4,559 4172 6
lg $\mathfrak{a}'$	4,559 4149 1	$-A_\mathfrak{a}$ = 23 5
cpl lg sin α	0,017 0410 9	
lg sin γ	9,954 4179 6	lg $\mathfrak{a}'$ = 4,559 4149 1
lg $\mathfrak{c}'$	4,530 8739 6	Additamente
$A_\mathfrak{c}$	20,6	$A_\mathfrak{a}$ = 23,5 E_7
lg $\mathfrak{c}$	4,530 8760 2	$A_\mathfrak{b}$ = 11,2 E_7 $A_\mathfrak{c}$ = 20,6 E_7

Die Additamente können aus Tafeln entnommen (z. B. W. GROSSMANN, Geodätische Rechnungen und Abbildungen, 2. Aufl. 1964, S. 239) oder in einfacher Weise gerechnet werden, wobei man als Rechenkontrolle

$$\lg \tan \frac{\mathfrak{a}}{R} - \lg \sin \frac{\mathfrak{a}}{R} = 3A_\mathfrak{a}$$

usf. bildet.

Aber auch mit Hilfe der in den meisten Logarithmentafeln gegebenen Hilfsgrößen S lassen sich die Additamente bequem bestimmen. Es gilt nämlich

$$A = \lg \frac{1}{\varrho''} - S.$$

Ist z. B. $\mathfrak{a} = 31506{,}88$ m, also $a = \varrho\mathfrak{a}/R = 17'00''$, so erhält man mit Hilfe einer achtstelligen Tafel (z. B. J. BAUSCHINGER und J. PETERS, 3. Aufl. 1958):

$$\begin{array}{rl} \lg \frac{1}{\varrho} = & 4{,}685\ 57487 \\ S = & 4{,}685\ 57312 \\ \hline A = & \qquad 17{,}5\ \mathrm{E}_7 \end{array}$$

2. Sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, z. B. $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, α, so rechnet man nach der LEGENDREschen Methode zunächst $\Delta = (1/2)\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \sin\alpha$ und $\varepsilon = \varrho\Delta/R^2$, womit $\alpha' = \alpha - \varepsilon/3$ bekannt ist. Weiter kennt man $\beta+\gamma = 180° + \varepsilon - \alpha$; für $\beta-\gamma$ gilt

$$\beta-\gamma = \left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \beta' - \gamma',$$

also findet man $\beta-\gamma$ unmittelbar aus der der MOLLWEIDEschen Formel des ebenen Dreiecks zu

$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \tan\frac{\beta'-\gamma'}{2} = \frac{(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})\cos\dfrac{\alpha'-\frac{\varepsilon}{3}}{2}}{(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\cos\dfrac{\alpha'-\frac{\varepsilon}{3}}{2}} = \frac{Z}{N}.$$

Damit sind β und γ, also auch β' und γ' bekannt. Die dritte Seite ergibt sich nach den MOLLWEIDEschen Formeln zu

$$\mathfrak{a} = \frac{Z}{\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{N}{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Für die Bestimmung der Winkel nach der Additamentenmethode ist wie folgt zu verfahren: Bekannt ist die Winkelsumme $\beta+\gamma = 180° + \varepsilon - \alpha$; da auch die Seiten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gegeben sind, läßt sich das Sinusverhältnis $\sin\beta : \sin\gamma = \mathfrak{b}' : \mathfrak{c}'$ angeben, so daß β und γ aus zwei goniometrischen Gleichungen bestimmt werden können. Führt man den Hilfswinkel λ ein,

$$\cot\lambda = \sin\beta : \sin\gamma = \mathfrak{b}' : \mathfrak{c}',$$

so wird nach leichter Umformung

$$\frac{\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{1-\tan\lambda}{1+\tan\lambda} \quad \text{oder} \quad \tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \tan\frac{\beta+\gamma}{2}\cot(\lambda+45°).$$

Damit sind $\beta+\gamma$ und $\beta-\gamma$, also auch β und γ bekannt. Die dritte Seite kann nach LEGENDRE oder nach der Additamentenmethode gerechnet werden.

3. Sind die drei Seiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gegeben, so erhält man die ebenen Winkel α', β', γ' mit Hilfe der ebenen Halbwinkelsätze. Um die sphärischen Winkel α, β, γ angeben zu können, wird noch der Exzess benötigt, der hier aus

$$\varepsilon = \varrho\,\Delta/R^2 \quad \text{mit} \quad \Delta = \sqrt{\mathfrak{s}(\mathfrak{s}-\mathfrak{a})(\mathfrak{s}-\mathfrak{b})(\mathfrak{s}-\mathfrak{c})}$$

zu rechnen ist.

4. Schließlich sei noch die *Lösung einer Vierecksaufgabe nach* LEGENDRE gezeigt. Zur Bestimmung des Punktes P durch *Rückwärtseinschneiden* aus den Festpunkten P_1, P_2, P_3 sind die Winkel α und β gemessen worden (Abb. 99.1). Gesucht sind die Entfernungen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$. Sind die Seiten der Vierecksfigur wieder klein gegen den Erdradius[84], dann ist folgende Lösung möglich: Für die Bestimmung der Exzesse ε_1 und ε_2 der Teildreiecke PP_2P_1 und PP_3P_2 werden die Hilfswinkel φ und ψ benötigt, für die zunächst Näherungswerte φ_0 und ψ_0 zu bestimmen sind. Die Gleichungen hierfür lauten, wenn mit den sphärischen Winkeln α und β eben gerechnet wird,

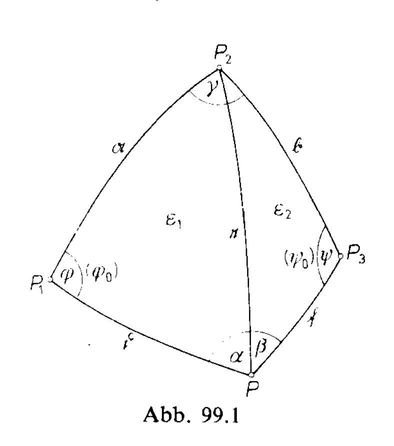


Abb. 99.1

$$\varphi_0+\psi_0 = 360°-(\alpha+\beta+\gamma),$$
$$\frac{\sin\varphi_0}{\sin\psi_0} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}},$$

die in bekannter Weise aufzulösen sind. Damit erhält man die Flächen und Exzesse der Teildreiecke mit genügender Genauigkeit zu

$$\Delta_1 = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\sin\varphi_0}{2} = \frac{\mathfrak{a}^2\sin(\alpha+\varphi_0)}{\sin\alpha}\sin\varphi_0, \qquad \varepsilon_1 = \varrho°\frac{\Delta_1}{R^2},$$

$$\Delta_2 = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{f}\sin\psi_0}{2} = \frac{\mathfrak{b}^2\sin(\beta+\psi_0)}{\sin\beta}\sin\psi_0, \qquad \varepsilon_2 = \varrho°\frac{\Delta_2}{R^2}.$$

[84] Dementsprechend sind in Abb. 99.1 die Entfernungen mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ bezeichnet.

Offenbar ist die Aufgabe jetzt auf eine ebene Vierecksberechnung zurückgeführt. Mit $\alpha' = \alpha - \varepsilon_1/3$, $\beta' = \beta - \varepsilon_2/3$, $\gamma' = \gamma - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/3$ lassen sich für die ebenen Hilfswinkel φ' und ψ' die strengen Beziehungen

$$\varphi' + \psi' = 360° - (\alpha' + \beta' + \gamma'), \quad \frac{\sin \varphi'}{\sin \psi'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$$

angeben, und die gesuchten Seiten werden schließlich

$$\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{a} \sin (\varphi' + \alpha')}{\sin \alpha'}, \quad \mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{a} \sin \varphi'}{\sin \alpha'} = \frac{\mathfrak{b} \sin \psi'}{\sin \beta'}, \quad \mathfrak{f} = \frac{\sin (\psi' + \beta')}{\sin \beta'}.$$

Sind die Koordinaten der Festpunkte P_1, P_2, P_3 bekannt, so läßt sich nunmehr auch P koordinieren (vgl. [101] und [102]).

100. Geodätische Koordinatensysteme auf der Kugel

Als erstes Beispiel für sphärische Koordinaten wurde in [88] das System der geographischen Koordinaten definiert. Daneben verwendet man, insbesondere für Landesvermessungszwecke, noch ein *System einander rechtwinklig schneidender Linearkoordinaten* im metrischen Maß, die oft auch als *geodätische Parallelkoordinaten* bezeichnet werden. Der Vorteil dieser sphärischen Linearkoordinaten besteht darin, daß sie beinahe ebenso einfach wie ebene Koordinaten berechnet werden können.

Ein weiterer Vorteil dieser Linearkoordinaten ist, daß sie gegen Krümmungsunterschiede zwischen Kugel und Ellipsoid weitgehend unempfindlich sind, wogegen die geographischen Koordinaten die Krümmungsunterschiede zwischen Kugel und Ellipsoid in vollem Maße widerspiegeln. Das ist der Grund, daß für Landesvermessungszwecke sphärische geographische Koordinaten kaum verwendet werden. Für die Aufgaben der Erdmessung und Kartographie freilich kann man auf (ellipsoidische) geographische Koordinaten nicht verzichten.

Für die Anlage eines solchen Systems wählt man nach SOLDNER einen durch die Mitte des Vermessungsgebietes führenden Meridian als Abszissenachse; um einen Punkt P festzulegen, legt man durch P einen zur Abszissenachse senkrechten Großkreis, den sogenannten Ordinatenkreis. Dann ist FP die (ostwärts positiv gezählte) Ordinate y, der von einem geeigneten Ursprung P_0 aus gezählte Bogen P_0F die (nach Norden positiv gezählte) Abszisse x von P. — Wie leicht einzusehen ist, schneiden sich alle Ordinatenkreise in zwei auf dem Äquator liegenden Gegenpunkten (Abb. 100.1).

Die geodätischen Linearkoordinaten unterscheiden sich von den geographischen Koordinaten einmal durch die Maßeinheit (Bogenlängen statt

Winkel) und durch die Lage der Netzlinien: An die Stelle des Äquators ist eine Abszissenachse getreten, die Ordinatenkreise x = const. entsprechen den Meridianen und die zur Abszissenachse parallelen Kleinkreise y = const. übernehmen die Rolle der Parallelkreise. — Eine Beziehung zwischen den beiden Systemen erhält man durch die Meridiankonvergenz γ; das ist der Winkel, den der Meridian und die geodätische Parallele y = const. im Punkt $P(x, y)$ miteinander einschließen.

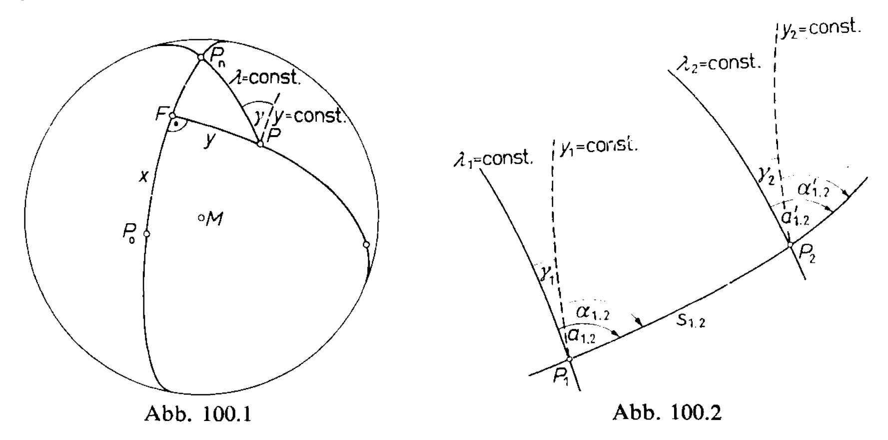


Abb. 100.1 Abb. 100.2

Schließlich arbeitet die Geodäsie noch mit einem *System sphärischer Polarkoordinaten:* Ein Punkt P_2 z. B. läßt sich von einem Punkt P_1 aus durch die Länge des Bogens $P_1P_2 = s_{1.2}$ und den Winkel festlegen, den der Bogen P_1P_2 mit einer Anfangsrichtung bildet. Auf den Meridian von P_1 (λ_1 = const.) bezogen ist der Winkel das Azimut $a_{1.2}$, dagegen auf die geodätische Parallele bezogen der Richtungswinkel $\alpha_{1.2}$ (Abb. 100.2). Zwischen Azimut und Richtungswinkel besteht die fundamentale Beziehung

$$a_{1.2} = \alpha_{1.2} + \gamma_1. \tag{100.1}$$

Dem Bogen P_1P_2 entsprechen zwei weitere Paare von Winkeln, gemessen im Endpunkt P_2, nämlich das Azimut $a'_{1.2}$ und das Gegenazimut $a_{2.1} = a'_{1.2} + 180°$ sowie der Richtungswinkel $\alpha'_{1.2}$ und der Gegenrichtungswinkel $\alpha_{2.1} = \alpha'_{1.2} + 180°$.

101. Geographische Koordinaten und Polarkoordinaten auf der Kugel

vor die beiden geodätischen Hauptaufgaben, die Berechnung ographischer Koordinaten aus Polarkoordinaten und umgekehrt, behandelt werden können, sind zu-

nächst einige geometrische Beziehungen aufzuzeigen. Das Dreieck $P_1P_2P_n$, gebildet durch den Pol P_n und die Punkte P_1 und P_2 (Abb. 101.1), kann durch den zum Meridian von P_1 senkrechten Großkreis FP_2 in die Teildreiecke P_1P_2F und FP_2P_n zerlegt werden. Die Exzesse der Teildreiecke seien mit ε und ε', der Exzess des Vierecks $Q_1Q_2P_1P_2$, wobei Q_1 und Q_2 die Schnittpunkte der durch P_1 und P_2 laufenden Meridiane mit dem Äquator sind, mit ε_0 bezeichnet. Trägt man in P_2 noch die geodätische Parallele p und die Meridiankonvergenz γ ein, so findet man für $\triangle FP_2P_n$ die Winkelsumme

$$90°+\Delta\lambda_{1.2}+(90°-\gamma) = 180°+\varepsilon' \text{ oder}$$

$$\gamma = \Delta\lambda_{1.2}-\varepsilon'. \qquad (101.1\text{a})$$

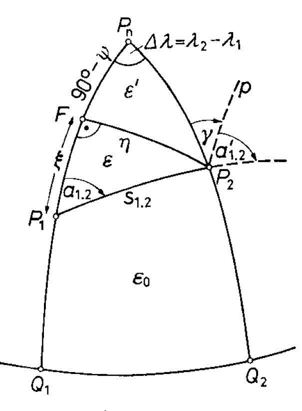


Abb. 101.1

Für $\triangle Q_1Q_2P_n$ gilt

$$90°+90°+\Delta\lambda_{1.2} = 180°+\varepsilon'+\varepsilon+\varepsilon_0$$

$$\text{oder } \Delta\lambda_{1.2} = \varepsilon'+\varepsilon+\varepsilon_0$$

und mit (101.1a)

$$\gamma = \varepsilon_0+\varepsilon. \qquad (101.1\text{b})$$

Die *Meridiankonvergenz* γ ist also gleich dem Exzess des Vierecks $Q_1Q_2P_2F$. Auch die *Azimutänderung* $\Delta a_{1.2} = a'_{1.2}-a_{1.2}$ läßt sich geometrisch deuten; aus der Winkelsumme von $\triangle P_1P_2P_n$,

$$180°+\varepsilon'+\varepsilon = a_{1.2}+180°-a'_{1.2}+\Delta\lambda_{1.2},$$

folgt

$$\Delta a_{1.2} = \Delta\lambda_{1.2}-\varepsilon'-\varepsilon = \gamma-\varepsilon = \varepsilon_0. \qquad (101.1\text{c})$$

Die *Azimutänderung* ist also gleich dem Exzess des Viereckes $Q_1Q_2P_2P_1$.

Nun zur *ersten geodätischen Hauptaufgabe.* Hat man die Seite $P_1P_2 = s_{1.2}$ durch Triangulieren oder mittels eines modernen Verfahrens der elektromagnetischen Entfernungsmessung bestimmt und sind in P_1 die geographischen Koordinaten φ_1, λ_1 sowie das Azimut $a_{1.2}$ aus astronomischen Beobachtungen abgeleitet worden (vgl. [113]), so lassen sich mit Hilfe der polaren Koordinaten $a_{1.2}$ und $s_{1.2}$ die geographischen Koordinaten φ_2, λ_2 von P_2 bestimmen. Eine erste Lösung dieser Aufgabe durch Berechnung des Polardreiecks wurde in [90] angegeben. Wesentlich übersichtlicher und einfacher werden die Formeln, wenn man die beiden bei F rechtwinkligen Dreiecke P_1P_2F und P_2P_nF nach der NEPERschen Regel behandelt. Mit den auf P_1 bezogenen, im Gradmaß ausgedrückten rechtwinkligen Koordinaten ξ und η von P_2 — die auf P_1 bezogenen Linearkoordinaten von P_2 lauten also $x = R\xi/\varrho$ und $y = R\eta/\varrho$ —, der Breite ψ des Fußpunktes F und der im Gradmaß ausgedrückten Entfernung $\sigma =$

$= \varrho s_{1.2}/R$ erhält man folgendes Formelsystem: Für die *Fußpunktsbreite* ψ findet man aus $\triangle P_1 P_2 F$:

$$\cos a_{1.2} = \cot(90° - \xi) \cot \sigma, \quad \tan \xi = \tan \sigma \cos a_{1.2}, \quad \xi = \ldots,$$

also

$$\psi = \varphi_1 + \xi. \tag{101.2a}$$

Mit den Bezeichnungen $\Delta\lambda_{1.2} = \Delta\lambda$, $\Delta a_{1.2} = \Delta a$, $\Delta\varphi_{1.2} = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$ folgt aus $\triangle P_1 P_2 F$ für den *Längenunterschied* $\Delta\lambda$:

$$\cos(90° - \eta) = \sin \sigma \sin a_{1.2}, \quad \sin \eta = \sin \sigma \sin a_{1.2}; \quad \eta = \ldots;$$

ist η bekannt, so gibt $\triangle P_n F P_2$ noch $\cos \psi = \cot \Delta\lambda \cot(90° - \eta)$, oder

$$\tan \Delta\lambda = \tan \eta \sec \psi; \quad \Delta\lambda = \ldots \text{ und } \lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda. \tag{101.2b}$$

Die *Meridiankonvergenz* γ ergibt sich aus $\triangle F P_2 P_n$ zu

$$\cos(90° - \eta) = \cot \psi \cot(90° - \gamma), \quad \tan \gamma = \sin \eta \tan \psi. \tag{101.2c}$$

Für die *Endpunktsbreite* φ_2 gibt $\triangle P_n F P_2$ zunächst:

$$\cos \Delta\lambda = \cot \psi \cot(90° - \varphi_2).$$

Umgeformt wird daraus

$$\left(1 - 2\sin^2 \frac{\Delta\lambda}{2}\right) \sin \psi \cos \varphi_2 = \sin \varphi_2 \cos \psi,$$

$$\sin \psi \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \psi = 2 \sin^2 \frac{\Delta\lambda}{2} \sin \psi \cos \varphi_2,$$

oder

$$\sin(\psi - \varphi_2) = 2 \sin \psi \cos \varphi_2 \sin^2 \frac{\Delta\lambda}{2}.$$

Drückt man $\cos \varphi_2$ noch durch bekannte Größen aus ($\triangle P_n F P_2$),

$$\cos \psi = \sin(90° - \varphi_2) \sin(90° - \gamma) = \cos \varphi_2 \cos \gamma,$$

so erhält man mit der aus $\cos(90° - \gamma) = \sin \gamma = \sin \Delta\lambda \sin \psi$ folgenden Identität

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \psi \sin \Delta\lambda} = 1 \qquad \text{noch}$$

$$\cos \varphi_2 = \cos \psi \sec \gamma \frac{\sin \gamma}{\sin \psi \sin \Delta\lambda} = \frac{\tan \gamma \cot \psi}{\sin \Delta\lambda},$$

und schließlich

$$\sin(\psi - \varphi_2) = \frac{2 \sin \psi \tan \gamma \cot \psi}{\sin \Delta\lambda} \sin^2 \frac{\Delta\lambda}{2} = \tan \gamma \cos \psi \tan \frac{\Delta\lambda}{2},$$

$$\psi = \ldots, \quad \varphi_2 = \psi - (\psi - \varphi_2) = \ldots \tag{101.2d}$$

Die *Azimutänderung* kann, wie in [90] gezeigt wurde, mit Hilfe der NEPERschen Gleichungen unmittelbar aus $\triangle P_1P_2P_n$ gerechnet werden. Bequemer ist der folgende Weg: Nach (101.1c) gilt $\Delta a = \gamma - \varepsilon$; da γ schon bekannt ist, braucht man nur noch ε zu rechnen. Aus $\triangle P_1P_2F$ folgt dafür

$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \tan\frac{\eta}{2}\tan\frac{\xi}{2},$$

also wird schließlich

$$a'_{1.2} = a_{1.2}+\Delta a = a_{1.2}+\gamma-\varepsilon; \quad a_{2.1} = a'_{1.2}+180^\circ. \quad (101.2e)$$

In ähnlicher Weise ist die *zweite geodätische Hauptaufgabe*, die Berechnung der Polarkoordinaten $a_{1.2}$ und $s_{1.2}$ aus den geographischen Koordinaten der Endpunkte $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ und $P_2\,(\varphi_2, \lambda_2)$ zu lösen. Hier die Rechenformeln:

Meridiankonvergenz ($\triangle FP_2P_n$):

$$\cos(90^\circ-\varphi_2) = \cot\Delta\lambda\cot(90^\circ-\gamma), \quad \tan\gamma = \sin\varphi_2\tan\Delta\lambda, \quad \gamma = \ldots \quad (101.3a)$$

Weiter findet man aus $\triangle FP_2P_n$:

$$\sin\eta = \sin\Delta\lambda\cos\varphi_2, \quad \eta = \ldots \quad (101.3b)$$

Fußpunktsbreite ($\triangle FP_2P_n$):

$$\cos\Delta\lambda = \cot\psi\cot(90^\circ-\varphi_2);$$

umgeformt wird daraus

$$\left(1-2\sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}\right)\sin\psi\cos\varphi_2 = \sin\varphi_2\cos\psi$$

oder

$$\sin(\psi-\varphi_2) = 2\sin\psi\cos\varphi_2\sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}.$$

Drückt man $\sin\psi$ noch durch bekannte Stücke aus ($\triangle FP_2P_n$),

$$\cos(90^\circ-\gamma) = \sin\psi\sin\Delta\lambda, \ \sin\psi = \sin\gamma/\sin\Delta\lambda,$$

so wird daraus

$$\sin(\psi-\varphi_2) = \sin\gamma\cos\varphi_2\frac{2\sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}}{\sin\Delta\lambda}$$

oder

$$\sin(\psi-\varphi_2) = \sin\gamma\cos\varphi_2\tan\frac{\Delta\lambda}{2}$$

und

$$\psi = \varphi_2+(\psi-\varphi_2) = \psi; \quad \xi = \psi-\varphi_1. \quad (101.3c)$$

Azimut ($\triangle P_1P_2F$):

$$\cos(90°-\xi) = \cot a_{1.2} \cot(90°-\eta), \quad \tan a_{1.2} = \frac{\tan\eta}{\sin\xi},$$

$$a_{1.2} = \ldots \tag{101.3d}$$

Seitenlänge $s_{1.2}$ ($\triangle P_1P_2F$):

$$\cos(90°-\eta) = \sin a_{1.2} \sin\sigma,$$

$$\sin\sigma = \frac{\sin\eta}{\sin a_{1.2}}, \quad \sigma = \ldots \tag{101.3e}$$ oder

$$\cos a_{1.2} = \cot(90°-\xi)\cot\sigma,$$

$$\tan\sigma = \frac{\tan\xi}{\cos a_{1.2}}, \quad \sigma = \ldots, \quad s_{1.2} = R\frac{\sigma}{\varrho}. \tag{101.3f}$$

Exzess ($\triangle P_1P_2F$):

$$\sin\varepsilon = \tan\frac{\sigma}{2}\sin a_{1.2}\sin\xi; \quad \varepsilon = \ldots. \tag{101.3g}$$

Azimutänderung und Gegenazimut:

$$\Delta a_{1.2} = \gamma-\varepsilon, \quad a'_{1.2} = a_{1.2}+\Delta a_{1.2}, \quad a_{2.1} = a_{1.2}+\gamma-\varepsilon+180°. \tag{101.3h}$$

Damit liegen für die erste und zweite geodätische Hauptaufgabe strenge Formeln vor. Statt weiterer strenger Formeln[85] soll für die erste Hauptaufgabe noch eine Lösung mittels Reihenentwicklung angegeben werden. Dabei werden der Breitenunterschied $\Delta\varphi$, der Längenunterschied $\Delta\lambda$ und der Azimutunterschied Δa nach Potenzen von $s_{1.2}$ (bzw. σ) entwickelt. Da nur das Prinzip gezeigt, keinesfalls aber Gebrauchsformeln abgeleitet werden sollen, genügt es, die Reihenentwicklung bis zu Gliedern von σ^5 einschließlich vorzunehmen.

Der *Breitenunterschied* $\Delta\varphi$ kann aus dem Seitenkosinussatz

$$\sin\varphi_2 = \sin\varphi_1\cos\sigma+\cos\varphi_1\sin\sigma\cos a_{1.2}$$

bestimmt werden. Setzt man links $\varphi_2 = \varphi_1+\Delta\varphi$ und entwickelt $\sin(\varphi_1+\Delta\varphi)$ nach dem Satz von TAYLOR[86], so erhält man bis auf Glieder G^4

$$\sin\varphi_2 = \sin\varphi_1+\Delta\varphi\cos\varphi_1-\frac{1}{2}\Delta\varphi^2\sin\varphi_1-\frac{1}{6}\Delta\varphi^3\cos\varphi_1+G^4.$$

---

[85] Nicht weniger als fünf Formelsysteme, darunter die *Mittelbreitenformeln*, hat C. F. GAUSS in seinen Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie (1. Abh., Art. 16) angegeben (vgl. dazu auch JORDAN/EGGERT/KNEISSL, a.a.O. Bd. IV, 2, S. 749 f.)

[86] Der TAYLOR*sche Satz* lautet bekanntlich:

$$f(x+h) = f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\ldots$$

Entwickelt man rechts $\sin\sigma$ und $\cos\sigma$ in Reihe, so wird

$$\sin\varphi_1+\Delta\varphi\cos\varphi_1-\frac{1}{2}\Delta\varphi^2\sin\varphi_1-\frac{1}{6}\Delta\varphi^3\cos\varphi_1+G^4=$$

$$=\sin\varphi_1\left(1-\frac{\sigma^2}{2}+G^4\right)+\cos\varphi_1\cos a_{1.2}\left(\sigma-\frac{1}{6}\sigma^3+G^5\right)$$

oder, nach $\Delta\varphi$ aufgelöst und nach Potenzen von σ geordnet,

$$\Delta\varphi=\sigma\cos a_{1.2}-\frac{1}{2}\sigma^2\tan\varphi_1-\frac{\sigma^3}{6}\cos a_{1.2}+\frac{1}{2}\Delta\varphi^2\tan\varphi_1+\frac{1}{6}\Delta\varphi^3+G^4.$$

Daraus ergibt sich in

erster Näherung $\Delta\varphi=\sigma\cos a_{1.2}+G^2$,

zweiter Näherung $\Delta\varphi=\sigma\cos a_{1.2}-\frac{1}{2}\sigma^2\sin^2 a_{1.2}\tan\varphi_1+G^3$,

dritter Näherung

$$\Delta\varphi=\sigma\cos a_{1.2}-\frac{1}{2}\sigma^2\tan\varphi_1\sin^2 a_{1.2}$$

$$-\frac{1}{6}\sigma^3\cos a_{1.2}\sin^2 a_{1.2}(1+3\tan^2\varphi_1)+G^4.$$

Also wird der Breitenunterschied $\Delta\varphi$ im Gradmaß, wenn noch mit ϱ multipliziert wird,

$$\Delta\varphi=\varrho\cos a_{1.2}\left[1-\frac{1}{2}(\sigma\cos a_{1.2})\tan\varphi_1\tan^2 a_{1.2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6}(\sigma\cos a_{1.2})^2\tan^2 a_{1.2}(1+3\tan^2\varphi_1)\right]+\varrho G^4. \tag{101.4a}$$

Für den *Längenunterschied* $\Delta\lambda$ benützt man den Kotangenssatz:

$$\cot\sigma\sin(90°-\varphi_1)=\cos a_{1.2}\sin\varphi_1+\sin a_{1.2}\cot\Delta\lambda,$$

der nach $\Delta\lambda$ aufzulösen ist:

$$\tan\Delta\lambda=\frac{\sin a_{1.2}}{\cos\varphi_1\cot\sigma-\sin\varphi_1\cos a_{1.2}}=\frac{\sin a_{1.2}\tan\sigma}{\cos\varphi_1(1-\tan\varphi_1\cos a_{1.2}\tan\sigma)}.$$

Entwickelt man die rechte Seite nach dem Binomialsatz,

$$\tan\Delta\lambda=\frac{\sin a_{1.2}}{\cos\varphi_1}\tan\sigma(1+\tan\varphi_1\cos a_{1.2}\tan\sigma$$

$$+\tan^2\varphi_1\cos^2 a_{1.2}\tan^2\sigma+G^3),$$

und stellt man die Funktionen der kleinen Winkel $\Delta\lambda$ und σ durch Reihen dar, so wird

$$\Delta\lambda+\frac{\Delta\lambda^3}{3}+G^5 =$$

$$\frac{\sin a_{1.2}}{\cos\varphi_1}\left(\sigma+\frac{\sigma^3}{3}+G^5\right)[1+\tan\varphi_1\cos a_{1.2}(\sigma+G^3)+ \tan^2\varphi_1\cos^2 a_{1.2}\,\sigma^2+G^3];$$

nach $\Delta\lambda$ aufgelöst und nach σ geordnet wird daraus

$$\Delta\lambda = \frac{\sin a_{1.2}}{\cos\varphi_1}\left[\sigma+\sigma^2\tan\varphi_1\cos a_{1.2}+\frac{\sigma^3}{3} +\sigma^3\tan^2\varphi_1\cos^2 a_{1.2}+G^4\right]-\frac{\Delta\lambda^3}{3}.$$

Setzt man für das rechts stehende Korrektionsglied $\Delta\lambda^3/3$ die Näherung $\Delta\lambda = \sigma\sin a_{1.2}/\cos\varphi_1+G^2$ ein, so wird $\Delta\lambda$ im Gradmaß

$$\Delta\lambda = \varrho\sigma\frac{\sin a_{1.2}}{\cos\varphi_1}\left\{1+\sigma\tan\varphi_1\cos a_{1.2}+\frac{1}{3}\sigma^2[(1+3\tan^2\varphi_1)\cos^2 a_{1.2} -\sin^2 a_{1.2}\tan^2\varphi_1]\right\}+\varrho G^4\ldots \qquad (101.4b)$$

Die *Azimutänderung* Δa folgt aus der Kotangensformel

$$\cot(90°-\varphi_1)\sin\sigma = \cos a_{1.2}\cos\sigma+\sin a_{1.2}\cot(180°-a'_{1.2})$$

oder

$$\cot a'_{1.2} = -\frac{\tan\varphi_1\sin\sigma}{\sin a_{1.2}}+\cot a_{1.2}\cos\sigma.$$

Entwickelt man $\sin\sigma$ und $\cos\sigma$ in Reihe, so wird

$$\cot a'_{1.2} = \cot a_{1.2}\left(1-\frac{\sigma^2}{2}+G^4\right)-\left(\sigma-\frac{\sigma^3}{6}+G^5\right)\frac{\tan\varphi_1}{\sin a_{1.2}}$$

oder

$$\cot a'_{1.2}-\cot a_{1.2} = -\frac{\sigma\tan\varphi_1}{\sin a_{1.2}}-\frac{\sigma^2}{2}\cot a_{1.2}+\frac{1}{6}\,\frac{\sigma^3\tan\varphi_1}{\sin a_{1.2}}+G^4. \qquad (I)$$

Wird die linke Seite mittels $a'_{1.2} = a_{1.2}+\Delta a$ in der Form $\cot(a_{1.2}+\Delta a)$ $-\cot a_{1.2}$ geschrieben und $\cot(a_{1.2}+\Delta a)$ nach TAYLOR entwickelt,

$$\cot(a_{1.2}+\Delta a) = \cot a_{1.2}-\frac{\Delta a}{\sin^2 a_{1.2}}+\frac{\Delta a^2\cos a_{1.2}}{\sin^3 a_{1.2}} -\frac{\Delta a^3}{3}\,\frac{\sin^2 a_{1.2}+3\cos^2 a_{1.2}}{\sin^4 a_{1.2}},$$

so zeigt sich, daß die linke Seite von (I) in die Form

$$\cot a'_{1.2} - \cot a_{1.2} = \frac{-\Delta a}{\sin^2 a_{1.2}} + \frac{\Delta a^2 \cos a_{1.2}}{\sin^3 a_{1.2}} - \frac{1}{3}\,\Delta a^3 \frac{\sin^2 a_{1.2} + 3\cos^2 a_{1.2}}{\sin^4 a_{1.2}}$$

gebracht werden kann. Wird (I) noch mit $-\sin a_{1.2}$ multipliziert, so ergibt sich:

$$\frac{\Delta a}{\sin a_{1.2}} - \frac{\Delta a^2 \cos a_{1.2}}{\sin^2 a_{1.2}} + \frac{1}{3}\,\Delta a^3 \frac{\sin^2 a_{1.2} + 3\cos^2 a_{1.2}}{\sin^3 a_{1.2}} =$$

$$= \sigma \tan \varphi_1 + \frac{1}{2}\,\sigma^2 \cos a_{1.2} - \frac{1}{6}\,\sigma^3 \tan \varphi_1 + G^4.$$

Die schrittweise Auflösung und Zusammenfassung gibt schließlich, wenn man noch auf Gradmaß übergeht,

$$\Delta a = \varrho \sin a_{1.2} \tan \varphi_1 \Big\{ 1 + \frac{1}{2}\,\sigma \cos a_{1.2} (\cot \varphi_1 + 2 \tan \varphi_1) + \frac{1}{6}\,\sigma^2 [5 + 6 \tan^2 \varphi_1 - (6 + 8 \tan^2 \varphi_1) \sin^2 a_{1.2}] \Big\} + G^4. \qquad (101.4c)$$

Weitere Näherungsformeln durch Reihenentwicklungen, auch für die Umkehrung, lassen sich aus den Differentialformeln des Poldreiecks $P_1 P_2 P_n$

$$d\varphi = d\sigma \cos a, \qquad d\lambda = d\sigma \sin a / \cos \varphi, \qquad da = d\sigma \sin a \tan \varphi$$

durch Anwendung des MACLAURINschen Satzes (LEGENDREsche Reihen) und durch Entwicklung der GAUSSschen Mittelbreitenformel ableiten. Durch Mitnahme des Gliedes σ^5 werden die Näherungen den strengen Formeln hinsichtlich Genauigkeit gleichwertig. Eine ausführliche Darstellung findet sich in JORDAN/EGGERT/KNEISSL, a.a.O., Bd. IV/2, S. 753 f.

Statt weiterer Formeln und Ableitungen soll ein Zahlenbeispiel für die Lösung der ersten Hauptaufgabe nach den strengen Formeln (101.2) diesen Abschnitt beschließen:
Beispiel:[87)]

Gegeben: $P_1 : \varphi_1 = 48°\ 12'\ 04{,}362''$, $\lambda_1 = 9°\ 07'\ 12{,}784''$;
$s_{1.2} = 31\,284{,}27$ m, $a_{1.2} = 36°\ 14'\ 21{,}45''$.

Gesucht: $P_2 : \varphi_2, \lambda_2, a_{2.1}$;

[87)] Hinweis: Im vorliegenden Beispiel sind für den Übergang von kleinen Winkeln α auf lg sin α, lg tan α und umgekehrt die Hilfsgrößen S und T benützt.

a) $\sigma = \frac{s_{1.2}}{R} \varrho''$;

lg ϱ''	5,31 442 513
lg $s_{1.2}$	4,49 532 603
cpl lg R	3,19 577 733
lg σ	3,00 552 849

$\sigma = 1012{,}8112'' = 0°\,16'\,52{,}811_2''$.

b) $\tan \xi = \tan \sigma \cos a_{1.2}$;

lg tan σ	7,69 110 685
lg cos $a_{1.2}$	9,90 663 404
lg tan ξ	7,59 774 089
cpl. T	5,31 442 286
lg ξ''	2,91 216 375

$\xi'' = 816{,}890'' = 0°\,13'\,36{,}890''$

c) Fußpunktbreite: $\psi = \varphi_1 + \xi$;

$\varphi_1 = 48°\,12'\,04{,}362$
$\xi = \,13\;\;36{,}890$

$\psi = 48°\,25'\,41{,}252'$

d) $\sin \eta = \sin \sigma \sin a_{1.2}$;

lg sin σ	7,69 110 161
lg sin $a_{1.2}$	9,77 170 424
lg sin η	7,46 280 585
cpl. S	5,31 442 574
lg η''	2,77 723 159

$\eta'' = 598{,}731'' = 0°\,09'\,58{,}731''$

e) Längenunterschied: $\tan \Delta\lambda = \tan \eta \sec \psi$;

lg tan η	7,46 280 768
lg sec ψ	0,17 812 042
lg tan $\Delta\lambda$	7,64 092 810
cpl T	5,31 442 236
lg $\Delta\lambda''$	2,95 535 046

$\Delta\lambda = 902{,}299'' = 0°\,15'\,02{,}299''$

$\lambda_1 = 9°\,07'\,12{,}784''$
$+\Delta\lambda = \,15'\,02{,}299''$

$\lambda_2 = 9°\,22'\,15{,}083''$

f) Meridiankonvergenz: $\tan\gamma = \sin\eta \tan\psi$

lg sin η	7,46 280 585
lg tan ψ	0,05 209 396
lg tan γ	7,51 489 981
cpl. T	5,31 442 358
lg γ''	2,82 932 339

$\gamma = 675{,}030' = 0°\,11'\,15{,}030''$

g) Endpunktsbreite: $\sin(\psi-\varphi_2) = \tan\gamma \cos\psi \tan\frac{\Delta\lambda}{2}$

lg tan γ	7,51 489 981
lg cos ψ	9,82 187 958
lg tan $\frac{\Delta\lambda}{2}$	7,33 989 652
lg sin $(\psi-\varphi_2)$	4,67 667 591
cpl. S	5,31 442 513
lg $(\psi-\varphi_2)''$	9,99 110 104

$$\begin{aligned} \psi-\varphi_2 &= 0{,}980'' \\ \psi &= 48°\,25'\,41{,}252'' \\ -(\psi-\varphi_2) &= -0{,}980'' \\ \hline \varphi_2 &= 48°\,25'\,40{,}272'' \end{aligned}$$

h) Azimutänderung: $\Delta a = \gamma - \varepsilon$, $\tan\frac{\varepsilon}{2} = \tan\frac{\eta}{2}\tan\frac{\xi}{2}$

lg tan $\frac{\eta}{2}$	7,16 177 765
lg tan $\frac{\xi}{2}$	7,29 670 901
lg tan $\frac{\varepsilon}{2}$	4,45 848 666
cpl. T	5,31 442 513
lg $\frac{\varepsilon''}{2}$	9,77 291 179

$\frac{\varepsilon}{2} = 0{,}593'' \qquad \varepsilon = 1{,}186''$

$$\begin{aligned} \gamma &= 0°\,11'\,15{,}030'' \\ -\varepsilon &= -1{,}186'' \\ \hline \Delta a &= 0°\,11'\,13{,}844'' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_{1.2} &= 36°\,14'\,21{,}45'' \\ +\Delta a &= 11'\,13{,}84'' \\ \hline a'_{1.2} &= 36°\,25'\,35{,}29'' \end{aligned} \qquad a_{2.1} = 216°\,25'\,35{,}29''$$

102. Geodätische Linearkoordinaten auf der Kugel

Im folgenden werden noch die von SOLDNER angegebenen Formeln für die Übertragung geodätischer Linearkoordinaten mit Hilfe der Polarkoordinaten $\alpha_{1.2}$ und $s_{1.2}$ sowie die Umkehrung der Aufgabe in den Grundzügen dargestellt. Gegeben seien $P_1(x_1, y_1)$, die *Länge* $s_{1.2}$ und der *sphärische Richtungswinkel* $\alpha_{1.2}$ des Bogens P_1P_2 (Abb. 102.1); dabei gilt zwischen dem Richtungswinkel $\alpha_{1.2}$ und dem Azimut $a_{1.2}$ die Beziehung $\alpha_{1.2} = a_{1.2} - \gamma$ [vergl. (100.1)]. Zu bestimmen sind die Koordinaten x_2 und y_2 von P_2 sowie der Gegenrichtungswinkel $\alpha_{2.1}$, also der Richtungswinkel des Bogens $P_2 P_1$ in P_2. Die Lösung ist wieder mit Hilfe der sphärischen

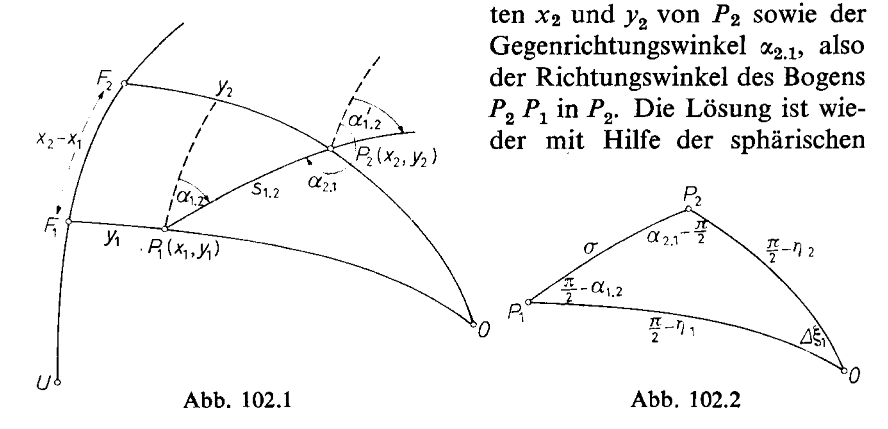


Abb. 102.1 Abb. 102.2

Trigonometrie möglich. Dabei ist es zweckmäßig, die im Längenmaß zu rechnenden Koordinaten und Koordinatenunterschiede im Bogenmaß einzuführen, also

$$\Delta\xi = \frac{x_2 - x_1}{R} = \frac{\Delta x}{R}, \quad \eta_1 = \frac{y_1}{R}, \quad \eta_2 = \frac{y_2}{R}, \quad \sigma = \frac{s_{1.2}}{R}, \tag{102.1}$$

wobei $\Delta\xi$, η_1, η_2 und σ wieder kleine Größen von der ersten Ordnung sind. Führt man auch die Winkel im Bogenmaß ein, so ergibt sich die *Ordinate* η_2 von P_2 aus $\triangle P_1OP_2$ (Abb. 102.2) nach dem Seitenkosinussatz zu

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \eta_2\right) = \cos\sigma \cos\left(\frac{\pi}{2} - \eta_1\right) + \sin\sigma \sin\left(\frac{\pi}{2} - \eta_1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{1.2}\right)$$

oder $\quad \sin\eta_2 = \cos\sigma \sin\eta_1 + \sin\sigma \cos\eta_1 \sin\alpha_{1.2}$.

Entwickelt man die Funktionen der kleinen Winkel η_2, η_1, σ in Reihe[88])

[88]) Eine Entwicklung bis auf G^5 hat M. NÄBAUER besorgt (vgl. JORDAN/EGGERT/KNEISSL, a.a.O. Bd. IV/2, S. 708 f.).

— da wieder nur das Prinzip interessiert, genügt eine Entwicklung bis einschließlich G^3 —, so wird

$$\eta_2 - \frac{\eta_2^3}{6} = \left(1-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\eta_1 - \frac{\eta_1^3}{6}\right) + \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6}\right)\left(1-\frac{\eta_1^2}{2}\right) \sin \alpha_{1.2} + G^4$$

oder

$$\eta_2 = \eta_1\left(1-\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\eta_1^2}{6}\right) + \sigma \sin \alpha_{1.2}\left(1-\frac{\sigma^2}{6}-\frac{\eta_1^2}{2}\right) + \frac{\eta_2^3}{6} + G^4.$$

Mit $\eta_2 = \eta_1 + \sigma \sin \alpha_{1.2}$, also

$$\frac{\eta_2^3}{6} = \frac{\eta_1^3}{6} + \frac{\eta_1^2 \sigma \sin \alpha_{1.2}}{2} + \frac{\eta_1 \sigma^2 \sin^2 \alpha_{1.2}}{2} + \frac{\sigma^3 \sin^3 \alpha_{1.2}}{6},$$

wird daraus, wenn man noch ordnet und zusammenfaßt,

$$\begin{aligned}\eta_2 &= \eta_1 + \sigma \sin \alpha_{1.2} - \frac{3\eta_1\sigma^2 - 3\eta_1\sigma^2 \sin^2 \alpha_{1.2} + \sigma^3 \sin \alpha_{1.2} - \sigma^3 \sin^3 \alpha_{1.2}}{6} + G^4 \\ &= \eta_1 + \sigma \sin \alpha_{1.2} - \frac{\eta_1 \sigma^2 \cos^2 \sigma_{1.2}}{2} - \frac{\sigma^3 \sin \alpha_{1.2} \cos^2 \alpha_{1.2}}{6} + G^4,\end{aligned}$$

woraus sich mit $\sigma \cos \alpha_{1.2} = u'$, $\sigma \sin \alpha_{1.2} = v'$ die *Ordinatenformel* ergibt:

$$\eta_2 = \eta_1 + v' - \frac{\eta_1 u'^2}{2} - \frac{u'^2 v'}{6} + G^4. \tag{102.2a}$$

Die *Abszissenformel* folgt aus dem sphärischen Sinussatz zu

$$\frac{\sin \Delta\xi}{\sin \sigma} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{1.2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \eta_2\right)} \quad \text{oder} \quad \sin \Delta\xi = \sin \sigma \sec \eta_2 \cos \alpha_{1.2}.$$

Die Reihenentwicklung für die kleinen Winkel gibt

$$\Delta\xi - \frac{\Delta\xi^3}{6} = \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6}\right)\left(1 + \frac{\eta_2^2}{2}\right) \cos \alpha_{1.2} + G^4$$

oder

$$\Delta\xi = \sigma \cos \alpha_{1.2}\left(1 - \frac{\sigma^2}{6} + \frac{\eta_2^2}{2}\right) + \frac{\Delta\xi^3}{6} + G^4.$$

Wird für das letzte Glied $\Delta\xi^3/6 = (\sigma^3 \cos^3 \alpha_{1.2})/6 + G^4$ gesetzt, so folgt mit u' und v' die Abszissenformel

$$\Delta\xi = u' + \frac{\eta_2^2 u'}{2} - \frac{u' v'^2}{6} + G^4. \tag{102.2b}$$

Den *Gegenrichtungswinkel* $\alpha_{2.1}$ liefert die NEPERsche Gleichung

$$\tan\frac{\left(\alpha_{2.1}-\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_{1.2}\right)}{2}=\frac{\cos\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\eta_1\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\eta_2\right)}{2}}{\cos\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\eta_1\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\eta_2\right)}{2}}\cot\frac{\Delta\xi}{2}.$$

Schreibt man für die linke Seite

$$\tan\frac{\left(\alpha_{2.1}-\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_{1.2}\right)}{2}=\tan\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\right),$$

so läßt sich die Gleichung umstellen zu

$$\tan\frac{\pi-\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}=\sin\frac{\eta_2+\eta_1}{2}\sec\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\tan\frac{\Delta\xi}{2}.$$

Die Funktionen der kleinen Winkel jeweils bis zum ersten Glied in Reihe entwickelt gibt

$$\frac{\pi-\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}=\frac{\eta_2+\eta_1}{2}(1+\ \ldots)\frac{\Delta\xi}{2}+G^4.$$

Der Übergang auf Winkelmaß schließlich gibt

$$\alpha_{2.1}=\alpha_{1.2}+180°-\frac{\varrho}{2}(\eta_2+\eta_1)\,\Delta\xi+\varrho G^4.$$

Setzt man noch $\eta_2=\eta_1+v'+G^2$, $\Delta\xi=u'+G^2$, so wird

$$\alpha_{2.1}=\alpha_{1.2}+180°-\varrho\eta_1 u'-\varrho\frac{u'v'}{2}+\varrho G^4; \qquad (102.2c)$$

Werden die Gleichungen (102.2) auf das metrische Maß der geodätischen Linearkoordinaten umgestellt, setzt man also

$$\eta_2=\frac{y_2}{R},\quad \eta_1=\frac{y_1}{R},\quad \sigma=\frac{s_{1.2}}{R},\quad \Delta\xi=\frac{\Delta x}{R}=\frac{x_2-x_1}{R},$$

$$u'=\sigma\cos\alpha_{1.2}=\frac{s_{1.2}}{R}\cos\alpha_{1.2}=\frac{u}{R},$$

$$v'=\sigma\sin\alpha_{1.2}=\frac{s_{1.2}}{R}\sin\alpha_{1.2}=\frac{v}{R},$$

so ergibt sich, wenn noch mit R multipliziert wird,

$$y_2 = y_1 + v - \frac{y_1 u^2}{2R^2} - \frac{u^2 v}{6R^2}, \tag{102.3a}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = u + \frac{y_2^2 u}{2R^2} - \frac{uv^2}{6R^2}, \tag{102.3b}$$

$$\alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180° - \varrho \frac{y_1 u}{R^2} - \varrho \frac{uv}{2R^2}. \tag{102.3c}$$

Die Korrektionsglieder

$$-\frac{u^2}{2R^2}\left(y_1 + \frac{v}{3}\right) = \textcircled{y}, \qquad \frac{u}{2R^2}\left(y_2^2 - \frac{v^2}{3}\right) = \textcircled{x}$$

in (102.3a) und (102.3b) werden als die *sphärische Ordinaten-* bzw. *Abszissenverbesserung*, das Korrektionsglied

$$-\varrho \frac{u}{R^2}\left(y_1 + \frac{v}{2}\right) = \textcircled{\alpha}$$

in (102.3c) als die *Ordinatenkonvergenz* bezeichnet.

Meist spricht man kurz von Ring-y oder y im Ring usf. Interessant ist, daß sich auch die Ordinatenkonvergenz $\textcircled{\alpha}$ geometrisch deuten läßt. Aus Abb. 102.1 liest man aus dem Viereck $F_1P_1P_2F_2$ ab:

$$360° + \varepsilon = 90° + 90° + \alpha_{1.2} + 90° - \alpha'_{1.2} + 90°$$

oder

$$-\varepsilon = \alpha'_{1.2} - \alpha_{1.2} = \alpha_{2.1} - 180° - \alpha_{1.2} = \textcircled{\alpha},$$

d. h. die Ordinatenkonvergenz ist gleich dem negativen Exzess des Vierecks $F_1P_1P_2F_2$.

Damit ist die Berechnung von geodätischen Linearkoordinaten auf der Kugel auf die Berechnung ebener Koordinaten zurückgeführt:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + s_{1.2} \sin \alpha_{1.2} + \textcircled{y}, \\ x_2 &= x_1 + s_{1.2} \cos \alpha_{1.2} + \textcircled{x}, \\ \alpha_{2.1} &= \alpha_{1.2} + 180° + \textcircled{\alpha}. \end{aligned} \tag{102.4}$$

Auch die Umkehrung der Aufgabe, die Ableitung der Polarkoordinaten aus den Koordinaten der Streckenendpunkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ist bequem zu lösen; aus (102.4) erhält man dafür

$$s_{1.2} \sin \alpha_{1.2} = y_2 - y_1 - \textcircled{y}, \qquad s_{1.2} \cos \alpha_{1.2} = x_2 - x_1 - \textcircled{x}$$

und somit für den *Richtungswinkel*

$$\tan \alpha_{1.2} = \frac{y_2 - y_1 - \textcircled{y}}{x_2 - x_1 - \textcircled{x}}, \quad \alpha_{1.2} = \ldots . \tag{102.5a}$$

Die *Seite* $s_{1.2}$ ergibt sich zu

$$s_{1.2} = \frac{y_2 - y_1 - \textcircled{y}}{\sin \alpha_{1.2}} = \frac{x_2 - x_1 - \textcircled{x}}{\cos \alpha_{1.2}}, \quad s_{1.2} = \ldots, \tag{102.5b}$$

und der *Gegenrichtungswinkel* wird

$$\alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^\circ + \textcircled{\alpha}. \tag{102.5c}$$

In (102.5) sind die *Korrektionsglieder* noch durch die Koordinatendifferenzen $\Delta y = y_2 - y_1$ und $\Delta x = x_2 - x_1$ auszudrücken. Mit $u = \Delta x + G^2$, $v = \Delta y + G^2$ erhält man dann

$$\textcircled{y} = -\frac{\Delta x^2}{2R^2}\left(y_1 + \frac{\Delta y}{3}\right), \quad \textcircled{x} = \frac{\Delta x}{2R^2}\left(y_2^2 - \frac{\Delta y^2}{3}\right),$$

$$\textcircled{\alpha} = -\varrho \frac{\Delta x}{R^2}\left(y_1 + \frac{\Delta y}{2}\right),$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Tafeln für die Korrektionsglieder finden sich z. B. bei W. GROSSMANN, Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung, Verlag Konrad Wittwer, 2. Auflage, Stuttgart 1964, Anhang Tafel IV, 2.

Abschließend soll noch der Zusammenhang zwischen den geographischen Koordinaten und den geodätischen Linearkoordinaten aufgezeigt werden. Sind die geographischen Koordinaten φ und λ eines Punktes P gegeben und die geodätischen Linearkoordinaten x, y von P in bezug auf den Ursprung $U(\varphi_0, \lambda_0)$ gesucht, wobei die Abszissenachse dem Meridian von U entspricht (Abb. 102.3), so ist wie folgt zu verfahren: Legt man durch P den zur Abszissenachse senkrechten Großkreis, so findet man mit $\xi = x/R$, $\eta = y/R$, $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck FPP_n für die *Ordinate*

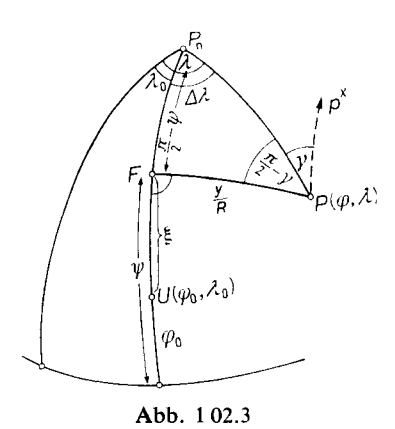


Abb. 102.3

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right) = \sin \Delta\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

oder

$$\sin\eta = \sin\Delta\lambda\cos\varphi; \quad \eta = \ldots, \quad y = R\eta. \tag{102.6a}$$

Für die *Meridiankonvergenz* gibt dasselbe Dreieck

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \cot\Delta\lambda\cot\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right), \quad \tan\gamma = \tan\Delta\lambda\sin\varphi; \quad \gamma = \ldots. \tag{102.6b}$$

Die *Breite* ψ *des Fußpunktes* F folgt aus

$$\cos\Delta\lambda = \cot\psi\cot\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right).$$

Um daraus die Differenz $(\psi-\varphi)$ zu finden, ist wie folgt umzuformen:

$$\left(1-2\sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}\right)\sin\psi\cos\varphi = \cos\psi\sin\varphi,$$

$$\sin(\psi-\varphi) = 2\sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}\sin\psi\cos\varphi.$$

Drückt man $\sin\psi$ durch bekannte Größen aus,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) = \sin\psi\sin\Delta\lambda, \quad \sin\psi = \frac{\sin\gamma}{\sin\Delta\lambda},$$

so wird schließlich

$$\sin(\psi-\varphi) = \tan\frac{\Delta\lambda}{2}\sin\gamma\cos\varphi, \quad \psi-\varphi = \ldots, \quad \psi = \varphi+(\psi-\varphi) = \ldots. \tag{102.6c}$$

Endlich wird die *Abszisse*

$$\xi = \psi-\varphi_0, \quad x = R\xi. \tag{102.6d}$$

Ebenso lassen sich umgekehrt aus den Linearkoordinaten die geographischen Koordinaten ableiten, wofür gleich die Endformeln angeschrieben werden:

Fußpunktsbreite: $$\psi = \varphi_0+\xi. \tag{102.7a}$$

Geographische Länge: $$\tan\Delta\lambda = \frac{\tan\eta}{\cos\psi}, \quad \lambda = \lambda_0+\Delta\lambda. \tag{102.7b}$$

Meridiankonvergenz: $$\tan\gamma = \sin\eta\tan\psi. \tag{102.7c}$$

Geographische Breite: $\sin(\psi-\varphi) = \tan\gamma \tan\frac{\Delta\lambda}{2} \cos\psi;\ \varphi = \psi - (\psi-\varphi).$

(102.7d)

Beide Aufgaben können auch durch Reihenentwicklungen gelöst werden, doch zeigen die Ableitungen hierzu nichts prinzipiell Neues.

103. Transformation geodätischer Linearkoordinaten auf der Kugel

Eine weitere geodätische Aufgabe besteht darin, die geodätischen Linearkoordinaten eines an der Grenze zweier sphärischer Koordinatensysteme liegenden Punktes aus dem einen System in das andere umzurechnen. Als Beispiel hierfür werden zwei SOLDNER-Systeme mit den Nullpunkten U und U' (Abb. 103.1) gewählt. Aus den Koordinaten a und o (Abszisse und Ordinate) von P im System U sind x, y für das System U' abzuleiten, wenn a_0 und o_0 die Koordinaten und γ die Meridiankonvergenz von U' in bezug auf das System U bedeuten. — Einfach und übersichtlich ist die Umformung mit Hilfe geographischer Koordinaten auszuführen: Rechnet man nach (102.7) die geographischen Koordinaten φ, λ von P, so erhält man daraus nach (102.6) die auf U' (φ_0', λ_0') bezogenen Koordinaten x, y von P. Die Aufgabe läßt sich indessen auch direkt, und zwar sowohl mit Hilfe strenger Formeln als auch durch Reihenentwicklungen lösen.

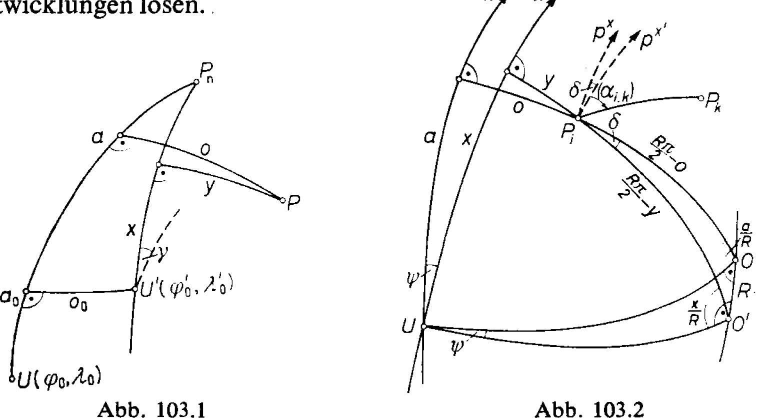


Abb. 103.1 Abb. 103.2

Eine weitere Lösungsmöglichkeit findet sich in JORDAN/EGGERT/KNEISSL, Bd. IV/2, a.a.O. S. 784 f.

Ohne auf Einzelheiten dieser speziellen Aufgabe einzugehen, sollen ganz allgemein noch strenge Formeln für die Drehung und die Nullpunktsverschiebung eines Systems geo-

d ä t i s c h e r L i n e a r k o o r d i n a t e n abgeleitet werden. — Zunächst zur *Drehung:* Die Abszissenachse X' des neuen Systems sei gegen X im Uhrzeigersinn um den Winkel ψ gedreht (Abb. 103.2); die Aufgabe lautet also, aus a und o von P die Koordinaten x und y für das gedrehte System anzugeben. Schreibt man alle Seiten und Winkel im Bogenmaß und setzt zur Abkürzung

$$\frac{a}{R} = \alpha, \quad \frac{o}{R} = \omega, \quad \frac{y}{R} = \eta, \quad \frac{x}{R} = \xi, \tag{103.1a}$$

so erhält man mit Hilfe des Seitenkosinussatzes aus $\triangle P_i O' O$ — zu beachten ist, daß die Winkel $UO'O$ und UOO' Rechte sind — die *Ordinatenformel*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\cos\psi + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\sin\psi\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

oder

$$\sin\eta = \sin\omega\cos\psi - \cos\omega\sin\psi\sin\alpha. \tag{103.1b}$$

Die *Abszissenformel* liefert der Kotangenssatz

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\sin\psi = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\psi$$

oder

$$\tan\xi = \frac{\sin\psi\tan\omega}{\cos\alpha} + \tan\alpha\cos\psi. \tag{103.1c}$$

Für die *Richtungswinkel des neuen Systems* ist zu beachten, daß der Winkel δ zwischen den Ordinatenkreisen $P_i O$ und $P_i O'$ gleich dem Winkel zwischen den geodätischen Parallelen p^X und $p^{X'}$ ist. Also gilt [vergl. Abb. 103.2]

$$(\alpha_{i.k}) = \alpha_{i.k} - \delta. \tag{103.1d}$$

Dabei folgt δ aus dem Kotangenssatz ($\triangle P_i O' O$):

$$\cot\psi\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \cot\delta\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$$

zu

$$\cot\delta = \frac{\sin\alpha\sin\omega + \cot\psi\cos\omega}{\cos\alpha}, \tag{103.1e}$$

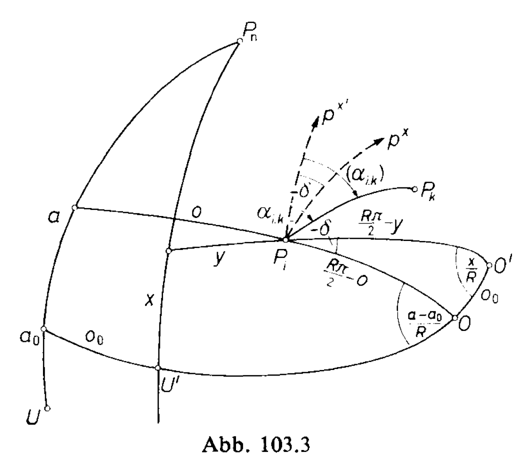


Abb. 103.3

womit die Aufgabe gelöst ist. In derselben Weise ist die Umkehrung zu behandeln. — Natürlich lassen sich für den Fall, daß a/R, o/R, usf. kleine Größen erster Ordnung sind, wieder Näherungsformeln durch Reihenentwicklung angeben.

Für die *Nullpunktsverschiebung* findet man die Transformationsformeln mit Hilfe der Abb. 103.3. Mit den Abkürzungen $(a-a_0)/R = \alpha-\alpha_0 = \Delta\alpha$, $o_0/R = \omega_0$ liefert der Seitenkosinussatz für das Dreieck P_iOO' die *Ordinatenformel*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\cos\omega_0+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\sin\omega_0\cos(\pi-\Delta\alpha)$$

oder

$$\sin\eta = \sin\omega\cos\omega_0-\cos\omega\sin\omega_0\cos\Delta\alpha. \tag{103.2a}$$

Die *neue Abszisse* folgt aus dem Kotangenssatz zu

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\sin\omega_0 = \cot\xi\sin(\pi-\Delta\alpha)+\cos(\pi-\Delta\alpha)\cos\omega_0$$

oder

$$\cot\xi = \frac{\tan\omega\sin\omega_0+\cos\Delta\alpha\cos\omega_0}{\sin\Delta\alpha}. \tag{103.2b}$$

Mit

$$(\alpha_{i.k}) = \alpha_{i.k}+(-\delta) = \alpha_{i.k}-\delta \tag{103.2c}$$

und der aus dem Kotangenssatz

$$\cot\omega_0\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) = \cot(-\delta)\sin(\pi-\Delta\alpha)+\cos(\pi-\Delta\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)$$

folgenden Gleichung

$$\cot\delta = -\frac{\cot\omega_0\cos\omega+\sin\omega\cos\Delta\alpha}{\sin\Delta\alpha} \tag{103.2d}$$

läßt sich δ berechnen und der *Richtungswinkel im neuen System* angeben.

Mit den Formeln (103.2) ist übrigens auch die eingangs erwähnte Koordinatenumformung für zwei benachbarte SOLDNER-Systeme streng gelöst. — Bemerkenswert ist noch, daß sich die beiden Operationen Drehung und Nullpunktsverschiebung nur bei Reihenentwicklung, nicht aber bei Anwendung der strengen Formeln in einem Arbeitsgang erledigen lassen.

104. Geodätische Abbildungen

Die *geodätischen Abbildungen* unterscheiden sich von den in [95] und [97] dargestellten Netzentwürfen in erster Linie dadurch, daß sie nicht der Darstellung großer Teile der Erdoberfläche, sondern der Abbildung relativ kleiner Gebiete (Länder) in großen Maßstäben dienen. Endziel einer geodätischen Abbildung ist daher auch nicht, die ebenen Bilder der geographischen Netzlinien darzustellen, sondern die Punkte des Landesdreiecksnetzes, die auf der Kugel durch krummlinige Koordinaten festgelegt sind, in einer ebenen Karte abzubilden und dafür, soweit irgend möglich, ebene rechtwinklige Koordinaten anzugeben.

Wie schon in [94] erklärt, treten bei der ebenen Abbildung der Kugel — ebenso natürlich beim Ellipsoid, das bei den geodätischen Abbildungen meist an die Stelle der Kugel tritt — Längen-, Winkel- und Flächenverzerrungen auf, und je nach der gewählten Abbildungsart hat man die Möglichkeit, die eine oder andere Verzerrung klein zu halten; doch geht natürlich das Eindämmen einer Verzerrungsart, etwa der Winkelverzerrung, immer zu Lasten einer anderen, etwa der Flächenverzerrung.

Bei den geodätischen Abbildungen ist die Forderung nach einer weitgehenden Ähnlichkeit zwischen Urbild und Abbild noch mehr in den Vordergrund gestellt; da die Triangulationsnetze vorwiegend durch Winkelmessung erstellt werden, bevorzugt man im allgemeinen die winkeltreue (konforme) Abbildung. Dementsprechend bezeichnet man eine Abbildung, die auch bei großen Maßstäben hinreichend Winkeltreue gibt, als eine geodätische Abbildung.

Als Beispiel hierfür soll die *konforme Abbildung der Kugel nach* C. F. GAUSS angegeben werden.

Die Theorie der konformen Abbildungen wurde von C. F. GAUSS in der Zeit zwischen 1820 und 1840 entwickelt.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die rechtwinklig geodätischen Linearkoordinaten (SOLDNER-Koordinaten) in unveränderter Größe als ebene rechtwinklige Koordinaten zu verwenden. Bei Verwendung dieser ebenen kongruenten Kugelkoordinaten wird im allgemeinen jede Strecke nach Länge und Richtung verzerrt. Bis zu welchen Grenzen diese ebene Rechnung bzw. die daraus resultierenden Verzerrungen in Kauf genommen werden können, hängt vom Zweck der Messung und Rechnung ab.

Eine *konforme Abbildung* liegt vor, wenn z. B. das infinitesimal kleine rechtwinklige Kugeldreieck PP_1F zu seinem ebenen Abbild $\bar{P}\bar{P}_1\bar{F}$ ähnlich ist (Abb. 104.1a,b). Die Koordinaten der Bildpunkte $\bar{P}(x, y)$ und

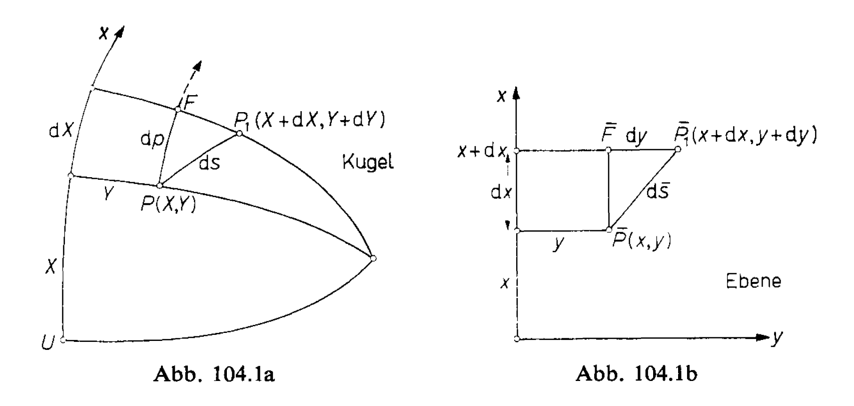


Abb. 104.1a Abb. 104.1b

$\bar{P}_1(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$ sind also durch solche Funktionen der Kugelkoordinaten X, Y, und $X+\mathrm{d}X$, $Y+\mathrm{d}Y$ auszudrücken, daß das Verhältnis zwischen zwei beliebigen Seiten dieser Dreiecke einen von der Richtung der Seiten unabhängigen Wert m besitzt, d. h. es muß sein

$$m = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}Y} = \frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}s}. \tag{104.1}$$

Da es sich um rechtwinklige Dreiecke handelt, wird $\mathrm{d}\bar{s}/\mathrm{d}s = m$ erfüllt sein, wenn nur gilt $m = \mathrm{d}x/\mathrm{d}p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}Y$. Nun ist $\mathrm{d}p = \mathrm{d}X \cos{(Y/R)}$, so daß die Bedingung für die konforme Abbildung lautet:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X \cos \frac{Y}{R}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}Y}.$$

Setzt man für die *Abbildung der Abszisse* die einfachste der unendlich vielen möglichen Funktionen

$$x = X, \tag{104.2}$$

so gilt $\mathrm{d}x = \mathrm{d}X$ und auch

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x \cos \frac{Y}{R}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}Y} \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}Y}{\cos \frac{Y}{R}}. \tag{104.3}$$

Durch Integration gewinnt man daraus (vgl. auch [91]) die *Ordinate* zu

$$y = R \ln \tan\left(45° + \frac{Y}{2R}\right) + C. \tag{104.4}$$

Die Integrationskonstante C ist Null, weil für $Y = 0$ auch $y = 0$ sein muß. (104.4) ist identisch mit (97.4), d. h. die GAUSSsche konforme Abbildung der Kugel kann als transversale Merkatorprojektion angesehen werden.

Die unbequeme Berechnung von y nach (104.4) wird in der Landesvermessung umgangen: Beachtet man, daß Y/R bei geodätischen Arbeiten stets eine kleine Größe ist, so läßt sich die rechte Seite von (104.4), besser noch $\cos(Y/R)$ in (104.3) in eine Reihe entwickeln und integrieren:

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}Y}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{Y}{R}\right)^2 + \dots} = \mathrm{d}Y\left(1 + \frac{Y^2}{2R^2} - \dots\right)$$

oder

$$y = Y + \frac{Y^3}{6R^2} - \dots,$$

so daß die *Übertragungsgleichungen* lauten:

$$x = X, \quad y = Y + \frac{Y^3}{6R^2}. \tag{104.5}$$

Eine Weiterentwicklung der GAUSSschen konformen Projektion und eine Darstellung der dabei auftretenden Verzerrungen findet sich in JORDAN/EGGERT/KNEISSL, Bd. IV/2, a.a.O. S. 817 f.

Zur konformen Abbildung des Ellipsoides (GAUSS-KRÜGER-Koordinaten) vgl. z. B. W. GROSSMANN, a.a.O. S. 149 f.

Kapitel 19: Grundbegriffe der sphärischen Astronomie

105. Aufgabe und Arbeitsweise der sphärischen Astronomie

Die sphärische Astronomie beschäftigt sich mit den scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper infolge der täglichen Drehung der Erde: Aus der Richtung eines Gestirnes können seine Position in einem Koordinatensystem und bei wiederholter Beobachtung seine Bewegung und Entfernung bestimmt werden. Eine trigonometrische Entfernungsbestimmung ist für Fixsterne allerdings nur in wenigen Fällen möglich. — Die *sphärische Astronomie*, oft auch als *Astrometrie* bezeichnet, ist ebenso wie die *Himmelsmechanik*, die sich mit den Bewegungsgesetzen der Himmelskörper beschäftigt, der mathematischen Astronomie zuzurechnen.

Weitere große Arbeitszweige der Astronomie sind die *Astrophysik*, die sich mit den physikalischen Zustandsgrößen der Sterne und deren Änderungen beschäftigt, ferner die *Stellarstatistik*, die mittels statistischer Methoden versucht, aus den verfügbaren Daten die Verteilung und Bewegung der Sterne im Raum zu bestimmen.

Darüber hinaus bildet die sphärische Astronomie die Grundlage der praktischen Astronomie, im besonderen der *geodätischen Astronomie* und der *Nautik:* Mit Hilfe der Sterne orientiert man sich und führt *Orts-*, *Zeit-* und *Azimutbestimmungen* aus. In der Geodäsie dienen die Orts- bzw. Azimutbestimmungen der Lagerung und Orientierung der trigonometrischen Netze. Die Bedeutung dieser Verfahren geht daraus hervor, daß man auf einer nicht rotierenden oder immer von Wolken umgebenen Erde eine absolute Lage oder Richtung nicht angeben könnte.

Daß es sich bei der sphärischen Astronomie um eine Anwendung der sphärischen Trigonometrie handelt, ist offenbar: Das Himmelsgewölbe erscheint als eine Hohlkugel, an der sich die Sterne bewegen. Man kann also den Himmel als eine Kugel, die *scheinbare Himmelskugel*, auffassen, darauf Kreise zeichnen und für die Ableitung der notwendigen Beziehungen die Trigonometrie zu Hilfe nehmen.

Zur gleichen Auffassung kommt man auch ohne die scheinbare Himmelskugel: Jede Sternbeobachtung ist eine Richtungsbeobachtung; da eine Richtung durch zwei Winkel

gegenüber geeigneten Nullrichtungen festgelegt ist, treten zwischen Beobachtungen nur Winkelbeziehungen auf, die nach den Sätzen der Raumgeometrie zu behandeln sind. Trägt man in einem Nullpunkt die Richtungen auf Grund der Winkel auf und schlägt um den Nullpunkt eine Kugel, etwa vom Radius 1, so entstehen wieder sphärische Dreiecke.

Im folgenden werden einige wichtige Grundbegriffe der sphärischen Astronomie, wie Koordinatensysteme, Fundamentaldreieck, scheinbare tägliche Bewegung der Himmelskugel und Zeitrechnung erläutert, denen sich einige praktische Anwendungen aus der geodätischen Astronomie anschließen.

106. Die scheinbare Himmelskugel

Um zunächst innerhalb der *scheinbaren Himmelskugel* eine Orientierung zu erhalten, sei ein Ort P auf der wieder als kugelförmig aufgefaßten Erde betrachtet (Abb. 106.1). Die in P an die Erdkugel gelegte Tangentialebene T begrenzt den sichtbaren Teil des Himmels, denn der unterhalb von T liegende Teil des Himmels wird durch die Erde verdeckt. T ist die *Ebene des scheinbaren Horizonts*. Im Vergleich zu den Dimensionen der scheinbaren Himmelskugel — da die sphärische Trigonometrie nur Winkelbeziehungen enthält, kommt es auf den Radius der Himmelskugel nicht an —ist der Erdradius so klein, daß er in der Regel vernachlässigt werden kann[89]. Für die Beobachtung an der Himmelskugel darf P als mit dem Erdmittelpunkt zusammenfallend angesehen werden. — Die durch den Erdmittelpunkt laufende, zu T parallele Ebene H wird als die *Ebene des wahren Horizonts* bezeichnet. — Die Ebene des wahren Horizonts schneidet die Himmelskugel in einem größten Kreis, dem *wahren Horizont*. Demnach ist der sinngemäß zu definierende *scheinbare Horizont* ein Kleinkreis. Der senkrecht über P liegende Punkt an der Himmelskugel ist der *Zenit* Z, der Gegenpunkt der *Nadir* Z' (Abb. 106.2). Z und Z' kann man sich auch so entstanden denken, daß der zu P gehörende Erddurchmesser mit der Himmelskugel zum Schnitt gebracht wird. In derselben Weise kann man sich auch die Sterne an die Himmelskugel projiziert denken.

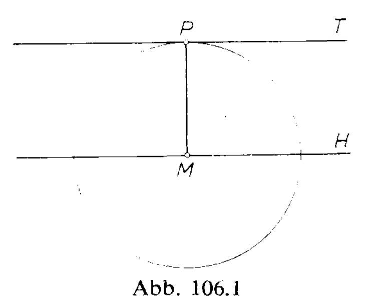


Abb. 106.1

[89] Bei Beobachtungen von Sonne, Mond und Planeten kann der Erdradius jedoch nicht vernachlässigt werden.

Für eine weitere Orientierung ist die Sonne zu Hilfe zu nehmen, die in unseren Breiten ihren höchsten Stand, die *obere Kulmination*, stets in der gleichen Himmelsrichtung, der *Südrichtung*, erreicht. Die entgegengesetzte Richtung ist die *Nordrichtung*. Da die obere Kulmination der Sonne mittags eintritt, heißt die Gerade, die Süd- und Nordrichtung miteinander verbindet, die *Mittagslinie* von *P*. Nunmehr können auch die *Himmelsrichtungen Ost und West* eingeführt werden, die senkrecht zur Nord-Süd-Richtung stehen, und zwar derart, daß der Westen links von der Süd-Nordorientierten Mittagslinie liegt. Die den vier Himmelsrichtungen entsprechenden Punkte auf dem Horizont nennt man *Nord-*, *Süd-*, *Ost-* und *Westpunkt*.

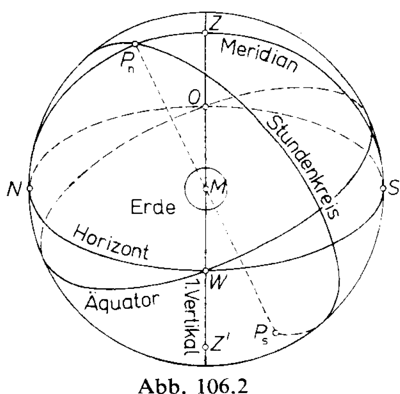


Abb. 106.2

Die Erde dreht sich in einem Tag einmal um ihre Achse von West nach Ost, wobei die Achse die Richtung im Raum für längere Zeit unverändert beibehält. Diese Erddrehung spiegelt sich in einer *scheinbaren Drehung der Himmelskugel* von Ost nach West wider. Auch dieser scheinbaren Drehung der Himmelskugel entspricht eine Achse, d. h. die Sterne beschreiben scheinbar Kreise um zwei feste Punkte, die *Himmelspole* P_n und P_s, die sich als die Durchstoßpunkte der verlängerten Erdachse, der Weltachse, mit der Himmelskugel ergeben.

Die zur Weltachse senkrechte Ebene durch den Erdmittelpunkt *M*, die den *Erdäquator* enthält, schneidet auf der Himmelskugel den *Himmelsäquator* aus. Alle durch die Himmelspole laufenden, zum Himmelsäquator senkrechten Großkreise, die als Projektionen der Erdmeridiane aufgefaßt werden können, sind die *Stundenkreise;* die durch Zenit und Nadir laufenden, zum Horizont senkrechten Großkreise heißen die *Vertikalkreise*. Zwei Vertikale sind von besonderer Bedeutung: Der die Himmelspole enthaltende, als *Himmelsmeridian von P* bezeichnete, und der sogenannte *Erste Vertikal*, der den Ost- und Westpunkt enthält.

Zu bemerken ist noch, daß die scheinbare Himmelskugel völlig unabhängig ist von der Gestalt der Erde. Ist *P* ein Punkt auf der Erdoberfläche, so erhält man den Zenit von *P* dadurch, daß man die Lotrichtung von *P* parallel zu sich selbst in den Erdmittelpunkt verschiebt und mit der Himmelskugel zum Schnitt bringt. Die Winkelbeziehungen, auf die es ausschließlich ankommt, bleiben auch nach dieser Parallelverschiebung unverändert erhalten.

107. Die Koordinatensysteme der sphärischen Astronomie

Ein Punkt an der Himmelskugel kann in bezug auf zwei zueinander senkrechte Großkreise durch *sphärische Koordinaten* festgelegt werden.

Ein sphärisches Koordinatensystem kann auch auf zwei Punkte gegründet werden, den Polpunkt und den Leitpunkt. Nimmt man die Polare des Polpunktes als Horizontalkreis, den durch Pol- und Leitpunkt laufenden Großkreis als Vertikalkreis, so hat man wieder zwei zueinander senkrechte Grundkreise. Beim System der geographischen Koordinaten z. B. ist der Nordpol der Polpunkt, Leitpunkt der Ort Greenwich.

Das einfachste System dieser Art ist das *Horizontalsystem*, das leicht auffindbar und überdies der Beobachtung bequem zugänglich ist. Die Grundkreise sind der *Horizont* und der *Himmelsmeridian des Beobachtungsortes* P (Abb. 107.1), d.h. Polpunkt ist der Zenit, Leitpunkt der Nordpol P_n. Ein Stern S kann nun durch die Koordinaten h = *Höhe* und a = *Azimut* festgelegt werden; h wird vom Horizont bis zum Zenit positiv von 0° bis 90°, vom Horizont zum Nadir bis −90° gezählt. Die Zählung von a ist uneinheitlich: Am häufigsten sind die von Norden über Osten von 0° bis 360° gezählten *Nordazimute;* dagegen benützt man bei der Untersuchung der scheinbaren täglichen Bewegung der Himmelskugel mit Vorteil *Südazimute*, die von Süden nach Westen positiv, nach Osten jedoch negativ gezählt werden.

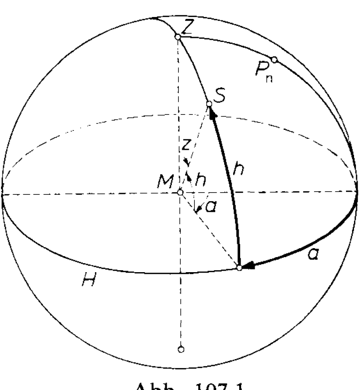


Abb. 107.1

Die *Netzlinien des Horizontalsystems* sind also die *Vertikale* (a = const.) und die *Höhenparallele* (h = const.); letztere werden auch als *Almukantarate* bezeichnet.

Statt der Höhe h kann auch die *Zenitdistanz* $z = 90° - h$ eingeführt werden, die vom Zenit bis zum Nadir von 0° − 180° gezählt wird. Aus Abb. 107.2 folgt noch eine wichtige Beziehung: Für einen Punkt P in der geographischen Breite φ bildet die Zenitlinie $\overline{MZ}$ mit der Äquatorebene den Winkel φ. Nun ist aber $\sphericalangle HMP_n = \varphi$, d. h. die Höhe des Himmelspoles P_n ist gleich der geographischen Breite φ. Die geographische Breite φ wird daher auch als *Polhöhe* bezeichnet.

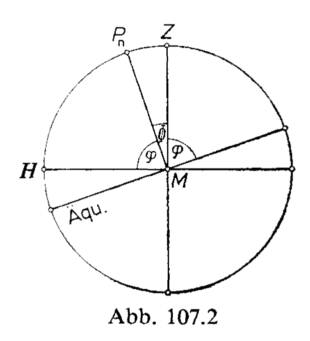


Abb. 107.2

Hieraus ergibt sich sofort ein Näherungsverfahren für die Breitenbestimmung: Der Polarstern (α-ursae minoris) fällt

nahezu mit dem Himmelsnordpol zusammen; die Höhe von Polaris ist also genähert gleich der Breite φ.

Die Zenitdistanz des Poles ist gleich dem Komplement der Breite φ; $\phi = 90° - \varphi$ heißt daher auch die *Ko-Breite*.

Die Koordinaten a und h des Horizontalsystems beziehen sich stets auf nur *einen* Punkt der Erde. Ein für *alle* Orte der Erde gültiges System ist das *Äquatorsystem*, das als Horizontalkreis den Äquator benützt (Abb. 107.3). Legt man durch einen Stern S noch den Stundenkreis, so ist der vom Äquator bis zum Stern gemessene Bogen bzw. der zugehörige Zentriwinkel δ die *Deklination*. δ wird vom Äquator nach Norden positiv, nach Süden negativ von 0° bis 90° gezählt. Statt der Deklination δ wird oft auch die *Poldistanz* $p = 90° - \delta$ benützt. Die zum Äquator parallelen Kleinkreise (δ = const.) nennt man die *Deklinationskreise*. Für die Wahl der zweiten Koordinate gibt es zwei Möglichkeiten: Nimmt man den *Stundenwinkel* t, das ist der Winkel zwischen dem Himmelsmeridian von P und dem Stundenkreis des Sternes, den man im Sinne der scheinbaren täglichen Bewegung der Himmelskugel von Süd über West positiv von 0°–360° zählt, so erhält man ein *erdfestes Äquatorsystem*, das orts- und zeitabhängig ist: Der Stundenwinkel t gibt den Abstand des Sternes von seiner oberen Kulmination an, t ist also zeitabhängig. t ist aber auch ortsabhängig; für alle auf dem Erdmeridian von P liegenden Orte hat t den gleichen, für alle östlich oder westlich von P liegenden Orte jedoch einen anderen Wert. Um ein *orts-* und *zeitunabhängiges Äquatorsystem* zu erhalten, hat man einen mit der Himmelskugel fest verbundenen Stundennullkreis zu wählen, der an der scheinbaren täglichen Drehung der Himmelskugel teilnimmt. Die Astronomie benützt dafür den Stundenkreis durch den *Frühlingspunkt* ♈ und bezeichnet den so entstehenden Winkel als die *Rektaszension* α (Abb. 107.3).

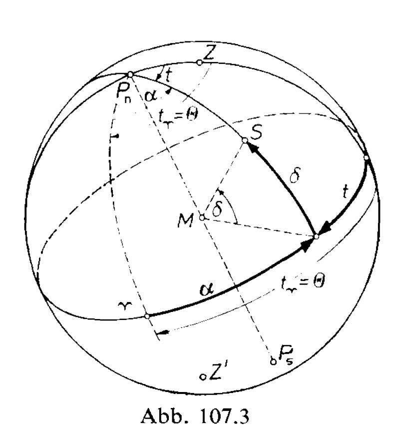


Abb. 107.3

Der *Frühlingspunkt* ist wie folgt festgelegt: Die scheinbare Bahn der Sonne, die *Ekliptik*, schneidet den Äquator in zwei Punkten, den *Äquinoktien*: Der Schnittpunkt, durch den die Sonne am 21. März eines jeden Jahres von der Südseite auf die Nordseite des Äquators übergeht, heißt der *Frühlingspunkt* ♈.

Die Rektaszension α wird der scheinbaren Bewegung entgegen von 0–24^h gezählt. Dieses zweite, orts- und zeitunabhängige Äquatorsystem wird als *himmelsfest* bezeichnet.

Beide Äquatorsysteme haben den Himmelsnordpol P_n als Polpunkt, dagegen ist beim ersten (erdfesten) System der Zenit, beim zweiten (himmelsfesten) System der Frühlingspunkt der Leitpunkt.

Den Stundenwinkel t_Υ des Frühlingspunktes, bezogen auf den Himmelsmeridian von P, nennt man die *Ortssternzeit* θ von P, also $t_\Upsilon = \theta$. Daraus folgt, daß $\theta = \alpha + t$ ist, d. h. die Sternzeit ist gleich der Summe von Rektaszension und Stundenwinkel. Wichtig ist auch noch der auf den Himmelsmeridian von Greenwich bezogene Stundenwinkel t_Υ° des Frühlingspunktes, der die *Ortssternzeit Greenwich* θ_0 angibt.

Der Stundenwinkel wird sowohl im Gradmaß als auch im Zeitmaß angegeben; zwischen den beiden Maßen gelten die Beziehungen $15° \triangleq 1^h$, $15' \triangleq 1^m$, $15'' \triangleq 1^s$, $1° \triangleq 4^m$, $1' \triangleq 4^s$. — Die Umwandlung erfolgt entweder mit Hilfe von Tafeln oder durch einfache Rechnung. Beispiel: $268° 49' 27''$ ist ins Zeitmaß umzurechnen:

$$
\begin{array}{lcll}
268° & = 17\cdot 15° + 13° & = 17^h + 13\cdot 4^m & \\
\quad 49' & = \quad 3\cdot 15' + 4' & = & 3^m + 4\cdot 4^s \\
\qquad 27'' & = & = & 1{,}8^s \\
\hline
268° 49' 27'' & & = 17^h \quad 55^m & 17{,}8^s
\end{array}
$$

Wären α und δ unveränderliche Größen, so würde eine einmalige Beobachtung und Zusammenstellung dieser Koordinaten genügen. Indessen erfahren die Koordinatenachsen im Laufe der Zeit infolge der *Präzession* und *Nutation* gleichförmige und periodische Änderungen; bei den Fixsternen tritt dazu noch die geringe, nur aus genauen Beobachtungen nachweisbare *Eigenbewegung* und bei der Sonne und den Planeten eine recht erhebliche Koordinatenänderung infolge der *Bewegung relativ zum Fixsternhimmel* auf. Für eine eingehende Information über dieses Arbeitsgebiet ist auf die Lehrbücher der sphärischen Astronomie zu verweisen.[90] Hier mag der Hinweis genügen, daß die Beobachtung, Berechnung und Veröffentlichung der äquatorialen Gestirnskoordinaten in Jahrbüchern und Sternkatalogen Aufgabe der Positionsastronomie ist und durch Sternwarten und astronomische Recheninstitute besorgt wird.

Jahrbücher und Sternkataloge enthalten daneben eine Reihe für die Ausführung und Auswertung astronomischer Beobachtungen wichtiger Daten. Vgl. z. B. die jährlich erscheinenden The Astronomical Ephemeris, Her Majesty's Stationary office, London; Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris

[90] Vgl. z. B. A. Prey, Einführung in die sphärische Astronomie, Springer Verlag, Wien 1949; W. Schaub, Vorlesungen über sphärische Astronomie, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G., Leipzig 1950.

and Nautical Almanac, London 1961. Weiter die jährlich erscheinenden Scheinbaren Örter der Fundamentalsterne, bearbeitet vom Astronomischen Recheninstitut in Heidelberg.

Schließlich ist zu erwähnen, daß die Astronomie noch weitere Koordinatensysteme benützt, das *System der Ekliptik* und das *galaktische System*, die aber im folgenden nicht benötigt werden.

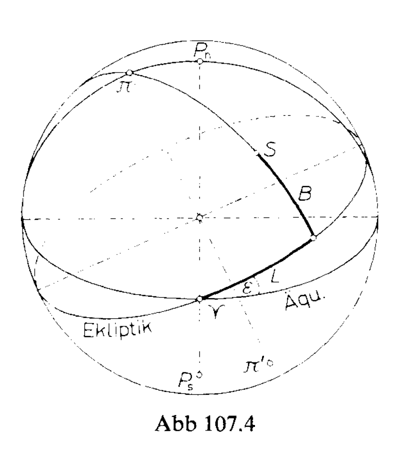


Abb 107.4

Beim *Ekliptiksystem* ist die Ekliptik, die den Äquator unter dem Winkel $\varepsilon = 23{,}5°$ schneidet, der Horizontalkreis; Leitpunkt ist wieder der Frühlingspunkt. Sind Π und Π' die Pole der Ekliptik, so kann ein Stern durch die Winkel L = astronomische Länge und B = astronomische Breite festgelegt werden (Abb. 107.4). Dieses System bringt für Untersuchungen des Planetensystems einen rechnerischen Vorteil: Die Planetenbahnen liegen sehr nahe der Ekliptik, so daß die astronomischen Breiten B der Planeten sehr klein bleiben. — Die Stellarastronomie benützt noch das *galaktische System*, dessen Horizontalkreis durch die Milchstraße festgelegt ist.

108. Das astronomische Fundamentaldreieck

Eine häufig auftretende Aufgabe ist die Umrechnung der Koordinaten des äquatorialen in die des horizontalen Systems. Die notwendigen Beziehungen liefert das *astronomische Fundamentaldreieck*,[91] das für die Nordhalbkugel durch den Himmelsnordpol P_n, den Zenit Z von P und den Stern S (Abb. 108.1) gebildet wird. Die Seiten des Dreiecks sind die Poldistanz des Zenits $\Phi = 90° - \varphi$, die Poldistanz $p = 90° - \delta$ und die Zenitdistanz $z = 90° - h$ des Sterns S. — Die Winkel des Dreiecks sind der Stundenwinkel t, der *parallaktische Winkel* q und das Implement des Nordazimuts, $360° - a_n$.

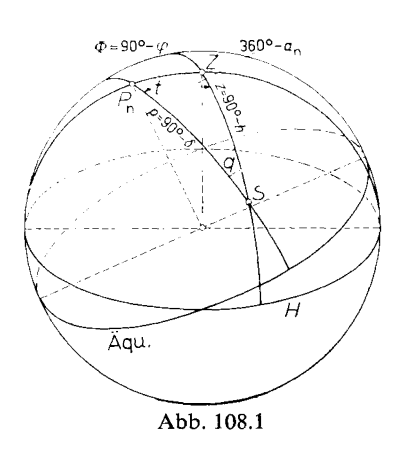


Abb. 108.1

Ein erstes Formelsystem für die Koordinatentransformation findet man in folgender Weise:

[91] Oft auch als *nautisches* oder *sphärisches Fundamentaldreieck* bezeichnet.

Der Seitenkosinussatz gibt die Beziehungen

$$\cos z = \cos \Phi \cos p + \sin \Phi \sin p \cos t$$

oder

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \tag{108.1a}$$

und

$$\cos p = \cos \Phi \cos z + \sin \Phi \sin z \cos (360^\circ - a_n)$$

oder

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z + \cos \varphi \sin z \cos a_n. \tag{108.1b}$$

Aus dem Sinussatz folgt

$$\frac{\sin (360^\circ - a_n)}{\sin t} = \frac{\sin p}{\sin z} \quad \text{oder} \quad \sin z \sin a_n = -\cos \delta \sin t. \tag{108.1c}$$

Mit den Gleichungen (108.1), die oft auch als die *astronomischen* oder *nautischen Grundgleichungen* bezeichnet werden, sind die notwendigen Beziehungen für die Umrechnung hergestellt. Kennt man für den Ort P der Breite φ die Koordinaten z und a_n eines Sterns im Horizontalsystem, so liefert (108.1b) sofort die Deklination. Hingegen ist die Berechnung des Stundenwinkels t aus dem Sinus nach (108.1c) nicht eindeutig:

$$\sin t = -\frac{\sin z \sin a_n}{\cos \delta}. \tag{108.2a}$$

Nimmt man noch den Sinus-kosinussatz zu Hilfe,

$$\cos \delta \cos t = \cos z \cos \varphi - \sin \varphi \sin z \cos a_n, \tag{108.2b}$$

so kennt man das Vorzeichen von $\cos t$ und somit auch den Quadranten von t. Bei gegebener Sternzeit θ folgt daraus die Rektaszension mit

$$\alpha = \theta - t.$$

Aus der Division von (108.2a) und (108.2b) folgt für den Stundenwinkel noch die Tangensformel

$$\tan t = \frac{-\sin z \sin a_n}{\cos z \cos \varphi - \sin \varphi \sin z \cos a_n} = -\frac{\tan z \sec \varphi \sin a_n}{1 - \tan \varphi \tan z \cos a_n}, \tag{108.2c}$$

die den Vorteil hat, daß zur eindeutigen Bestimmung von t die Angabe genügt, ob der Stern auf der Ost- oder Westseite steht. Es gilt nämlich

$$0 < t < 180^\circ \quad \text{für} \quad 180^\circ < a_n < 360^\circ,$$
$$180^\circ < t < 360^\circ \quad \text{für} \quad 0^\circ < a_n < 180^\circ.$$

Sind δ und t gegeben, z und a_n für den Ort der Breite φ gesucht, so liefert (108.1a) die Zenitdistanz; für das Azimut folgt aus (108.1c)

$$\sin a_n = -\frac{\cos \delta \sin t}{\sin z}. \tag{108.3a}$$

Nimmt man noch den Sinus-Kosinussatz zu Hilfe,

$$\sin z \cos a_n = \sin \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos t \cos \delta, \qquad (108.3\text{b})$$

so ist der Quadrant von a_n festgelegt, und überdies erhält man noch die bequeme Tangensformel

$$\tan a_n = \frac{-\cos \delta \sin t}{\sin \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos t \cos \delta} = -\frac{\cot \delta \sec \varphi \sin t}{1 - \tan \varphi \cos t \cot \delta}. \qquad (108.3\text{c})$$

Damit sind alle Aufgaben der Koordinatenumformung zu lösen.

Bei Benützung der Südazimute a_s lauten die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t, \\
\sin \delta &= \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos a_s, \\
\sin z \sin a_s &= \cos \delta \sin t, \\
\cos \delta \cos t &= \cos z \cos \varphi + \sin \varphi \sin z \cos a_s, \\
-\sin z \cos a_s &= \sin \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos t \cos \delta.
\end{aligned}$$

Zu bemerken ist noch, daß man eine Reihe von Tafeln und Diagrammen für die Koordinatenumformung ohne Rechnung eingerichtet hat, die aber durch die modernen Rechengeräte und elektronischen Rechenanlagen weitgehend bedeutungslos geworden sind.[92)]

Schließlich sind noch die wichtigsten *Differentialformeln des Fundamentaldreiecks* anzugeben, mit deren Hilfe die durch kleine Änderungen der gegebenen Stücke hervorgerufenen Änderungen der übrigen Stücke berechnet werden können. Von besonderer Bedeutung sind die Differentialformeln für die Aufgaben der geodätischen Astronomie (vgl. [113]) bei der Beurteilung der zu erwartenden Fehler.

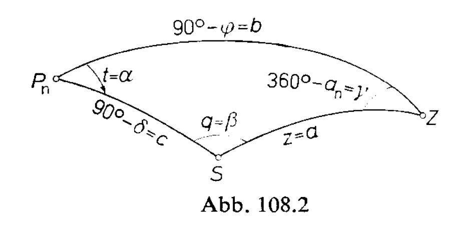


Abb. 108.2

Schreibt man (77.1b) in der Form

$$\mathrm{d}a = \cos \gamma \, \mathrm{d}b + \cos \beta \, \mathrm{d}c + \sin b \sin \gamma \, \mathrm{d}\alpha,$$

so erhält man mit den Bezeichnungen der Abbildung 108.2

$$\mathrm{d}z = -\cos a_n \, \mathrm{d}\varphi - \cos q \, \mathrm{d}\delta - \cos \varphi \sin a_n \, \mathrm{d}t.$$

---

92) Vgl. z. B. K. Schütte, Die Berechnung von Höhe und Azimut ohne Logarithmen, Seewarte, Heft 2/1942; desgl. Neue Azimutdiagramme, Annalen der Hydrographie, 1942.

Nach dem *Fehler* dt *im Stundenwinkel* aufgelöst, wird daraus:

$$dt = -\frac{dz}{\sin a_n \cos\varphi} - \frac{\cot a_n}{\cos\varphi}\, d\varphi - \frac{\cos q}{\cos\varphi \sin a_n}\, d\delta.$$

Ersetzt man noch $\cos\varphi \sin a_n = -\sin q \cos\delta$, so ergibt sich

$$dt = -\frac{dz}{\sin a_n \cos\varphi} - \frac{\cot a_n}{\cos\varphi}\, d\varphi + \frac{d\delta}{\tan q \cos\delta}, \qquad (108.4)$$

womit dt als Funktion von dz, dδ und dφ ausgedrückt ist. — Um einen *Breitenfehler* dφ in Abhängigkeit von dz, dδ, dt darzustellen, ist (77.1b) in der Form

$$da = \cos\gamma\, db + \cos\beta\, dc + \sin\beta \sin c\, d\alpha$$

anzuschreiben, woraus sich mit den Bezeichnungen in Abb. 108.2

$$dz = -\cos a_n\, d\varphi - \cos q\, d\delta + \sin q \cos\delta\, dt$$

ergibt. Nach dφ aufgelöst wird daraus

$$d\varphi = -\frac{dz}{\cos a_n} - \frac{\cos q}{\cos a_n}\, d\delta + \frac{\sin q \cos\delta}{\cos a_n}\, dt,$$

und mit $\sin q \cos\delta = -\cos\varphi \sin a_n$ endlich

$$d\varphi = -\frac{dz}{\cos a_n} - \frac{\cos q}{\cos a_n}\, d\delta - \cos\varphi \tan a_n\, dt. \qquad (108.5)$$

Für einen *Fehler* da *des Azimutes* in Abhängigkeit von dδ, dφ und dt gibt die 5. Gleichung von (77.4)

$$-\sin q\, d\delta - \sin a_n \cos z\, d\varphi = -\sin z\, da_n + \cos\delta \cos q\, dt$$

oder nach da_n aufgelöst

$$da_n = \frac{\sin q}{\sin z}\, d\delta + \sin a_n \cot z\, d\varphi + \frac{\cos\delta \cos q}{\sin z}\, dt. \qquad (108.6)$$

109. Die scheinbare tägliche Bewegung der Gestirne

Die Erde dreht sich im Laufe eines Tages von West nach Ost einmal um ihre Achse. Die Folge dieser Drehung ist, daß sich die Himmelskugel und mit ihr alle Sterne scheinbar von Ost nach West bewegen, dabei Kreise parallel zum Äquator beschreiben und je nach ihrer Deklination im Horizont auf- und untergehen, oder ständig über bzw. unter dem Horizont bleiben.

Für die Durchführung astronomischer Beobachtungen, insbesondere für die Vorbereitung und Berechnung von Beobachtungsprogrammen ist

die Kenntnis dieser scheinbaren täglichen Bewegung der Gestirne unerläßlich. Im folgenden wird daher der Bewegungsablauf der Gestirne für einen Beobachtungsort der geographischen Breite φ untersucht und dabei angenommen, daß die Lage der Gestirne an der Himmelskugel unveränderlich ist, die äquatorialen Koordinaten α und δ also konstant sind.

Diese Annahme soll zunächst auch für die Sonne gelten; die durch die Bewegung der Sonne relativ zum Fixsternhimmel eintretende Koordinatenänderung soll erst später berücksichtigt werden.

Zunächst ist die Frage zu klären, wie sich die verschiedenen Phasen der Bewegung fixieren lassen, da doch sowohl die Koordinaten a und z des Horizontalsystems als auch der Stundenwinkel t des ersten Äquatorsystems und der parallaktische Winkel q zeitlich veränderlich und nur in Verbindung mit einer Zeitangabe verwendbar sind. Statt einer Zeitskala kann dafür als Maß für die Zeit behelfsmäßig der Stundenwinkel t benützt werden, der sich fortlaufend von $0°$ bis $360°$ bzw. von 0^h bis 24^h ändert.

Eine erste Aussage über den Ablauf der täglichen Bewegung eines Gestirnes folgt aus der Abhängigkeit zwischen Stundenwinkel und Zenitdistanz. Aus dem Kosinussatz

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \qquad (109.1)$$

folgt zunächst, daß die Bahn eines Sterns symmetrisch zum Meridian verläuft: Da $\cos t$ eine gerade Funktion ist, ergeben sich für positive und negative Stundenwinkel gleichen Betrages gleiche Zenitdistanzen. — Die Differentiation von (109.1) nach den Veränderlichen z und t gibt

$$-\sin z \frac{dz}{dt} = -\cos\varphi \cos\delta \sin t \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin t}{\sin z}. \qquad (109.2)$$

Da $\cos\delta$ und $\cos\varphi$ stets positiv sind, folgt aus (109.2) für beliebige Beobachtungsorte und Sternpositionen: Ist $t < 180°$ oder $< 12^h$, so ist $dz/dt > 0$, die Zenitdistanz wächst, der Stern steht also auf der *West- oder Untergangsseite*. Für $t > 180°$ oder $> 12^h$ wird $dz/dt < 0$, die Zenitdistanz nimmt ab, der Stern befindet sich auf der *Ost-* oder *Aufgangsseite*. Mit $t = 0$ wird $dz/dt = 0$; z erreicht in der *oberen Kulmination* ein Minimum, der Stern S erreicht also die größte Höhe über dem Horizont. Für $t = 0$ folgt aus (109.1) $\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta = \cos(\varphi - \delta)$, d. h. die *Zenitdistanz für den Meridiandurchgang* lautet

$$z = \varphi - \delta, \qquad (109.3a)$$

wenn der Stern S südlich des Zenits kulminiert (Abb. 109.1a). Kulminiert S nördlich vom Zenit (Abb. 109.1b), so gilt für die positiv gezählte Zenitdistanz

$$z = \delta - \varphi. \qquad (109.3b)$$

Weiter erkennt man, daß der Stern für $\delta = \varphi$ im Zenit, für $\delta = 0$ im Äquator und für $\delta < 0$ südlich des Äquators durch den Meridian geht. Für $t = 180°$ oder 12^h ist wieder $dz/dt = 0$; hier erreicht z ein Maximum, der Stern steht in *unterer Kulmination* (Abb. 109.1c). Aus (109.1) folgt

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta - \cos\varphi \cos\delta = -\cos(\varphi+\delta) = \cos(180° - \varphi - \delta)$$

oder, wie auch aus Abb. 109.1c abzulesen ist,

$$z = 180° - \varphi - \delta. \qquad (109.3c)$$

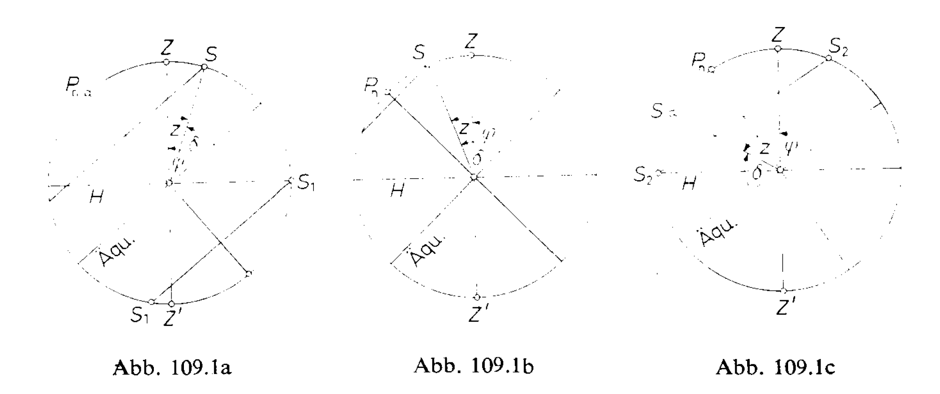


Abb. 109.1a Abb. 109.1b Abb. 109.1c

An Hand der Abbildungen 109.1a bis 109.1c läßt sich auch die **Sichtbarkeit der Sterne am Beobachtungsort** beurteilen: Erreicht ein Stern S_1 mit der Deklination $\delta = -(90° - \varphi) = (\varphi - 90°)$ in der oberen Kulmination gerade den Horizont, so bleibt er, wie die Spur $\overline{S_1 S_1}$ der Bahn zeigt, während des ganzen weiteren Verlaufes unter dem Horizont (Abb. 109.1a). Offenbar bleiben alle Sterne mit

$$\delta < (\varphi - 90°) \qquad (109.4a)$$

am Ort der Breite φ unsichtbar. Erreicht dagegen der Stern S_2 in der unteren Kulmination gerade den Horizont, so bleibt S_2 stets über dem Horizont (Abb. 109.1c). Sterne mit Deklinationen

$$\delta > (90° - \varphi) \qquad (109.4b)$$

sind also am Ort φ stets sichtbar; man nennt sie *Zirkumpolarsterne*.

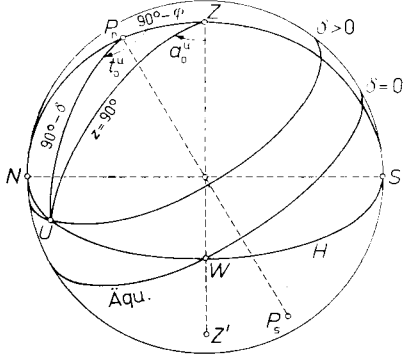


Abb. 109.2

Alle Sterne mit Deklinationen zwischen

$$(\varphi-90°) < \delta < (90°-\varphi) \tag{109.4c}$$

gelangen demnach sowohl über als auch unter den Horizont, gehen also für die Breite φ auf und unter.

Für die auf- und untergehenden Sterne sind noch weitere Angaben, nämlich Stundenwinkel t und Azimut a für Auf- und Untergang notwendig. Im *Auf-* und *Untergang* ist die Zenitdistanz $z = 90°$ (Abb. 109.2). Bezeichnet man die zugehörigen Stundenwinkel mit t_0, so folgt aus (109.1)

$$0 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t_0 \quad \text{oder} \quad \cos t_0 = -\tan\varphi \tan\delta. \tag{109.5}$$

Da der Kosinus doppeldeutig ist, liefert (109.5) zwei Lösungen für t_0, wovon eine dem Untergang, die andere dem Aufgang entspricht. Für einen auf der Nordhalbkugel liegenden Ort ($\varphi > 0$) und einen nördlich des Äquators laufenden Stern ($\delta > 0$) wird $\cos t_0 < 0$, d. h. t_0 liegt im zweiten oder dritten Quadranten. Dem Untergang kommt also ein Stundenwinkel $t_0^U > 90°$ ($> 6^h$), dem Aufgang ein Stundenwinkel $t_0^A < 270°$ ($< 18^h$) zu. Der *Tagbogen*, das ist der Weg, den der Stern über dem Horizont zurücklegt, ist also, wie auch Abb. 109.2 zeigt, $> 180°$ ($> 12^h$). Für südliche Sterne ($\delta < 0$) wird $\cos t_0 > 0$, woraus folgt, daß $t_0^U < 90°$ ($< 6^h$), $t_0^A > 270°$ ($> 18^h$) sein muß, d. h. der Tagbogen wird $< 180°$. Südlich des Äquators laufende Sterne sind also weniger als 12^h über dem Horizont. Für Äquatorsterne ($\delta = 0$) wird $\cos t_0 = 0$, also $t_0^U = 90°$ (6^h), $t_0^A = 270°$ (18^h), der Tagbogen beträgt also unabhängig von der Breite φ stets 12^h. Die Grenzwerte von $\cos t_0$ sind ± 1; wird $\cos t_0 = +1$, also $t_0 = 0$, so folgt aus $-\tan\varphi \tan\delta = +1$ sofort $\tan\delta = -\cot\varphi = -\tan(90°-\varphi)$ oder $\delta = -(90°-\varphi)$. Ebenso wird $\delta = 90°-\varphi$ für $\cos t_0 = -1$. Jenseits dieser Grenzen existieren keine reellen Auf- und Untergangspunkte.

Die von Süden aus gezählten *Azimute* der *Auf-* und *Untergangspunkte* liefert der Kosinussatz ($\triangle P_n UZ$ in Abb. 109.2)

$$\sin\delta = \cos z \sin\varphi - \sin z \cos\varphi \cos a_0,$$

woraus mit $z = 90°$, $\sin z = 1$ folgt

$$\cos a_0 = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}. \tag{109.6}$$

Für $\varphi > 0$ ist wieder zwischen $\delta \gtrless 0$ zu unterscheiden: Für $\delta > 0$ wird $\cos a_0 < 1$, also gilt $a_0^U > 90°$ und $a_0^A < 270°$; Auf- und Untergang finden also nördlich des Ost- bzw. Westpunktes statt (vgl. Abb. 109.2). Ist $\delta < 0$, so wird $\cos a_0 > 1$, also muß $a_0^U < 90°$, $a_0^A > 270°$ sein; die Auf- und Untergangspunkte sind also nach Süden verschoben. Für Äquator-

sterne ($\delta = 0$, $\cos a_0 = 0$, $a_0^{\mathrm{U}} = 90°$, $a_0^{\mathrm{A}} = 270°$) liegen die Auf- und Untergangspunkte in der Ost- bzw. Westrichtung.

Die Azimute $a_0^{\mathrm{A}}, a_0^{\mathrm{U}}$ werden, insbesondere bei der Sonne, auch als *Morgen-* bzw. *Abendweite* bezeichnet. — Für $\delta = 90° - \varphi$ wird $\cos a_0 = -1$, also ist $a_0^{\mathrm{A}} = a_0^{\mathrm{U}} = 180°$; Auf- und Untergang fallen im Nordpunkt zusammen. Für $\delta = (\varphi - 90°)$ wird $\cos a_0 = +1$ und $a_0^{\mathrm{A}} = a_0^{\mathrm{U}} = 0°$, Auf- und Untergangspunkt liegen im Südpunkt.

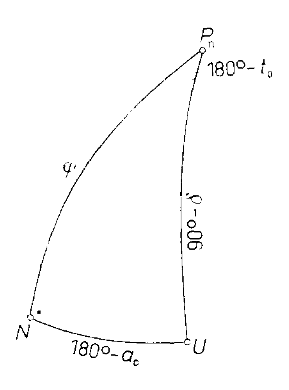


Abb. 109.3

Die Beziehungen (109.5) und (109.6) können übrigens auch aus dem bei N rechtwinkligen *Untergangsdreieck* P_nNU (Abb. 109.3) gewonnen werden. Die NEPERsche Regel liefert

$$\cos(180° - t_0) = \cot(90° - \varphi)\cot(90° - \delta) \quad \text{oder} \quad \cos t_0 = -\tan\varphi\tan\delta$$

und

$$\cos(90° - \delta) = \sin(a_0 - 90°)\sin(90° - \varphi) \quad \text{oder} \quad \cos a_0 = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

Für die Untersuchung der scheinbaren Bewegung der am Ort auf- und untergehenden Sterne wurde bisher nur zwischen $\delta \gtrless 0$ unterschieden. Der Bewegungsablauf verläuft aber sehr unterschiedlich, je nachdem $\delta \gtrless \varphi$, d. h. je nachdem ob der Stern nördlich oder südlich des Zenits kulminiert. Der Unterschied rührt daher, daß, wie auch die Abbildungen 109.1a und 109.1b zeigen, für $\delta < \varphi$ der Stern den Zenit umkreist, für $\delta > \varphi$ der Zenit jedoch außerhalb der Sternbahn bleibt.

Für die weitere Diskussion der Bewegungsabläufe werden noch die zeitlichen Änderungen $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$ von Zenitdistanz, Azimut und parallaktischem Winkel benötigt.

Für $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ gilt nach (109.2)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\cos\varphi\cos\delta\sin t}{\sin z};$$

mit Hilfe der aus dem Sinussatz folgenden Beziehungen

$$\sin q = \frac{\cos\varphi\sin t}{\sin z}, \quad \sin a = \frac{\sin t\cos\delta}{\sin z}$$

kann $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ auch in der Form

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \sin q\cos\delta = \cos\varphi\sin a \tag{109.7a}$$

geschrieben werden. Ähnlich findet man

$$\frac{da}{dt} = \frac{\cos q \cos \delta}{\sin z} \quad \text{und} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\cos a \cos \varphi}{\sin z}. \qquad (109.7b, c)$$

Weiter werden die Seitenkosinussätze für die Seiten $p = 90° - \delta$ und $\Phi = 90° - \varphi$ benötigt, die nach $\cos a$ bzw. $\cos q$ aufzulösen sind,

$$\cos a = \frac{\cos z \sin \varphi - \sin \delta}{\sin z \cos \varphi}, \quad \cos q = \frac{\sin \varphi - \cos z \sin \delta}{\sin z \cos \delta} \qquad (109.7d, e)$$

und schließlich noch die beiden Sinus-Kosinussätze

$$\sin z \cos a = -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t, \qquad (109.7f)$$

$$\sin z \cos q = \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t. \qquad (109.7g)$$

Kulminiert der Stern S südlich vom Zenit, ist also $\delta < \varphi$, so gelten die Ungleichungen $\sin \delta < \sin \varphi$ und $\sin \delta \cos z < \sin \varphi$; dann aber ist nach (109.7e) stets $\cos q > 0$, d. h. der parallaktische Winkel bewegt sich in den Grenzen $270° < q < 90°$. An den Grenzen ist $dq/dt = 0$, was nach (109.7c) nur für $\cos a = 0$, also unter Azimuten $a = 90°, 270°$ möglich ist. Der parallaktische Winkel erreicht also im 1. Vertikal ein Maximum, das sich nach (109.7a) wegen $\sin a = \pm 1$ zu $\sin q = \cos \varphi / \cos \delta$ ergibt. Die zugehörigen Werte für Zenitdistanz und Stundenwinkel folgen aus (109.7d) und (109.7f) zu

$$\cos z = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \quad \text{und} \quad \cos t = \frac{\tan \delta}{\tan \varphi}. \qquad (109.8a, b)$$

Die Gl. (109.8) liefern übrigens die zum Aufsuchen eines Sterns im 1. Vertikal notwendigen Daten.

Weiter erkennt man, daß, weil stets $\cos q > 0$ ist, nach (109.7b) da/dt nicht verschwinden kann, das Azimut durch alle Quadranten wächst. Schließlich erreicht nach (109.7a) die Zenitdistanzänderung dz/dt für die Azimute $a = 90°, 270°$, also im 1. Vertikal, einen Maximalwert.

Bei einer Kulmination nördlich des Zenits ist $\delta > \varphi$ und $\sin \delta > \sin \varphi$, also gilt die Ungleichung $\sin \delta > \cos z \sin \varphi$. Folglich ist nach (109.7d) stets $\cos a < 0$, also bewegt sich das Azimut in den Grenzen $90° < a < 270°$. An den Grenzen ist $da/dt = 0$, was nach (109.7b) nur möglich ist für $\cos q = 0$, also wenn $q = 90°$ bzw. $270°$ ist. An diesen Bahnstellen (*Elongation*) erreicht der Stern die größte Abweichung vom Meridian, die als die *größte Digression* bezeichnet wird.

Die größte Digression ist von großer Bedeutung für die Azimutbestimmung: Die seitliche Bewegung des Sternes verschwindet in der Elongation für kurze Zeit, so daß eine bequeme und genaue Einstellung möglich ist.

Die zugehörigen Werte für *Azimut*, *Zenitdistanz* und *Stundenwinkel* ergeben sich nach (109.7a), (109.7e) und (109.7g) zu

$$\sin a = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}, \quad \cos z = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}, \quad \cos t = \frac{\tan \varphi}{\tan \delta}. \tag{109.9}$$

Mit Hilfe der nach (109.9) gerechneten Werte für a, z und t kann ein Stern in seiner größten Digression aufgesucht werden.

Für Gestirne mit konstanter Deklination bleibt der oben dargestellte Bewegungsablauf immer derselbe. Führt der Stern relativ zum Fixsternhimmel noch eine eigene Bewegung aus, d. h. ändert der Stern seine Deklination, so ändert sich der Bewegungsablauf. Am deutlichsten tritt dies bei der Sonne auf, deren Deklination sich zwischen $-23{,}5° < \delta_{\odot} < +23{,}5°$ bewegt.

Die scheinbare Bahn der Sonne, die Ekliptik, ist gegen den Äquator um 23,5° (Schiefe der Ekliptik) geneigt. — Der Wechsel der Sonnendeklination läßt auch die Jahreszeiten erklären, und überdies ist mit der Deklinationsänderung auch eine Änderung der Rektaszension verbunden[93].

Bei der Darstellung des Bewegungsablaufes der Sonne sind also folgende Fälle zu unterscheiden:

$\delta_{\odot} > 0$: (21. März — 23. September): Ebenso wie bei Sternen mit positiver Deklination ist der Tagbogen $> 180°$ oder $> 12^h$, Auf- und Untergangspunkt sind vom Ost- bzw. Westpunkt aus nach Norden verschoben.

$\delta_{\odot} = 0$: (21. März und 23. September): Tagbogen $= 180°$ oder 12^h, Auf- und Untergang im Ost- bzw. Westpunkt *(Tag- und Nachtgleiche!)*.
$\delta_{\odot} < 0$: (23. September — 21. März): Tagbogen $< 180°$ oder $< 12^h$, Auf- und Untergang vom Ost- bzw. Westpunkt nach Süden verschoben.
Für $\delta_{\odot} = +23{,}5°$ erreicht die Sonne die größte Mittagshöhe (*Sommer-Solstitium*, 21. Juni) und für $\delta_{\odot} = -23{,}5°$ die geringste Mittagshöhe (*Winter-Solstitium*, 21. Dezember).

Ist $\delta_{\odot} < \varphi$, so wird die Meridianzenitdistanz der Sonne gleich $z = \varphi - \delta_{\odot}$; solange $\varphi > 23{,}5°$ ist, kann also z nicht verschwinden. Für Orte der Breite $\varphi = 23{,}5°$ gelangt die Sonne an einem Tag des Jahres (21. Juni, $\delta_{\odot} = 23{,}5°$) in den Zenit. Alle Orte der Breite $\varphi < 23{,}5°$ sehen die Sonne während eines Jahres zweimal im Zenit. Die Orte der Erde, die die Sonne im Zenit sehen, liegen innerhalb der durch die Parallele $\varphi = \pm 23{,}5°$ begrenzten Zone, den *Tropen*. — Die Sonne kann auch zirkumpolar werden. Nach (109.4b) ist dies erst für Breiten $\varphi \geqq 66{,}5°$ *(nördlicher Polar-*

[93] Vgl. z. B. A. Prey, a.a.O. S. 44

kreis) möglich. Am Nordpol ($\varphi = 90°$) ist die Sonne offenbar so lange zirkumpolar, als $\delta_\odot > 0$ ist (*Mitternachtssonne* vom 21. März bis 23. September), und nach (109.4a) ist die Sonne am Pol für $\delta_\odot < 0$ unsichtbar (*Polarnacht* vom 23. September — 21. März).

110. Sternzeit und Sonnenzeit

Als natürliche Einheit der Zeitmessung und -rechnung bietet sich die *Periode der Erdrotation* an, die an der scheinbaren täglichen Bewegung der Himmelskugel gemessen werden kann. Legt man auf der Erde einen Zeiger und an der Himmelskugel eine Zeitmarke (Nullmarke) fest, so sind Anfang und Ende einer vollen Erdrotation durch die Übereinstimmung von Zeiger und Zeitmarke festgelegt. Als Zeiger auf der Erde benützt man den Meridian eines beliebigen Ortes und als Zeitmarke am Himmel den Frühlingspunkt bzw. die Sonne. Beide Marken stehen zwar an der Himmelskugel nicht fest, doch können ihre Bewegungen kontrolliert werden. Die auf die beiden Zeitmarken bezogenen Zeitskalen nennt man *Sternzeit* bzw. *Sonnenzeit.*

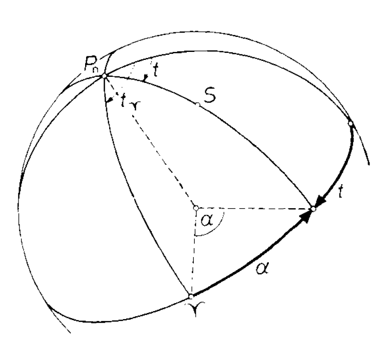


Abb. 110.1

Bei der *Sternzeit* ist die Zeiteinheit die Dauer der Erdrotation, der *Sterntag*, der in 24 Stunden Sternzeit usf. eingeteilt wird. Ein beliebiger Zeitpunkt im Ablauf des Sterntages ist durch die Phase der Rotation festgelegt, z. B. durch den Stundenwinkel t_Υ des Frühlingspunktes, bezogen auf den Himmelsmeridian eines Ortes P (Abb. 110.1). t_Υ nennt man die *Ortssternzeit θ des Ortes P.*

Aus technischen Gründen der Zeitmessung und Zeitbewahrung (Uhren!) ist der Frühlingspunkt nur dann als Zeitmarke geeignet, wenn seine Bewegung gleichförmig abläuft. Ohne auf die Bewegung des Frühlingspunktes näher einzugehen (vgl. z. B. A. Prey, a.a.O. S. 98 f.), sei dazu bemerkt, daß diese für viele praktische Zwecke als gleichförmig angesehen werden kann, obgleich dies, streng genommen, nicht zutrifft. Die Astronomie unterscheidet bei der Darstellung des Einflusses von Präzession und Nutation zwischen einem mittleren und wahren Frühlingspunkt ($\overline{\Upsilon}$ bzw. Υ) und nennt die darauf bezogenen Stundenwinkel $t_{\overline{\Upsilon}} = \overline{\theta}$ die mittlere, $t_\Upsilon = \theta$ die wahre Sternzeit. Die Differenz $\theta - \overline{\theta}$, die zwischen $\pm 1{,}2^s$ (der wahre Frühlingspunkt Υ bewegt sich infolge der Nutation periodisch vor und zurück, man spricht von der Nutation in Rektaszension) schwankt, kann den Jahrbüchern und Sternkatalogen entnommen werden.

Offenbar ist θ eine Ortszeit, weil allen östlich oder westlich von P gelegenen Orten eine andere Sternzeit zukommt. Den auf den (Himmels-) Meridian von Greenwich bezogenen Stundenwinkel t°_{Υ} des Frühlingspunktes nennt man die Ortssternzeit Greenwich θ_0. Abb. 110.2 zeigt, daß sich die Ortssternzeiten zweier Orte um deren Längenunterschied unterscheiden; insbesondere gilt

$$\theta - \theta_0 = \lambda, \tag{110.1}$$

wenn λ die ostwärts positiv gezählte Länge von P ist.

Kennt man sowohl für einen Ort P als auch für Greenwich die Ortssternzeit, so kann nach (110.1) die Länge gerechnet werden; eine Längenbestimmung erfordert also zwei Zeitbestimmungen.

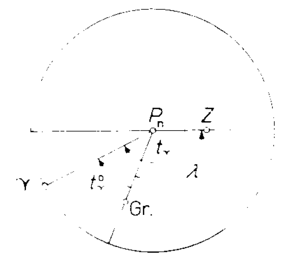


Abb. 110.2

Weiter zeigt Abb. 110.1 die schon angegebene Beziehung

$$\theta = \alpha + t, \tag{110.2}$$

d. h. Sternzeit = Rektaszension + Stundenwinkel. Für $t = 0$ wird $\theta = \alpha$, d. h. ein Stern gelangt in obere Kulmination, wenn die Sternzeit gleich seiner Rektaszension ist.

Daraus ergibt sich auch der Grundgedanke einer einfachen Zeitbestimmung: Die für die obere Kulmination eines Sternes beobachtete (fehlerhafte) Uhrzeit U ist um die Uhrkorrektion ΔU so zu verbessern, daß $U + \Delta U = \theta = \alpha$ wird; die gesuchte Uhrkorrektion ΔU wird also $\Delta U = \alpha - U$.

Bei der Untersuchung der scheinbaren täglichen Bewegung war der Stundenwinkel t als Maß für die Zeit benützt worden. Führt man jetzt die Sternzeit ein — der Stundenwinkel eines Sternes ist keine gleichförmig veränderliche Größe, für die Festlegung einer Zeitskala also in Strenge nicht geeignet —, so bleiben alle in [109] abgeleiteten Beziehungen gültig: Wurde für ein Ereignis der Stundenwinkel t berechnet, so gilt dafür die Sternzeit $\theta = \alpha + t$.

Neben der Sternzeit benützt die Astronomie noch die für das bürgerliche Leben unentbehrliche *Sonnenzeit*, die indirekt durch die Stellung der Sonne definiert wird.

Daß die Sternzeit für das tägliche Leben ungeeignet ist, kann an folgendem Beispiel gezeigt werden: An einem Beobachtungsort kulminieren zu jeder Jahreszeit um Mitternacht andere Sterne; die Sternzeit um Mitternacht, die jeweils gleich der Rektaszension der kulminierenden Sterne ist, ändert sich also ständig. Dasselbe gilt für den Mittag. — Für eine bürgerliche Zeitrechnung kommt also nur die Sonne in Frage, nach deren Stellung sich unser Tagesablauf richtet.

Die Sonne ist aber als Zeitmarke nur dann geeignet, wenn sich ihr Stundenwinkel $t_\odot$ gleichförmig ändert. Da sich die Sonne scheinbar in einer zum Äquator geneigten Ebene, der Ekliptik, und überdies mit ungleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, ist sie nicht unmittelbar als Zeitmarke geeignet.

Die Bewegung der Erde um die Sonne erfolgt nach den drei *Kepler-schen Gesetzen*, und die scheinbare Bewegung der Sonne um die Erde, die das Spiegelbild der ersteren ist, folgt daher denselben Gesetzen.

Die Astronomie benützt daher eine fingierte *mittlere Sonne*, die in derselben Zeit wie die wahre Sonne, aber mit gleichförmiger Geschwindigkeit, und zwar im Äquator, ihren Umlauf vollendet. Der Stundenwinkel $t_{\bar{\odot}}$ dieser fingierten Sonne ändert sich gleichförmig, und man nennt daher die Größe $t_{\bar{\odot}} + 12^h$ die *mittlere Ortszeit* (MOZ). — Die mittlere Ortszeit wird also von der unteren Kulmination der mittleren Sonne aus gezählt (Abb. 110.3). Einheit der mittleren Sonnenzeit ist der um Mitternacht beginnende *mittlere Sonnentag*, also die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden unteren Kulminationen der mittleren Sonne.

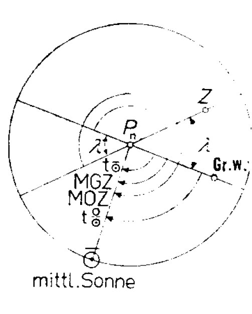


Abb. 110.3

Der mittlere Sonnentag ist in 24^h mittlerer Zeit usf. eingeteilt. Die mittlere Ortszeit für Greenwich (MGZ) ergibt sich zu (MGZ) $= t^{\circ}_{\bar{\odot}} + 12^h$, und nach (Abb. 110.3) gilt

$$(\text{MOZ}) - (\text{MGZ}) = \lambda. \tag{110.3}$$

Ein Zeitpunkt im Ablauf des mittleren Sonnentages kann auch durch den Stundenwinkel $t_\odot$ der wahren Sonne angegeben werden; dann ist (WOZ) $= t_\odot + 12^h$ die wahre Ortszeit, $t^{\circ}_\odot + 12^h$ die wahre Greenwicher Zeit (WGZ). Die Differenz

$$(\text{WGZ}) - (\text{MGZ}) = (\text{WOZ}) - (\text{MOZ}) = z \tag{110.4}$$

nennt man die *Zeitgleichung* und sagt dafür kurz:

Zeitgleichung = wahre Zeit — mittlere Zeit.

Der analytische Ausdruck für die Zeitgleichung ist sehr kompliziert[94]. Hier mag der Hinweis genügen, daß die Zeitgleichung im Laufe eines Jahres zwischen ±15 Minuten schwankt und für jeden Zeitpunkt aus Jahrbüchern entnommen werden kann.

Sowohl die Sternzeit als auch die zuletzt definierte mittlere Sonnenzeit sind als Stundenwinkel einer Zeitmarke ortsabhängig, also *Ortszeiten.*

---

[94] Vgl. z. B. A. Prey, a.a.O. S. 47 f.

Um für die zivile Zeitrechnung in mittlerer Sonnenzeit den unbequemen Zeitwechsel von Ort zu Ort zu vermeiden, hat man *Zonenzeiten*, besser gesagt *Zeit-Zonen* eingeführt. Diese Zonen sind 15° bzw. 1^h breit, die Zonenzeit entspricht der Zeit des Mittelmeridians (Abb. 110.4). In der Zone I, begrenzt durch die Meridiane $\lambda = \pm 7{,}5°$, gilt die mittlere *Greenwicher Zeit* oder *Weltzeit* (W.Z.). Der Zone II, begrenzt durch die Meridiane $\lambda = +7{,}5°$ und $\lambda = +22{,}5°$, kommt die Zeit des Mittelmeridians $\lambda = +15°$ zu, die *Mitteleuropäische Zeit* (MEZ), die sich von der Weltzeit um 1^h unterscheidet; also gilt MEZ = = WZ + 1^h. In der Zone III mit dem Mittelmeridian $\lambda = +30°$ gilt die *osteuropäische Zeit* (OEZ), wobei OEZ = MEZ + 1^h = WZ + 2^h ist. — Für die westlich von Greenwich liegenden Zonen ist die Zeitdifferenz negativ anzusetzen.

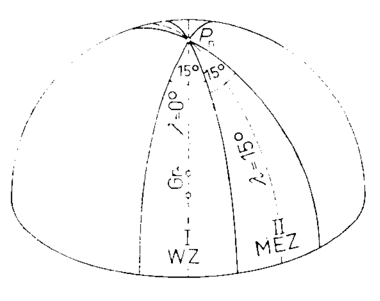


Abb. 110.4

Das Vorzeichen ergibt sich wie folgt: Kulminiert die mittlere Sonne in P um 12^h MOZ, so hat die Kulmination in einem östlich davon liegenden Ort bereits stattgefunden, d. h. es ist dort später. — Mit der Einführung der Zonenzeit hängt auch der an der Datumsgrenze eintretende Datumswechsel zusammen: Überschreitet man die im wesentlichen entlang des Meridians der Länge 180° verlaufende Datumsgrenze, so wird, wenn die Uhr jeweils auf Zonenzeit gestellt wurde, ein Datumswechsel notwendig.

Zwischen der mittleren Ortszeit (MOZ) und den verschiedenen Zonenzeiten endlich gelten die Beziehungen

$$\text{MOZ} = \text{WZ} + \lambda = \text{MEZ} - 1^h + \lambda = \text{OEZ} - 2^h + \lambda \text{ usf.} \qquad (110.5)$$

Schließlich ist noch die Aufgabe der Zeitumwandlung zu lösen, die bei astronomischen Beobachtungen häufig auftritt. Die Beziehung zwischen den beiden Zeiteinheiten, dem mittleren Sonnentag und dem Sterntag, ergibt sich aus folgender Überlegung: Die Sonne bewegt sich gegenüber den Fixsternen rückläufig, und zwar um 360° im Jahr. Die tägliche Bewegung der mittleren Sonne beträgt daher durchschnittlich $360° : 365^1/_4 = 59{,}1'$; für eine Drehung um diesen Winkel benötigt die Erde rund $24^h/360 = 4^m$. Der mittlere Sonnentag dauert also länger als der Sterntag. Der genaue Wert lautet: 1 mittlerer Sonnentag = $24^h\ 03^m\ 56{,}55536^s$ Sternzeit; für eine nach Sternzeit regulierte Uhr verspätet sich also die Kulmination der mittleren Sonne täglich um $3^m\ 56{,}55536^s$. Berücksichtigt man die Präzessionsbewegung des (mittleren) Frühlingspunktes, so bleibt die mittlere Sonne pro mittleren Sonnentag um 3548,33040″ gegenüber dem (mittleren) Frühlingspunkt zurück.

Die beiden Zeitmarken stimmen also nach einem Zeitintervall von $360 \cdot 60 \cdot 60/3548{,}33040 = 365{,}24220$ mittl. Sonnentagen, dem *tropischen Jahr*, überein. Da der Frühlingspunkt in diesem Zeitraum eine Umdrehung mehr ausführt als die Sonne, gilt die Beziehung

$$365{,}2422 \text{ mittl. Sonnentage} = 366{,}2422 \text{ Sterntage.}$$

Damit können *Zeitintervalle* umgewandelt werden, wofür meist Hilfstafeln benützt werden.[95] Für die Umwandlung von Sternzeit in Sonnenzeit und umgekehrt ist noch eine gegenseitige *Zuordnung der Zeitskalen* zumindest für einen Zeitpunkt erforderlich. Um die Berechnungen möglichst einfach zu halten, geben die Jahrbücher und Sternkataloge für jeden Tag um 0^h WZ die Greenwicher Sternzeit Δ_0 an. — Weiter ist noch die mittlere Greenwicher Sternzeit $\bar{\Delta}_0$ gegeben. Die Differenz $\Delta_0 - \bar{\Delta}_0$, deren Änderung z. B. bei genauen astronomischen Zeit- und Längenbestimmungen berücksichtigt werden muß, ist im folgenden nicht weiter beachtet.

Mit den Bezeichnungen

- T_0 Weltzeit (W. Z.) bzw. mittl. Greenwicher Zeit (MGZ),
- T mittlere Ortszeit (MOZ),
- θ_0 Greenwicher Ortssternzeit,
- θ Ortssternzeit,
- Δ_0 Greenwicher Ortssternzeit um 0^h W. Z.,

lassen sich alle Zeitumwandlungen auf zwei Aufgaben zurückführen.

Ist T_0 gegeben und θ_0 gesucht, so lautet die Lösung

$$\theta_0 = \Delta_0 + T_0(1+k) = \Delta_0 + T_0 + kT_0. \qquad (110.6)$$

Dabei bedeutet kT_0 die Umwandlung der mittleren Zeit T_0 in Sternzeit. Die Reduktion, die im Maximum $3^m\ 56{,}555^s$ erreicht, kann den schon erwähnten Tafeln entnommen werden. — Ist für den Ort P der Länge λ die mittlere Ortszeit T gegeben, die Ortssternzeit θ gesucht, so bildet man $T_0 = T - \lambda$, rechnet θ_0 nach (110.6) und erhält $\theta = \theta_0 + \lambda$. Ist umgekehrt θ_0 gegeben, so erhält man T_0 aus

$$T_0 = \frac{\theta_0 - \Delta_0}{1+k} = (\theta_0 - \Delta_0)(1-k) = \theta_0 - \Delta_0 - k(\theta_0 - \Delta_0). \qquad (110.7)$$

Hierbei bedeutet $k(\theta_0 - \Delta_0)$ die Reduktion des Sternzeitintervalls $\theta_0 - \Delta_0$ auf mittlere Zeit, die maximal $3^m\ 55{,}909^s$ erreicht und ebenfalls aus

[95] Vgl. z. B. F. G. Gauss: Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln, 411—420, Auflage 1961. Auch die Jahrbücher und Sternkataloge enthalten meist Hilfstafeln für die Zeitumwandlung.

Tafeln entnommen werden kann. Ist θ gegeben und T gesucht, so bildet man $\theta_0 = \theta - \lambda$, rechnet T_0 nach (110.7) und erhält $T = T_0 + \lambda$. — Ist statt T die Zonenzeit verlangt, so ist (110.5) zu beachten.

111. Sonnenuhren

Das Grundprinzip der Sonnenuhr ist einfach: Der Schatten eines parallel zur Weltachse aufgestellten Stabes zeigt auf einer beliebigen Ebene die wahre Sonnenzeit. Um die mittlere Ortszeit zu erhalten, ist nach (110.4) die Zeitgleichung zu berücksichtigen, und gemäß (110.5) ergibt sich schließlich die entsprechende Zonenzeit.

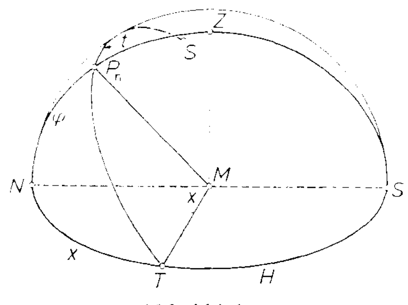


Abb.111.1

Ohne auf Einzelheiten einzugehen[96], sollen einige der bekanntesten Sonnenuhrtypen und deren Konstruktion erläutert werden. Bei allen Sonnenuhren dient der oben erwähnte Schattenstab als Zeiger; dagegen kann die Zifferblattebene verschieden angeordnet werden. — Am einfachsten ist die *Äquatorialuhr* mit einer Zifferblattebene parallel zum Äquator: Da die wahre Sonnenzeit gleich $t_{\odot} + 12^h$ ist, ergeben sich die Stundenlinien des Zifferblattes einfach durch Abtragen der Stundenwinkel $t_{\odot}$, und zwar bei Norden beginnend (die Richtung zum Nordpunkt entspricht der Mittagslinie, also 12^h) für $t = 15°$ ($\hat{=} 13^h$), $30°$ ($\hat{=} 14^h$) usf. Für die Vormittagsstunden sind die Winkel entgegengesetzt abzutragen.

Bei der *Horizontaluhr* ist das Zifferblatt parallel zum Horizont. In Abb. 111.1 ist H der Horizont, $\overline{MP_n}$ die Richtung der Weltachse (Erdrotationsachse), S die Sonne zur Zeit t Stunden vor der Kulmination. Der Stundenkreis der Sonne schneidet den Horizont in T, also ist $\overline{MT}$ die Schattenrichtung für den Zeitpunkt t^h. Wird der Winkel, den die Schattenlinie mit der Mittagslinie einschließt, mit x bezeichnet, so folgt aus dem

[96] Von den zahlreichen Werken über Sonnenuhren seien folgende genannt. A. Hnatek, Über die Berechnung einer Sonnenuhr bei beliebiger Neigung und beliebigem Azimut der Uhrfläche, Springer Verlag, Wien 1950; L. M. Loske, Die Sonnenuhren, Kunstwerke der Zeitmessung und ihre Geheimnisse, Springer-Verlag, Verständliche Wissenschaft, Band 69, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959; K. Schütte, Sonnenuhren, Berechnung, Anfertigung, Anwendung, Deva-Fachverlag, Stuttgart 1959.

bei N rechtwinkligen $\triangle NTP_n$ nach der NEPERschen Regel

$$\tan x = \tan t \sin \varphi. \tag{111.1}$$

Setzt man für t der Reihe nach die Werte 1^h, 2^h, 3^h, ... bzw. 15°, 30°, 45° usf., so erhält man nach (111.1) die zugehörigen Winkel x, die für die Vormittagsstunden nach links, für die Nachmittagsstunden nach rechts symmetrisch von der Nordrichtung (Mittagsschattenlinie) aufzutragen sind.

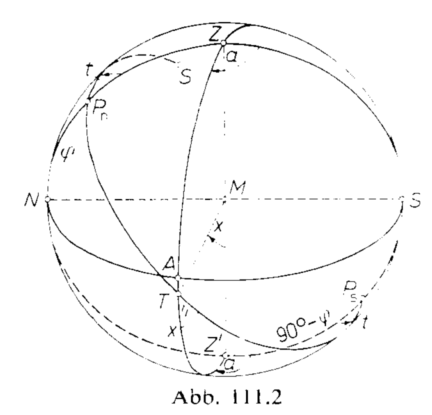


Abb. 111.2

Bei der *Vertikaluhr* steht die Zifferblattebene senkrecht zum Horizont. Das Azimut der Zifferblattebene sei a und ZAZ' der entsprechende Vertikalkreis an der Himmelskugel (Abb. 111.2). Offenbar ist die Schattenrichtung im wahren Mittag stets vertikal. Steht die Sonne S im Osten t^h vor der Kulmination, so schneidet der Stundenkreis der Sonne den Vertikal ZAZ' in T, und $\overline{MT}$ ist die Schattenrichtung für diesen Zeitpunkt. $\overline{MT}$ bildet mit der Vertikalen $\overline{MZ'}$ den Winkel $Z'MT = x$, der sich aus $\triangle TZ'P_s$ bestimmen läßt. Mit den Bezeichnungen in Abb. 111.2 findet man aus

$$\sin \eta \cos x = \cos t \sin a + \sin t \cos a \sin \varphi \quad \text{und} \quad \sin \eta \sin x = \sin t \cos \varphi$$

für x durch Division

$$\tan x = \frac{\sin t \cos \varphi}{\cos t \sin a + \sin t \cos a \sin \varphi}. \tag{111.2}$$

Für die Vormittagsstunden sind die Winkel x links, für die Nachmittagsstunden rechts der Vertikalen aufzutragen. Eine vertikale *Mittags-* oder *Süduhr* liegt vor, wenn das Azimut $a = 90°$ beträgt, der Vertikal ZAZ' also dem 1. Vertikal entspricht. Aus (111.2) folgt dann für die Winkel x

$$\tan x = \tan t \cos \varphi. \tag{111.3}$$

In diesem Falle ist, wie in allen Fällen für $-90° < a < 90°$, $\overline{MP_s}$ als Zeiger zu verwenden. Für eine *Norduhr* folgt für $a = 270°$ aus (111.2)

$$\tan x = -\tan t \cos \varphi, \tag{111.4}$$

wobei $\overline{MP_n}$ als Zeiger dient, die Vormittagsstunden nach rechts (Westen), die Nachmittagsstunden dagegen nach links aufzutragen sind. — Die

Horizontaluhr und die vertikale Mittagsuhr funktionieren das ganze Jahr über. Die Norduhr natürlich nur so lange, als die Nordwand Sonne hat. Mitunter findet man auch noch Morgen- (Ost-) und Abend- (West-) Uhren in den Azimuten $a = 180^\circ$ bzw. 0°, die aber nur für die Vormittags- bzw. Nachmittagsstunden brauchbar sind.[97]

112. Anwendung der Grundformeln der sphärischen Astronomie

Als Beispiel für die Anwendung der bisher abgeleiteten Grundformeln und Beziehungen werden im folgenden die Programmvorbereitungen für einige Beobachtungsverfahren der geodätischen Astronomie dargestellt. Das Ziel ist dabei, für einen durch seine geographischen Koordinaten festgelegten Ort die für einen bestimmten Zeitpunkt gültigen Horizontalkoordinaten eines Gestirnes anzugeben, d. h. die zum Aufsuchen des Gestirnes notwendigen *Einstelldaten* vorauszuberechnen.

Ist das Azimut eines terrestrischen Zielpunktes bekannt, so kann ein Gestirn mit Hilfe eines Theodolits aufgesucht werden: Der Horizontalkreis läßt das Azimut, der Höhenkreis die Zenitdistanz angeben.

1. Am 26. Mai 1965[98] soll am Ort $\varphi = 48^\circ\ 09{,}0'$, $\lambda = 46^m\ 17^s = 11^\circ\ 34'\ 15''$ in der Zeit von 20^h bis 23^h MEZ der Polarstern (α-ursae minoris) beobachtet werden. Obgleich der Polarstern leicht aufzufinden ist, wird man, insbesondere bei größeren Beobachtungsinstrumenten (Astronomisches Universal), auf Einstelldaten nicht verzichten. Gesucht sind die Horizontalkoordinaten a_n (Nordazimut) und z. Dafür sind zunächst die für 20^h und 23^h MEZ gültigen Ortssternzeiten θ zu berechnen. Für 20^h MEZ ($T_0 = 19^h$) erhält man nach (110.6) die Ortssternzeit zu

Δ_0	: 16^h	13^m	24^s	(für 26. Mai 1965, 0^h W. Z. aus dem Jahrbuch entnommen[99])
$+T_0$	: 19^h			
$+$Red.:		3^m	07^s	(aus Tabelle!)
θ_0	: 11^h	16^m	31^s	
$+\lambda$	:	46^m	17^s	
θ	: 12^h	02^m	48^s	

97) Vgl. z. B. A. Prey, a.a.O. S. 75.
98) Die Astronomen schreiben das Datum meist in der Form 1965 Mai 26.
99) Sämtliche Jahrbuchangaben entstammen den *Apparent Places of Fundamental Stars.*

In gleicher Weise ergibt sich für 23^h MEZ die Ortssternzeit zu $\theta = 15^h\ 03^m\ 18^s$. Damit können für zwei Zeitpunkte (Anfang und Ende der Beobachtung) Azimut a_n und Zenitdistanz z berechnet werden. Mit $\alpha = 1^h\ 58^m\ 10^s$ und $\delta = 89°\ 05'\ 58''$ ($p = 54'\ 02''$) findet man nach (108.3c) und (108.1a) die Werte

$$\theta = 12^h\ 02^m\ 48^s : a_n = 359°\ 21'\ 31'', \quad z = 42°\ 38'\ 27'';$$
$$\theta = 15^h\ 03^m\ 18^s : a_n = 0°\ 22'\ 20'', \quad z = 42°\ 42'\ 55''.$$

In größte Digression gelangt der Polarstern während der vorgesehenen Beobachtungszeit nicht; hierfür ergibt sich nämlich nach (109.9):

$$\text{Ost-Digression:} \quad \theta = 20^h\ 02^m\ 11^s; \quad a_n = 1°\ 21'\ 00'',$$
$$\text{West-Digression:} \quad \theta = 7^h\ 54^m\ 09^s; \quad a_n = 358°\ 39'\ 00''.$$

Indessen bietet sich für den Polarstern wegen seiner geringen Poldistanz ($p < 1°$) statt der strengen Berechnung noch ein bequemes Näherungsverfahren an. Aus Abb. 112.1 folgt nach dem Sinussatz

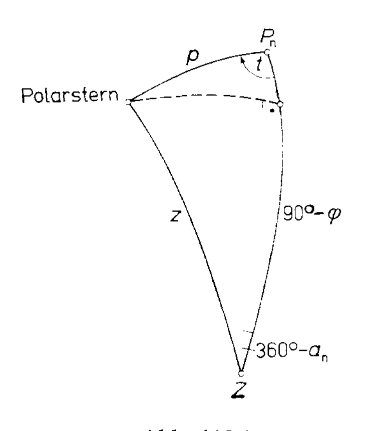


Abb. 112.1

$$\frac{\sin z}{\sin p} = \frac{\sin t}{\sin(360° - a_n)}$$

oder

$$\sin a_n = -\frac{\sin p}{\sin z} \sin t.$$

Führt man die Näherungen $\sin a_n \approx a_n$, $\sin p \approx p$ und $z \approx 90° - \varphi$ ein, so wird

$$a_n = -\frac{p}{\cos\varphi} \sin t. \qquad (112.1)$$

In ähnlicher Weise findet man für die Zenitdistanz die Näherung

$$z = (90° - \varphi) - p \cos t. \qquad (112.2)$$

Mit den oben benützten Ausgangswerten erhält man nach (112.1) und (112.2) folgende Sonderwerte

$$t = 0^h\ : a_n = 0°\ 00' \quad z = 40°\ 57',$$
$$t = 6^h\ : a_n = -1°\ 20{,}8' \quad z = 41°\ 51',$$
$$t = 12^h : a_n = +0°\ 00' \quad z = 42°\ 45',$$
$$t = 18^h : a_n = +1°\ 20{,}8' \quad z = 41°\ 51'.$$

Die Gleichungen (112.1) und (112.2) können auch graphisch dargestellt werden, wodurch sehr bequeme und genügend genaue *Ephemeriden* entstehen. Wird in (112.1) $\sin t = x$ gesetzt, so liegt die Gleichung einer

Geraden vor. Trägt man $\sin t = x$ als Abszisse, a_n als Ordinate auf (Abb. 112.2), so läßt sich a_n ohne Rechnung für jeden Wert von t — bei geeigneter Bezifferung der Abszissenachse auch für jeden Wert von θ — entnehmen. — In ähnlicher Weise kann die Zenitdistanz durch graphische Darstellung von (112.2) bestimmt werden.

2. Für eine Zeitbestimmung aus Zenitdistanzen (vgl. [113]) sollen am gleichen Ort am 27. Mai 1965 in der Zeit nach 20^h MEZ Sterndurchgänge im östlichen Teil des 1. Vertikals beobachtet

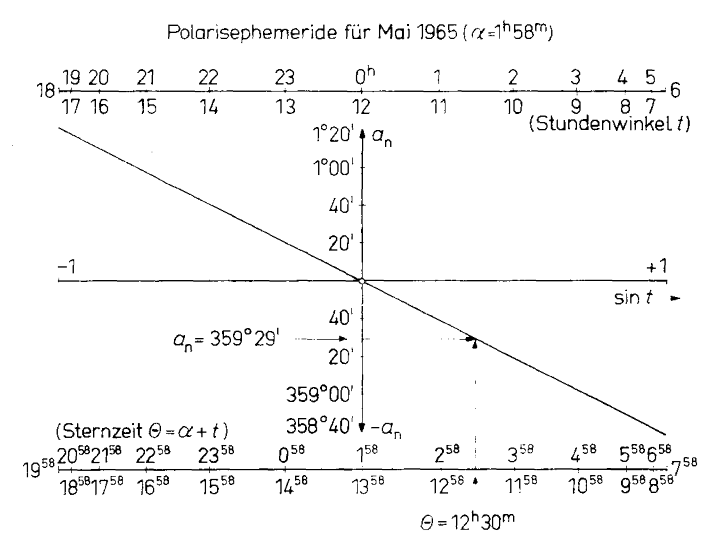


Abb. 112.2

werden. Mit Hilfe einer Sternkarte wurden u. a. folgende Sterne als geeignet ausgewählt:

$$\text{Nr. 555: } \beta\text{-Bootis: } \alpha = 15^h\,00{,}7^m, \quad \delta = 40^\circ\,31{,}7'$$

$$\text{Nr. 527: } \lambda\text{-Bootis: } \alpha = 14^h\,15{,}1^m, \quad \delta = 46^\circ\,14{,}9'$$

usf.

Die Aufgabe lautet jetzt, für jeden der Sterne die Zenitdistanz und die Ortssternzeit θ für den Durchgang im östlichen Teil des 1. Vertikals zu berechnen. Mit $a_n = 90^\circ$ ergibt sich nach (109.8)

$$\beta\text{-Bootis: } z = 29^\circ 16{,}0'; \quad t = 21^h\,19{,}9^m; \quad \theta = 12^h\,20{,}6^m,$$

$$\lambda\text{-Bootis: } z = 14^\circ 07{,}7'; \quad t = 22^h\,37{,}3^m; \quad \theta = 12^h\,52{,}4^m.$$

Die Bestimmung des Stundenwinkels aus dem Kosinus bereitet dabei keine

Schwierigkeiten: Da $\cos t > 0$ ist, kann t für den Durchgang auf der Ostseite des 1. Vertikals nur im 4. Quadranten liegen.

Ist nur eine nach mittlerer Sonnenzeit regulierte Uhr vorhanden, so ist θ noch in MEZ umzuwandeln; z. B. wird für β-Bootis:

θ	$= 12^h\ 20{,}6^m$	
$-\lambda$	$= -\ \ 46{,}3^m$	
θ_0	$= 11^h\ 34{,}3^m$	
$-\Delta_0$	$= 16^h\ 17{,}4^m$	(aus dem Jahrbuch)
$\theta_0 - \Delta_0$	$= 19^h\ 16{,}9^m$	
$-$Red.	$= -\ \ 03{,}2^m$	(Tabelle)
(WZ) T_0	$= 19^h\ 13{,}7^m$	
MEZ	$= 20^h\ 13{,}7^m$	

In diesem Zusammenhang soll noch die Aufgabe der Sternidentifizierung an einem Beispiel gezeigt werden: Gelegentlich der am 27. Mai 1965 ausgeführten Zeitbestimmung mußten wegen aufkommender Bewölkung auch nicht vorausberechnete Sterne, teilweise auch außerhalb des 1. Vertikals, beobachtet werden. Dabei konnte ein Stern, beobachtet zur Sternzeit $\theta = 13^h\ 03{,}0^m$, im Azimut $88^\circ\ 52{,}5'$ und in der Zenitdistanz $z = 47^\circ\ 11{,}5'$ an Hand der Sternkarte nicht einwandfrei identifiziert werden. Mit Hilfe der nach (108.2c) und (108.1b) gerechneten genäherten Werte für $t = 20^h\,04{,}0^m$ bzw. $\alpha = \theta - t = 16^h\ 59{,}0^m$ und $\delta = 30^\circ\ 58{,}4'$ konnte der Stern eindeutig als Nr. 634 (ε-Herculis) identifiziert werden.

Ein wichtiges Hilfsmittel für die Identifizierung ist auch die *scheinbare Helligkeit* der Sterne. Die Astronomie drückt die Helligkeit durch Größenklassen m derart aus, daß zwischen zwei Sternen der Größe m und $m+1$ ein konstanter Helligkeitsunterschied besteht, wobei die Größenklassen mit abnehmender Helligkeit anwachsen (vgl. z. B. F. Becker, Einführung in die Astronomie, Bibliograph. Institut Mannheim, 4. Aufl. 1960, S. 69 f.). Der hellste Fixstern, Sirius, hat die Größenklasse $-1^m{,}58$, der Polarstern $2^m{,}12$. Mit bloßem Auge sind Sterne bis zur 5. Größenordnung erkennbar.

3. Am 28. Mai 1965 soll am gleichen Ort ab etwa 20^h MEZ eine Breitenbestimmung aus Meridianzenitdistanzen (vgl. [113]) ausgeführt werden. Auszuwählen sind Sterne in oberer und unterer Kulmination mit Zenitdistanzen $z < 70^\circ$ und Deklinationen $\delta < 80^\circ$.

Zenitdistanzen $z > 70^\circ$ meidet man wegen der Refraktionsfehler, Deklinationen $\delta > 80^\circ$ einmal wegen der Instrumentalfehler und zum anderen wegen der sehr langsamen Bewegung der polnahen Sterne.

Die Grenzen des zulässigen Deklinationsbereiches der Sterne können aus Abb. 112.3 abgelesen werden. Für die obere Kulmination, südlich des Zenits, folgt aus $z = \varphi - \delta$ mit $z_{\max} = 70^\circ$ die südliche Grenzdeklination zu $\delta = z - \varphi = -21^\circ\,51'$, d. h. es muß $\delta > -21^\circ\,51'$ sein. Für die obere Kulmination nördlich des Zenits lautet die Deklinationsgrenze $\delta < 80^\circ$. In der unteren Kulmination gilt $z = 180^\circ - \varphi - \delta$, also muß wegen $z_{\max} < 70^\circ$ offenbar $\delta > 61^\circ\,51'$ bleiben, d. h. für die Beobachtung in unterer Kulmination sind nur Sterne des Deklinationsbereiches $61^\circ\,51' < \delta < 80^\circ$ geeignet. — Die Grenzen des Deklinationsbereiches lauten also für obere Kulmination $-21^\circ\,51' < \delta < 80^\circ$ und für untere Kulmination $61^\circ\,51' < \delta < 80^\circ$.

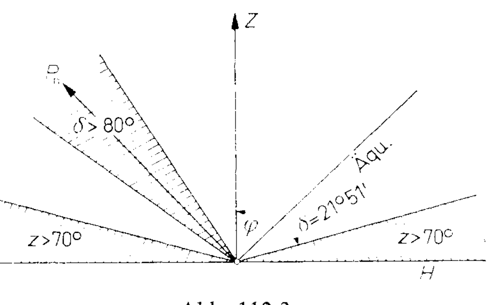


Abb. 112.3

Für den Rektaszensionsbereich ist zu beachten, daß in der oberen Kulmination $t = 0$, also $\theta = \alpha$, für die untere Kulmination $t = 12^h$, also $\theta = \alpha + 12^h$ gilt. Soll also in der Zeit $\theta_1 = 12^h\,10{,}7^m$ ($= 20^h$ MEZ) und $\theta_2 = 15^h\,11{,}2^m$ ($= 23^h$ MEZ) beobachtet werden, so sind nur Sterne des folgenden Rektaszensionsbereiches geeignet:

$$\text{obere Kulmination:} \qquad 12^h\,11^m < \alpha < 15^h\,11^m,$$
$$\text{untere Kulmination:} \qquad 0^h\,11^m < \alpha < 3^h\,11^m.$$

An Hand der scheinbaren Örter der Fundamentalsterne 1965 ergibt sich bei Beschränkung auf Größenklassen $m < 6.0$ das in Tabelle 112.1 eingetragene Sternprogramm:

Tabelle 112.1

Nr.	Name	Rektaszension α	Deklination δ	Sternzeit für Kulminatio θ	Zenitdistanz z_s = südlich z_n = nördlich
461	6 Canum venat.	$12^h\,24{,}1^m$	$39^\circ\,12{,}9'$	$12^h\,24{,}1^m$	$z_s = 8^\circ 56{,}1'$
1324	25 Virginis	$12^h\,35{,}0^m$	$-5^\circ\,38{,}5'$	$12^h\,35{,}0^m$	$z_s = 53^\circ 47{,}5'$
24	21 Cassiopeiae	$0^h\,43{,}2^m$	$74^\circ\,47{,}6'$	$12^h\,43{,}2^m$	$z_n = 57^\circ 03{,}4'$
			usf.		

4. Für den 29. Mai 1965 ist am gleichen Ort eine genäherte Breitenbestimmung aus der Mittagshöhe der Sonne vorgesehen. Gesucht sind

die mittlere Zeit (MEZ) und die Zenitdistanz für die Kulmination der Sonne. Im Zeitpunkt der oberen Kulmination der Sonne ist $t_\odot = 0$, also $\alpha_\odot = \theta$; es ist also $\alpha_\odot$ aus einem Jahrbuch zu entnehmen und $\theta = \alpha_\odot$ in MEZ umzurechnen. Nach (110.7) lautet der Rechengang dafür:

$\theta = \alpha_\odot$	$= \;\; 4^h\ 25^m\ 20^s$	für $11^h\ 14^m$ W. Z.
$-\lambda$	$= \quad 46^m\ 17^s$	
θ_0	$= \;\; 3^h\ 39^m\ 03^s$	
$-\Delta_0$	$= 16^h\ 26^m\ 11^s$	(dem Jahrbuch für 0^h W. Z. entnommen)
$\theta_0 - \Delta_0$	$= 11^h\ 12^m\ 52^s$	
Red.	$= - \quad 1^m\ 50^s$	(Tabelle)
T_0	$= 11^h\ 11^m\ 02^s$	
MEZ	$= 12^h\ 11^m\ 02^s$	

Bei der Entnahme der Rektaszension $\alpha_\odot$ ist zu beachten, daß die Kulmination der mittleren Sonne um 12^h MOZ, also zur MGZ (WZ) $= 12^h - \lambda = 11^h\ 13^m\ 43^s$ erfolgt. Für eine genaue Interpolation von $\alpha_\odot$ hätte man auch noch die Zeitgleichung zu berücksichtigen.

Mitunter wird für diese Aufgabe die folgende, etwa gleich bequeme Lösung angegeben: Die Kulmination der mittleren Sonne erfolgt um 12^h MOZ; die wahre Sonne kulminiert vor bzw. nach der mittleren Sonne, je nachdem die Zeitgleichung positiv oder negativ ist. Die Rechnung lautet:

Mittlere Sonne in Kulmination:	$12^h\ 00^m\ 00^s$ MOZ
Zeitgleichung für $11^h\ 14^m$ WZ:	$+ \quad 2^m\ 41^s$
wahre Sonne in Kulmination:	$11^h\ 57^m\ 19^s$ MOZ
$+\ 1^h - \lambda^h$	$13^m\ 43^s$
Kulminationszeit in MEZ	$12^h\ 11^m\ 02^s$

Die wahre Sonne kulminiert also am 29. Mai 1965 um $12^h\ 11^m\ 02^s$ MEZ. Die Zenitdistanz der Sonne $z_\odot = \varphi - \delta_\odot$ ergibt sich mit dem für $11^h\ 14^m$ genähert interpolierten Wert von $\delta_\odot = 21°\ 39{,}7'$ zu $z_\odot = 26°\ 29{,}3'$.

113. Einige Verfahren der astronomischen Zeit-, Orts- und Azimutbestimmung

In der Geodäsie werden astronomische Breiten, Längen und Azimute für die absolute Lagerung und Orientierung von Triangulationsnetzen benötigt. Bei fast allen Orts- und Azimutbestimmungen ist auch die

Kenntnis der Zeit notwendig, die zuerst genannte Aufgabe der Zeitbestimmung tritt also nicht als selbständige, sondern als zusätzliche Aufgabe auf.

Als selbständige Aufgabe tritt die Zeitbestimmung an Observatorien und Zeitdienststationen, wie z. B. am Deutschen Hydrographischen Institut in Hamburg und am Geodätischen Institut Potsdam, auf: Die für die Zeitbewahrung bzw. die Zeitsignalsendungen benützten Quarzuhren sind laufend durch genaue astronomische Zeitbestimmungen zu kontrollieren.

Im folgenden werden einige einfache, für die Lösung der Aufgabe typische Verfahren in den theoretischen Grundlagen dargestellt. Auf Einzelheiten der Beobachtungs- und Auswertetechnik, instrumentelle Hinweise und eine Darstellung der erreichbaren Genauigkeit muß dabei allerdings verzichtet werden.

Für eine eingehende Information über die Beobachtungsverfahren der geodätischen Astronomie sind zu empfehlen: F. Mühlig, Grundlagen und Beobachtungsverfahren der Astronomisch-geodätischen Ortsbestimmung, Sammlung Wichmann, Bd. 20, Berlin 1960. R. Roelofs, Astronomy Applied to Land Surveying. N.V. Wed. J. Ahrend & Zoon, Amsterdam 1950. Th. Niethammer, Die genauen Methoden der Astronomisch-Geographischen Ortsbestimmung, Birkhäuser Basel, 1947. M. Waldmeier, Leitfaden der Astronomischen Orts- und Zeitbestimmung, 2. Aufl. H. R. Sauerländer, Aarau 1958. – Eine analytische Diskussion der günstigsten Beobachtungsumstände für alle Beobachtungsverfahren enthält die Dissertation von E. Herzog, Die Aufgaben der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung in systematischer Behandlung. Verh. d. Naturforsch. Ges. in Basel, Bd. LVIII, 1947.

Eine Zeitbestimmung ist gleichbedeutend mit der Bestimmung der *Uhrkorrektion* ΔU; dabei ist ΔU wie folgt definiert:

$$\text{Uhrzeit } U + \text{Uhrkorrektion } \Delta U = \text{Sollzeit.}$$

Im Falle einer nach Sternzeit regulierten Uhr lautet die Bestimmungsgleichung für ΔU also

$$U + \Delta U = \theta. \qquad (113.1a)$$

Die Anordnung einer astronomischen Zeitbestimmung[100] folgt aus der fundamentalen Beziehung $\theta = \alpha + t$. Wird zur Uhrzeit U ein Stern $S(\alpha, \delta)$ beobachtet — für die Entnahme von α und δ aus einem Jahrbuch genügt

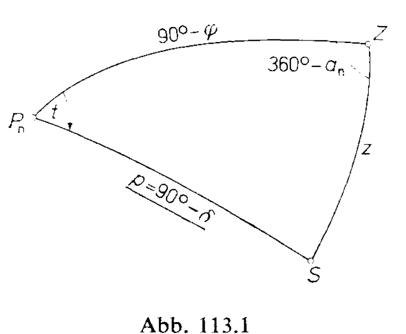


Abb. 113.1

[100] Ist die Länge λ des Beobachtungsortes bekannt, so kann die Uhrkorrektion auch mit Hilfe eines *Uhrenvergleichs* bestimmt werden: Nimmt man zur Uhrzeit U ein zur Weltzeit T_0 gesendetes Signal auf, so gilt $U + \Delta U =$ Sollzeit, wobei die Sollzeit mit Hilfe von T_0 gerechnet werden kann.

eine genäherte Zeit —, so kann die Uhrkorrektion nach

$$\Delta U = \alpha + t - U \tag{113.1b}$$

bestimmt werden, wenn noch der für den Zeitpunkt U gültige Stundenwinkel t bekannt ist. Eine Zeitbestimmung ist also gleichbedeutend mit der Bestimmung des Stundenwinkels eines Sterns. Das Fundamentaldreieck zeigt (Abb. 113.1), daß, die Breite φ und die Deklination δ als bekannt vorausgesetzt[101], entweder die *Zenitdistanz* z oder das *Azimut* a_n des Sterns zu beobachten ist.[102]

Ebenso wie in [112] ist unter z stets die *wahre Zenitdistanz*, d. h. die wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung verbesserte beobachtete Zenitdistanz zu verstehen: Infolge der Strahlenbrechung erscheinen die Sterne stets zu hoch, die *beobachtete Zenitdistanz* z' ist um den *Refraktionswinkel* r zu vergrößern.

Der Refraktionswinkel r hängt außer von z' auch von den am Beobachtungsort gemessenen Werten für Luftdruck und -temperatur ab und kann aus Tafeln entnommen werden (vgl. z. B. F. G. Gauss, a.a.O., 411–420. Auflage 1961, S. 159–161). Bei Sonnenbeobachtungen ist die beobachtete Zenitdistanz auch wegen *Parallaxe* zu korrigieren, und bei Messungen mit dem Sextanten ist die *Kimmtiefe* zu berücksichtigen.

Ist z. B. die Zenitdistanz z gemessen worden — Zeitbestimmungen mit Hilfe des Azimuts eines Sterns werden selten ausgeführt —, so erhält man den Stundenwinkel t aus dem Kosinussatz

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

zu

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}. \tag{113.1c}$$

Für logarithmische Rechnung ist (113.1c) noch umzuformen. Mit Hilfe der korrespondierenden Addition und Subtraktion wird

$$1 - \cos t = \frac{\cos\varphi \cos\delta + \sin\varphi \sin\delta - \cos z}{\cos\varphi \cos\delta} = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \cos z}{\cos\varphi \cos\delta}$$

und

$$1 + \cos t = \frac{\cos(\varphi + \delta) + \cos z}{\cos\varphi \cos\delta}.$$

[101] In Abb. 113.1 sind die gegebenen Stücke unterstrichen.

[102] Eine anschauliche geometrische Diskussion der verschiedenen Orts- und Zeitbestimmungsverfahren einschließlich der jeweils günstigsten Sternauswahl hat Th. Niethammer, a.a.O. S. 14 f. gegeben.

Die Verwandlungsformeln geben für die Zähler der rechten Seiten

$$\cos(\varphi-\delta)-\cos z = 2\sin\frac{\varphi-\delta+z}{2}\sin\frac{z+\delta-\varphi}{2}$$

$$\cos(\varphi+\delta)+\cos z = 2\cos\frac{\varphi+\delta+z}{2}\cos\frac{\varphi+\delta-z}{2}.$$

Wegen

$$\frac{1-\cos t}{1+\cos t} = \frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}} = \tan^2\frac{t}{2}$$

wird endlich, wenn noch die Abkürzung $2S = \varphi+\delta+z$ eingeführt wird,

$$\tan\frac{t}{2} = \pm\sqrt{\frac{\sin(S-\delta)\sin(S-\varphi)}{\cos S\cos(S-z)}}. \qquad (113.1\text{d})$$

Dabei ist t positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem ob auf der West- oder Ostseite beobachtet wurde. Natürlich kann (113.1d) unmittelbar auch aus den Halbwinkelformeln gefunden werden.

Die g ü n s t i g s t e B e o b a c h t u n g s a n o r d n u n g, d.h. die Auswahl geeigneter Sterne läßt sich an Hand folgender Fehlerbetrachtung beurteilen. Werden φ und δ als fehlerfrei angenommen ($d\varphi = d\delta = 0$), so gibt (108.4)

$$dt = \frac{-dz}{\sin a_n \cos\varphi}. \qquad (113.1\text{e})$$

Offenbar wird der Einfluß eines Zenitdistanzfehlers dz ein Minimum, wenn der Stern in Azimuten a_n von 90° bzw. 270°, also im 1. Vertikal beobachtet wird. Das Verfahren heißt daher *Zeitbestimmung aus Zenitdistanzen im 1. Vertikal.*

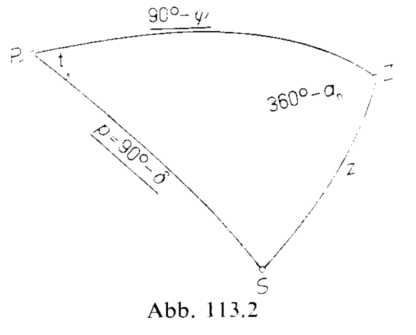


Abb. 113.2

Zur B e s t i m m u n g d e r g e o g r a p h i s c h e n B r e i t e φ sind, wie das Fundamentaldreieck in Abb. 113.2 zeigt, für einen Stern $S(\alpha, \delta)$ mindestens noch zwei Stücke, z. B. der *Stundenwinkel t* und die *Zenitdistanz z* notwendig. Mißt man zur Uhrzeit U die Zenitdistanz z, so erhält man bei bekannter Uhrkorrektion ΔU den Stundenwinkel zu $t = \theta-\alpha = U+\Delta U-\alpha$, so daß das Fundamentaldreieck nach φ aufgelöst werden kann. Die g ü n s t i g s t e S t e r n a u s w a h l läßt sich an

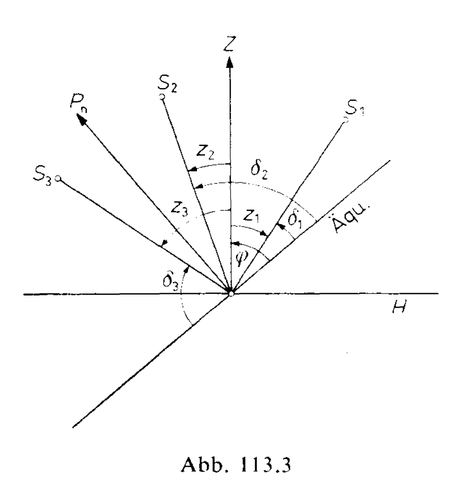


Abb. 113.3

Hand der Differentialformel (108.5) beurteilen, die für $d\delta = 0$ die Form

$$d\varphi = -\frac{dz}{\cos a_n} - \cos\varphi \tan a_n \, dt \tag{113.2a}$$

annimmt. Wird der Stern in Azimuten a_n von 0° bzw. 180°, also im Meridian beobachtet, so bleibt der Stundenwinkelfehler dt ohne Einfluß, und die Wirkung eines Fehlers dz der beobachteten Zenitdistanz wird ein Minimum. Dieses bequeme, in der Praxis beliebte Verfahren heißt *Breitenbestimmung aus Meridianzenitdistanzen.* Die Meridianrichtung wird dabei im allgemeinen mit Hilfe einer Azimutbestimmung festgelegt.

Die Rechenformeln können unmittelbar aus Abb. 113.3 abgelesen werden:

Stern in oberer Kulmination, südlich des Zenits: $\varphi = z_1 + \delta_1$

Stern in oberer Kulmination, nördlich des Zenits: $\varphi = \delta_2 - z_2$ (113.2b)

Stern in unterer Kulmination: $\varphi = 180° - \delta_3 - z_3$

Der Vorteil der Methode liegt darin, daß keine Uhrzeit zu beobachten ist.

Eine interessante Variante dieser Methode ist die *Breitenbestimmung aus Zirkum-Meridianzenitdistanzen*: Beobachtet man den Stern nicht im Meridian, sondern in Meridiannähe, so wird der Einfluß der Fehler dz und dt auf die Breite φ nur wenig größer. Allerdings hat man dann außer der Zenitdistanz z auch die Uhrzeit U zu beobachten. Ist die Uhrkorrektion ΔU gegeben, so kennt man für das Fundamentaldreieck drei Stücke, nämlich z, $90° - \delta$ und $t = U + \Delta U - \alpha$, so daß φ berechnet werden kann. Setzt man in dem Seitenkosinussatz

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \tag{113.3a}$$

für $\sin\delta = M \sin N$, $\cos\delta \cos t = M \cos N$, also $\tan N = \tan\delta/\cos t$, so erhält man die gesuchte Breite φ aus

$$\cos(\varphi - N) = \frac{\cos z}{M} = \frac{\sin N}{\sin\delta} \cos t. \tag{113.3b}$$

Statt der strengen Auflösung von (113.3b) wird meist folgendes Näherungsverfahren ausgeführt: Da die Beobachtung in Meridiannähe,

also unter kleinen Stundenwinkeln erfolgt, kann die Meridianzenitdistanz aus der beobachteten durch eine Reihenentwicklung erhalten werden. Ist $\delta < \varphi$, d. h. kulminiert der Stern südlich des Zenits, so kann (113.3a) in der Form

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \left(1 - 2\sin^2\frac{t}{2}\right)$$

$$= \cos(\varphi-\delta) - 2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{t}{2}$$

geschrieben werden. Setzt man

$$\cos(\varphi-\delta) = x \quad \text{und} \quad -2\cos\varphi\cos\delta\sin^2(t/2) = h,$$

also $\cos z = x+h$, so erhält man die Zenitdistanz zu $z = \arccos(x+h)$.

Wird z nach h in eine TAYLORsche Reihe entwickelt,

$$z = f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots,$$

die Ableitungen lauten mit $f(x) = \arccos x = \varphi - \delta$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\varphi-\delta)}} = \frac{-1}{\sin(\varphi-\delta)},$$

$$f''(x) = -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{\cos(\varphi-\delta)}{\sin^3(\varphi-\delta)} = \frac{\cot(\varphi-\delta)}{\sin^2(\varphi-\delta)},$$

so erhält man, wenn noch auf Gradmaß übergegangen wird,

$$z = \varphi - \delta + \varrho''\frac{2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{t}{2}}{\sin(\varphi-\delta)} - \varrho''\frac{2\cos^2\varphi\cos^2\delta}{\sin^2(\varphi-\delta)}\sin^4\frac{t}{2}\cot(\varphi-\delta).$$

Mit den Abkürzungen

$$A = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}, \quad m = 2\varrho''\sin^2\frac{t}{2}, \quad n = 2\varrho''\sin^4\frac{t}{2}$$

wird daraus

$$z = \varphi - \delta + Am - A^2 n\cot(\varphi-\delta),$$

und die gesuchte Breite ergibt sich zu

$$\varphi = z + \delta - Am + A^2 n \cot(\varphi-\delta). \qquad (113.3c)$$

Für m und n gibt es Tafeln[103], A, A^2 und $\cot(\varphi-\delta)$ können mit einem Näherungswert für φ gerechnet werden.

In gleicher Weise ergibt sich für $\delta > \varphi$, d.h. bei einer oberen Kulmination nördlich des Zenits

$$\varphi = \delta - z + Am - A^2 n \cot(\delta-\varphi) \quad \text{mit} \quad A = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\delta-\varphi)} \tag{113.3d}$$

und für die untere Kulmination

$$\varphi = 180° - z - \delta - \varrho'' \frac{2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{t'}{2}}{\sin(\varphi+\delta)} + \varrho'' \frac{2\cos^2\varphi\cos^2\delta\sin^4\frac{t'}{2}}{\sin^2(\varphi+\delta)}\cot(\varphi+\delta), \tag{113.3e}$$

mit $t' = 180° - t$.

Für die Breitenbestimmung aus Zirkummeridianzenitdistanzen ist auch der Polarstern geeignet: Zwar kann der Stundenwinkel t dann alle Werte zwischen 0° und 360° annehmen, doch ist die Poldistanz $p = 90° - \delta$ des Polarsterns stets $< 1°$, so daß sich der Stern immer in Meridiannähe befindet. — Stünde der Polarstern im Nordpol, so wäre seine Höhe h gleich der gesuchten Breite φ, also $h = 90° - z = \varphi$. Da dies nicht zutrifft, ist eine kleine Korrektion x notwendig, also

$$\varphi = 90° - z - x, \tag{113.4a}$$

wobei x maximal den Betrag von p erreichen kann. — Aus (113.4a) folgt $z = 90° - \varphi - x$ und $\cos z = \sin(\varphi + x)$: setzt man den letzten Ausdruck dem Kosinussatz für z gleich

$$\cos z = \cos p \sin\varphi + \sin p \cos\varphi \cos t = \sin(\varphi + x),$$

so erhält man bei Auflösung nach x

$$\sin x = \tan\varphi\,(\cos p - \cos x) + \sin p \cos t.$$

Setzt man für die kleinen Winkel p und x näherungsweise

$$\cos p = 1 - \frac{p^2}{2}, \quad \sin p = p - \frac{p^3}{6}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6},$$

so wird

$$x - \frac{x^3}{6} = \frac{\tan\varphi}{2}(x^2 - p^2) + \left(p - \frac{p^3}{6}\right)\cos t.$$

---

[103] Vgl. z. B. M. Waldmeier, Leitfaden der Astronomischen Orts- und Zeitbestimmung, H. R. Sauerländer, Aarau, 2. Aufl. 1958, S. 64/65.

oder, nach steigenden Potenzen geordnet,

$$x = p \cos t - \frac{1}{2} \tan \varphi (p^2 - x^2) - \frac{1}{6} (p^3 \cos t - x^3). \qquad (113.4b)$$

In erster Näherung gilt also $x = p \cos t$ und in zweiter Näherung (bis auf Glieder 3. Ordnung)

$$x = p \cos t - \frac{1}{2} \tan \varphi p^2 (1 - \cos^2 t).$$

Vernachlässigt man die Glieder 4. Ordnung, d. h. setzt man in (113.4b) für x^2 die zweite, für x^3 die erste Näherung, so wird daraus

$$x = p \cos t - \frac{1}{2} \tan \varphi (p^2 - p^2 \cos^2 t + p^3 \tan \varphi \cos t \sin^2 t)$$
$$- \frac{1}{6} \left(p^3 \cos t (1 - \cos^2 t)\right)$$

oder

$$x = p \cos t - \frac{p^2}{2} \tan \varphi \sin^2 t - \frac{p^3}{6} (1 + 3 \tan^2 \varphi) \cos t \sin^2 t.$$

Drückt man noch die Glieder im Gradmaß aus, so lautet die geographische Breite nach (113.4a) jetzt

$$\varphi = 90° - z - p \cos t + \frac{p^2}{2\varrho''} \tan \varphi \sin^2 t +$$
$$+ \frac{p^3}{6\varrho''^2} (1 + 3 \tan^2 \varphi) \cos t \sin^2 t. \qquad (113.4c)$$

Mit den Abkürzungen

$$M = \frac{p^2}{2\varrho''} \tan \varphi, \quad N = \frac{p^3}{6\varrho''^2} (1 + 3 \tan^2 \varphi) \cos t \sin^2 t$$

wird schließlich

$$\varphi = 90° - z - p \cos t + M \sin^2 t + N. \qquad (113.4d)$$

Die Korrektion N bleibt für Breiten $\varphi < 60°$ stets $< 1''$ und ist somit, falls nicht höchste Genauigkeit angestrebt wird, vernachlässigbar. Die Berechnung von M kann mit Hilfe von Tafeln vereinfacht werden.

Wird M in einen von p und einen von φ abhängigen Teil zerlegt, d. h. schreibt man

$$M_0 = \frac{p_0^2}{2\varrho''} \tan \varphi, \quad M = \frac{p^2}{p_0^2} M_0,$$

wobei p_0 einen konstanten Durchschnittswert der Poldistanz p bedeutet, so kann M_0 in Abhängigkeit von φ tabelliert werden (vgl. z. B. M. WALDMEIER, a.a.O. S. 70).

Für die Längenbestimmung ist daran zu erinnern, daß die von Greenwich aus nach Osten positiv gezählte Länge λ eines Ortes gleich der Differenz der entsprechenden Ortszeiten ist.

Eine Längenbestimmung erfordert also eine Zeitbestimmung und eine Zeitsignalaufnahme: Zur Uhrzeit U wird ein zur Weltzeit T_0 gesendetes Signal aufgenommen; aus T_0 läßt sich die Greenwicher Sternzeit θ_0 rechnen und mit Hilfe der aus einer Zeitbestimmung gewonnenen Uhrkorrektion ΔU auch die Ortssternzeit $\theta = U + \Delta U$, also wird die Länge

$$\lambda = \theta - \theta_0 = U + \Delta U - \theta_0. \qquad (113.5)$$

Eine ausführliche Darstellung der Längenbestimmung nach dieser Methode ist Aufgabe der Geodätischen Astronomie (vgl. z. B. Th. NIETHAMMER, a.a.O. S. 79–95 und 174–179). Nun soll noch ein Näherungsverfahren zur gleichzeitigen Bestimmung von Länge und Breite erläutert werden, das auch in der Nautik Anwendung findet, die *Standlinienmethode*; vorausgesetzt ist dabei, daß für den Beobachtungsort Näherungswerte φ' und λ' bekannt sind.

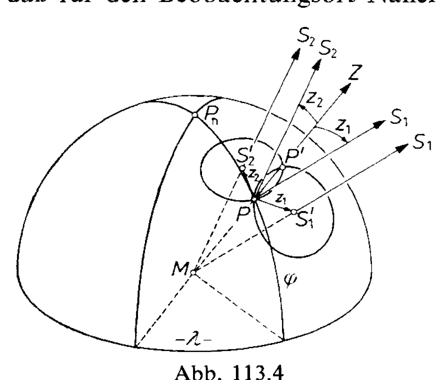


Abb. 113.4

Dann liefern die Zenitdistanzen zweier in beliebigen Azimuten beobachteter Sterne zwei Standlinien und als deren Schnitt auch die Lage des Beobachtungsortes. Das Verfahren ist geometrisch einfach zu deuten (Abb. 113.4): Ist S_1' die Projektion des Sterns S_1 auf die Erdoberfläche, dann liegen alle Erdorte, die den Stern S_1 unter der Zenitdistanz z_1 sehen, auf dem Kleinkreis mit dem Radius z_1 um S_1'. Ist im Ort P noch die Zenitdistanz z_2 eines Sterns S_2 gemessen worden, so erhält man P als den Schnittpunkt zweier Kleinkreise. Die Entscheidung, ob P oder P' der Beobachtungsort ist, bereitet auf Grund der Näherungswerte φ' und λ' keine Schwierigkeit. Ersetzt man die Kleinkreise um S_1' und S_2' in der Nähe von P durch deren Tangenten, so erhält man zwei *Standlinien*, die senkrecht zu den Visierlinien PS_1' bzw. PS_2' stehen und deren Schnittpunkt die Lage von P liefert. — Statt dieser graphischen Lösung kann für die Standlinienmethode, bei der eine nach Greenwicher Zeit regulierte Uhr notwendig ist, auch eine rechnerische Auswertung an-

gegeben werden: Für zwei Sterne seien die zusammengehörigen Werte von Zenitdistanz z und Greenwicher Sternzeit θ_0 beobachtet, also

$$S_1(\alpha_1, \delta_1) : z_1, \theta_0^1; \qquad S_2(\alpha_2, \delta_2) : z_2, \theta_0^2. \tag{113.6a}$$

Schreibt man für beide Sterne den Kosinussatz für z an und setzt $t = \theta - \alpha = \theta_0 + \lambda - \alpha = t_0 + \lambda$, wobei t_0 den auf Greenwich bezogenen Stundenwinkel bedeutet, so erhält man zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos z_1 &= \sin\varphi \sin\delta_1 + \cos\varphi \cos\delta_1 \cos(t_0^1 + \lambda), \\ \cos z_2 &= \sin\varphi \sin\delta_2 + \cos\varphi \cos\delta_2 \cos(t_0^2 + \lambda), \end{aligned} \tag{113.6b}$$

die nach den Unbekannten φ und λ aufgelöst werden können. Die strenge Lösung von (113.6b) ist allerdings wenig bequem. Einfacher wird die Bestimmung der Unbekannten durch Einführung der Näherungswerte φ', λ'. Setzt man $\varphi = \varphi' + \Delta\varphi$, $\lambda = \lambda' + \Delta\lambda$ so gilt allgemein

$$\cos z = \sin(\varphi' + \Delta\varphi) \sin\delta + \cos(\varphi' + \Delta\varphi) \cos\delta \cos(t_0 + \lambda' + \Delta\lambda)$$

oder, wenn ausmultipliziert wird,

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin\delta \{\sin\varphi' \cos\Delta\varphi + \cos\varphi' \sin\Delta\varphi\} \\ &+ \cos\delta \{\cos\varphi' \cos\Delta\varphi - \sin\varphi' \sin\Delta\varphi\}\{\cos(t_0 + \lambda')\cos\Delta\lambda - \sin(t_0 + \lambda')\sin\Delta\lambda\}. \end{aligned}$$

Sind die Verbesserungen $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ der Unbekannten so klein, daß die Näherungen $\cos\Delta\varphi = 1$, $\cos\Delta\lambda = 1$, $\sin\Delta\varphi = \Delta\varphi$, $\sin\Delta\lambda = \Delta\lambda$ gelten, so wird daraus

$$\begin{aligned} \cos z = {} & \sin\delta \sin\varphi' + \cos\delta \cos\varphi' \cos(t_0 + \lambda') \\ & + \Delta\varphi \{\cos\varphi' \sin\delta - \sin\varphi' \cos\delta \cos(t_0 + \lambda')\} \\ & - \Delta\lambda \{\cos\varphi' \cos\delta \sin(t_0 + \lambda')\}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck für $\cos z$ läßt sich noch vereinfachen; konstruiert man das sphärische Fundamentaldreieck mit Hilfe der Näherungen φ' und λ' (Abb. 113.5), so liest man daraus ab

$$\begin{aligned} \sin\delta \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\delta' \cos(t_0 + \lambda') &= \cos z', \\ \cos\varphi' \sin\delta - \sin\varphi' \cos\delta \cos(t_0 + \lambda') &= \sin z' \cos a_n', \\ \cos\delta \sin(t_0 + \lambda') &= -\sin a_n' \sin z', \end{aligned}$$

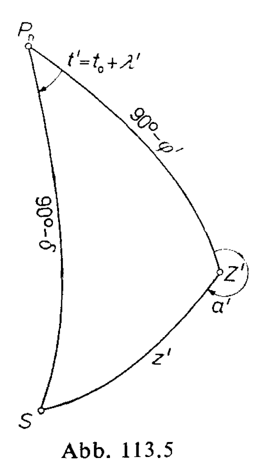


Abb. 113.5

wobei z' und a_n' die den Näherungswerten φ', λ' entsprechenden Werte von Zenitdistanz und Azimut bedeuten. Also wird

$$\cos z = \cos z' + \Delta\varphi \sin z' \cos a_n' + \Delta\lambda \cos\varphi' \sin a_n' \sin z'.$$

Da auch $z' - z = \Delta z$ eine kleine Größe ist, kann $\cos(z' - \Delta z)$ durch die Näherung

$$\cos z = \cos z' + \Delta z \sin z'$$

ersetzt werden. Also wird

$$\cos z' + \Delta z \sin z' = \cos z' + \Delta\varphi \sin z' \cos a'_n + \Delta\lambda \cos\varphi' \sin z' \sin a'_n$$

oder

$$\Delta z = \Delta\varphi \cos a'_n + \Delta\lambda \cos\varphi' \sin a'_n. \qquad (113.6c)$$

Für zwei Sterne S_1 und S_2 ergeben sich also zwei lineare Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \Delta z_1 &= \Delta\varphi \cos a'_{n.1} + \Delta\lambda \cos\varphi' \sin a'_{n.1}, \\ \Delta z_2 &= \Delta\varphi \cos a'_{n.2} + \Delta\lambda \cos\varphi' \sin a'_{n.2}, \end{aligned} \qquad (113.6d)$$

woraus die Verbesserungen $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ und schließlich die Werte für Breite und Länge

$$\varphi = \varphi' + \Delta\varphi, \quad \lambda = \lambda' + \Delta\lambda \qquad (113.6e)$$

bestimmt werden können.

Wurden insgesamt $n > 2$ Sterne beobachtet, so liefert jeder der n Sterne eine Gleichung der Art (113.6d); offenbar liegen dann überschüssige Beobachtungen vor, so daß die Unbekannten $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ durch eine Ausgleichung zu bestimmen sind.

Eine Azimutbestimmung ist gleichbedeutend mit der Festlegung des Meridians des Beobachtungsortes P_1 (Abb. 113.6): Mißt man in P_1 den Horizontalwinkel w zwischen dem terrestrischen Ziel P_2 und einem Stern $S(\alpha, \delta)$, so wird das Azimut des Bogens P_1P_2 gleich

$$a_{1.2} = a_n + w, \qquad (113.7a)$$

wobei a_n das Azimut des Sternes S bedeutet[104]. Ist die Breite φ bekannt, so benötigt man zur Bestimmung von a_n noch eine Größe, entweder den Stundenwinkel t oder die Zenitdistanz z (Abb. 113.7): Die Praxis bevor-

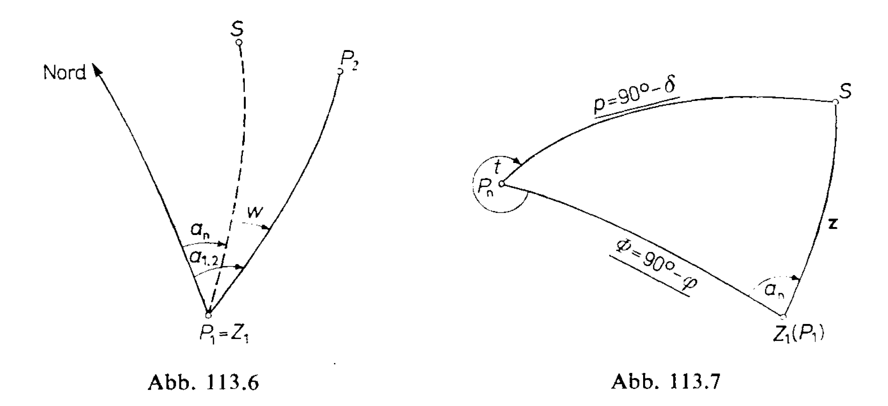


Abb. 113.6 Abb. 113.7

[104] Dem Beobachtungsort P_1 entspricht der Zenit Z_1 auf der Himmelskugel. In den Abb. 113.6 und 113.7 ist daher neben P_1 noch Z_1 angegeben.

zugt die *Azimutbestimmung mit Hilfe des Stundenwinkels;* dabei wird der Stundenwinkel t nicht unmittelbar beobachtet, sondern aus der Uhrzeit U für die Sterneinstellung (bei der Winkelmessung!) nach $t = U+\Delta U-\alpha$ gerechnet. Es muß also auch die Uhrkorrektion bekannt sein. Für a_n gilt nach (108.3c)

$$\tan a_n = -\frac{\cot\delta \sec\varphi \sin t}{1-\tan\varphi \cos t \cot\delta}. \tag{113.7b}$$

Die Gl. (113.7b) kann auch für die logarithmische Rechnung benützt werden, wenn die Hilfstafel von ALBRECHT[105] verfügbar ist: Dieser Tafel kann für das Argument $\lg \tan\varphi \cos t \cot\delta$ unmittelbar $\lg 1/(1-\tan\varphi\cos t \cot\delta)$ entnommen werden. Allerdings ist diese Tafel auf der Nordhalbkugel nur für die polnahen Sterne α- und λ-ursae minoris verwendbar. Eine weitere Möglichkeit besteht darin (113.7b) in eine bequem logarithmierbare Form zu bringen: Setzt man in der Tangensformel [vgl. (108.3c)]

$$\tan a_n = \frac{-\cos\delta \sin t}{\sin\delta\cos\varphi-\sin\varphi\cos t\cos\delta}$$

$\sin\delta = n\sin M$, $\cos\delta\cos t = n\cos M$, also $\tan M = \tan\delta/\cos t$, so wird

$$\tan a_n = \frac{-\cos\delta\sin t}{n\sin(M-\varphi)} = \frac{\cos M\tan t}{\sin(\varphi-M)}.$$

In beiden Fällen benützt man vorteilhaft noch trigonometrische Tafeln, die die Funktionswerte für Winkel im Zeitmaß angeben.[106]

Die günstigste Sternauswahl läßt sich an Hand der Differentialformel (108.6) erkennen; mit $d\varphi = d\delta = 0$ wird daraus

$$da_n = \frac{\cos\delta\cos q}{\sin z}\,dt. \tag{113.7c}$$

Die Auswirkung eines Fehlers dt im beobachteten Stundenwinkel bleibt gering, wenn $\cos\delta \approx 0$, also polnahe Sterne beobachtet werden. Führt man die *Azimutbestimmung mit Hilfe von Polaris* aus, so ist diese Bedingung sehr gut erfüllt.

Der Polarstern kann auch in seiner größten Digression beobachtet werden; wegen $q = 90^\circ$ bzw. 270° wird dann $da_n = 0$, und das Azimut ergibt sich nach (109.9) zu $\sin a_n = \cos\delta/\cos\varphi$.

---

[105] Th. ALBRECHT, Formeln und Hilfstafeln für die geographische Ortsbestimmung, 5. vollst. neu bearb. Auflage von H.- U. SANDIG mit Beiträgen von M. SCHÄDLICH, Veröff. des Geod. Inst. Potsdam Nr. 30, 1967.

[106] Vgl. z. B. Seven figure trigonometrical tables for every second of time, herausgegeben vom H. M. Nautical Office, London.

Die *Azimutbestimmung mit Hilfe von Zenitdistanzen*, für die man sofort die aus dem Kosinus- bzw. Halbwinkelsatz folgenden Beziehungen

$$\cos a_n = \frac{\sin \delta - \sin \varphi \cos z}{\cos \varphi \sin z} \tag{113.8a}$$

bzw.

$$\tan \frac{a_n}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - \Phi) \sin (s - z)}{\sin s \sin (s - p)}}$$

mit

$$s = \frac{1}{2}(\Phi + z + p), \quad \Phi = 90^\circ - \varphi$$

angeben kann, wird wegen der zu fürchtenden Refraktionsfehler in der Praxis nur selten benützt.

Schrifttum (Auswahl)

ACZÉL, L.: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Verlag Birkhäuser, Basel—Stuttgart 1961.

ATHEN, H.: Ebene und sphärische Trigonometrie. Wolfenbütteler Verlagsanstalt, Wolfenbüttel und Hannover 1948.

BECK, W.: Geländeformen, Reproduktion, Topographische Karten und Kartenabbildungen in: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. Ia, hrsg. von JORDAN/EGGERT/KNEISSL. J. B. Metzlersche Verlagsbuchh., Stuttgart 1957.

BECKER, F.: Einführung in die Astronomie, 4. Aufl., Bibliographisches Institut, Mannheim 1960.

v. BRAUNMÜHL, A.: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. B. G. Teubner Verlagsges., 1. Teil: Leipzig 1900; 2.Teil: Leipzig 1903.

BRÜCKNER, M.: Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte. B. G. Teubner Verlagsges., Leipzig 1900.

DÖRRIE, H.: Ebene und sphärische Trigonometrie. Oldenbourg-Verlag, München 1950.
Unendliche Reihen. Oldenbourg-Verlag, München 1951.

FRIESECKE, O.: Die konstruktive Lösung der Grundaufgaben der sphärischen Trigonometrie mit Hilfe der gnomonischen Projektion. Z math. naturwiss. Unterricht *63* (1932) S. 105 f.

GROSSMANN, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1961.
Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung, 2. Aufl., Verlag K. Wittwer, Stuttgart 1964.

HAMMER, E.: Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, 5. Aufl., J. B. Metzlersche Verlagsbuchh., Stuttgart 1923.
Die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen, Stuttgart 1889.

HERZOG, E.: Die Aufgaben der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung in systematischer Behandlung. Verh. d. Naturforsch. Ges. in Basel, Bd. LVIII, 1947.

HESSENBERG, G.: Ebene und sphärische Trigonometrie, 5. Aufl., durchgesehen von H. KNESER. Sammlung Göschen, Bd. 99. Verlag W. de Gruyter, Berlin 1957.

HNATEK, A.: Über die Berechnung einer Sonnenuhr bei beliebiger Neigung und beliebigem Azimut der Uhrfläche. Springer-Verlag, Wien 1950.

HOLZMÜLLER, G.: Elemente der Stereometrie, 1. Teil. G. J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig 1900.

KNEISSL, M.: Mathematische Geodäsie (Landesvermessung). Handbuch deı Vermessungskunde, hrsg. von JORDAN/EGGERT/KNEISSL, 10. Aufl., Bd. IV. J. B. Metzlersche Verlagsbuchh., Stuttgart 1959.

KNOPP, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Grundlehren der Mathem. Wissenschaften, 4. Aufl., Bd. II. Springer-Verlag, Berlin und Heidelberg 1947.

KRAMER, W.: Zeichnerische Lösung der Grundaufgaben der mathem. Erd- und Himmelskunde. Z. physik. und chem. Unterricht *40* (1927) S. 60 f.

KUSTAANHEIMO, P.: On Vector Methods in Spherical Astronomy. Societas Scientiarium Fennica, Commentationes Physico-Mathematicae, XXIV, 4: Helsinki 1959, XXIV, 7: 1960.

LENSE, J.: Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik, 3. Aufl., Verlag W. de Gruyter, Berlin 1953.
Die sphärische Trigonometrie in der sphärischen Astronomie. Astronomische Nachrichten Bd. 271, H. 3.

LIETZMANN, W.: Elementare Kugelgeometrie mit numerischen und konstruktiven Methoden. Verlag Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1949.

LÖBELL, F.: Allgemeine Theorie der Flächenabbildungen. Sonderdruck aus den Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, Nr. 5. Berlin 1942.

LOSKE, L. M.: Die Sonnenuhren, Kunstwerke der Zeitmessung und ihre Geheimnisse. Verständliche Wissenschaft Bd. 69. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1959.

MERKEL, H.: Grundzüge der Kartenprojektionslehre. Veröff. der Dt. Geodätischen Kommission, Reihe A, Heft Nr. 17. München 1956.

MOEBIUS, A. F.: Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in größtmöglicher Allgemeinheit. Gesammelte Werke II, S. 73 f., 1881.

MÜHLIG, F.: Grundlagen und Beobachtungsverfahren der Astronomisch-geodätischen Ortsbestimmung. Sammlung Wichmann, Bd. 20. Berlin 1960.

NÄBAUER, M.: Appolonische Kurven auf der Kugel. Abhandl. Bayer. Akad. der Wiss., math.-naturwiss. Klasse, N. F. Heft 107. München 1962.

NIETHAMMER, TH.: Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung. Verlag Birkhäuser, Basel 1947.

PAASCHE, I.: Die vierte Dreiecksseite. Praxis der Mathematik, 1963, S. 113–123.

PREY, A.: Einführung in die sphärische Astronomie. Springer-Verlag, Wien 1949.

ROELOFS, R.: Astronomy Applied to Land Surveying. N. V. Wec. J. Ahrend & Zoon, Amsterdam 1950.

SCHAUB, W.: Vorlesungen über sphärische Astronomie. Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K. G., Leipzig 1950.

SCHMID, W., u. BORSDORF W.: Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen, 2 Bände. Bergakademie Freiberg, Fernstudium, 1959.

SCHÜTTE, K.: Die Berechnung von Höhe und Azimut ohne Logarithmen, Seewarte, Heft 2, 1942.
Neue Azimutdiagramme. Annalen der Hydrographie, 1942.
Sonnenuhren, Berechnung, Anfertigung, Anwendung. Deva-Fachverlag, Stuttgart 1959.

STEINITZ, E.: Polyeder und Raumaufteilungen. Encyclop. d. math. Wiss., Bd. 3: Geometrie, 1. Teil, 2. Hälfte. B. G. Teubner Verlagsges., Leipzig 1914–1931.

STRUBECKER, K.: Einführung in die Höhere Mathematik. Bd. I: Grundlagen. Oldenbourg-Verlag, München 1956.

STUDY, E.: Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen. Abhandl. Sächs. Ges. d. Wiss., Bd. 20, 1893.
Encyclop. d. math. Wiss., Bd. 3: Geometrie, 1. Teil, 2. Hälfte. B. G. Teubner Verlagsges., Leipzig 1914–1931, S. 833–854.

SUST, O.: Tafeln für die Umwandlung von Winkeln aus alter in neue Teilung. Verlag K. Wittwer Stuttgart 1948.

VRANIC, V.: Über die Ableitung der Formeln der sphärischen Trigonometrie mit Hilfe der stereographischen Projektion. Z. math. u. naturwiss. Unterricht *59* (1948) S. 164 f.

WAGNER, K.: Kartographische Netzentwürfe, 2. Aufl., Bibliographisches Institut, Mannheim 1962.

WALDMEIER, M.: Leitfaden der astronomischen Orts- und Zeitbestimmung, 2. Aufl., Verlag H. R. Sauerländer, Aarau 1958.

WOLF, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Verlag F. Dümmler, Bonn 1968.

Sachregister

Namenregister